
Föreläsningsanteckningar

Pouya Ashraf

I detta dokument är föreläsningsanteckningar till kursen flervariabelanalys, som gavs av Thomas Önskog på Uppsala Universitet 2013. Samtliga figurer ritade av Pouya gjordes med vektorgrafik direkt i L^AT_EX, så om något inte syns tydligt nog är det bara att zooma in utan att det blir grynigt (fantastiskt, eller hur?). Med "Kursboken" menas Adams Calculus 8e eller 9e utgåvan.

Anteckningarna anpassades kontinuerligt under hela läsåret 2018/2019 för att passa för kurserna som gavs av Hania Uscka-Wehlou (den 10hp-kursen under HT2018 och den 5hp-kursen under VT2019) och de kan användas i fortsättning som komplettering till kurslitteraturen.

Alla bilder ritade av Hania är gjorda med KeyNote. Extra exempel lades till, tagna från andra föreläsare, framförallt från Maksim Maydanskiy, Ryszard Rubinsztein och Bo Styf. Travis Kowalski har också fått sin plats här.

Mycket nöje och lycka till!

23 september 2019

Uppskattar du att all info för kursen finns i detta dokument, så att du (kanske) slipper köpa kurslitteraturen? Känner du att du vill öka min (Pouyas) livskvalitet litegrann som tack för arbetet jag lagt ner? Swisha valfri summa (typ 20–30kr) till 070-422 40 81

Innehåll

Om kursen: planering för föreläsningar och lektioner	1
Föreläsning 1: Introduktion; funktioner av flera variabler: grafer, nivåkurvor, nivååtor; koordinater i rummet $\mathbb{R}^3$	3
Introduktion	3
Koordinatgeometri i flera variabler	3
Topologiska begrepp	5
Funktioner av flera variabler	7
Föreläsning 2: Mängder i $\mathbb{R}^n$; andragradsytor; polära, cylindriska och sfäriska koordinater	9
Cylindriska och sfäriska (rymdspolära) koordinater	9
Andragradskurvor och andragradsytor	10
Kvadratiske former	11
Föreläsning 3: Vektorvärda funktioner: parametriska kurvor, båglängd	12
Vektorvärda funktioner: parametriska kurvor	12
Båglängd av en kurva	17
Föreläsning 4: Funktioner av flera variabler: gränsvärdet och kontinuitet	20
Gränsvärden och kontinuitet	20
Gränsvärde och kontinuitet för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$	21
Föreläsning 5: Partiella derivator; tangentplan	25
Partiella derivator; tangentplan till grafytan $z = f(x, y)$	25
Högre ordningens derivator	29
Föreläsning 6: Differentierbarhet, linjärisering	31
Differentierbarhet	31
Jacobianen	35
Föreläsning 7: Kedjeregeln	37
Föreläsning 8: Tangentplan, gradient, riktningsderivator	46
Differentierbarhet (forts.)	46
Gradient och riktningsderivata	47
Föreläsning 9: Taylorserier, kvadratiske former	53
Taylorapproximationer, kvadratiske former	53
Extremvärden	54
Föreläsning 10: Extremvärden, klassificering av kritiska punkter	58
Föreläsning 11: Extremvärden på begränsade områden, bivillkor och Lagrange-multiplikatorer	65
Extremvärden för funktioner på kompakta områden	65
Lagrangemultiplikatorer	67
Föreläsning 12: Försättning på bivillkor och Lagrangemultiplikatorer	70

Föreläsning 13: Dubbelintegraler, itererad integration	75
Föreläsning 14: Dubbelintegraler, fortsättning; variabelsubstitution (polära koordinater)	79
Fubinis sats på x - och y -enkla områden	79
Variabelsubstitution (polära koordinater)	82
Trigonometriska formler för flervariabelanalys	86
Föreläsning 15: Generaliserade integraler; Medelvärdessatsen	87
Föreläsning 16: Trippelintegraler; variabelbyte i trippelintegraler	92
Trippelintegraler	92
Variabelbyte i trippelintegraler	94
Tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler	97
Föreläsning 17: Vektorfält (v.f.) och skalärfält; konservativa v.f.	101
Vektorfält	101
Konservativa vektorfält	103
Föreläsning 18: Kurvintegraler av vektorfält; Huvudsatsen	105
Föreläsning 19: Kurvintegraler: Greens sats i planet	110
Föreläsning 20: Tentaförberedande; repetition på hela kursen	116
Appendix: Bilder till Föreläsningar 2 och 19	122

Om kursen: planering för föreläsningar och lektioner

F.	Innehåll	Adams C	Travis
1	Funktioner av flera variabler: grafer, nivåkurvor, nivåytor; om $\mathbb{R}^n$.	10.1–2, 12.1	T.1–5
2	Andragsytor; polära, cylindriska och sfäriska koordinater.	10.5–6	—
3	Vektorvärda funktioner av en variabel, kurvor, båglängd.	11.1, 11.3	T.6–8
4	Funktioner av flera variabler: gränsvärden, kontinuitet.	12.2	T.9–10
5	Partiella derivator. Tangentplan.	12.3–4	T.11–12
6	Differentierbarhet, linjärisering.	12.6	T.12–13
7	Kedjeregeln.	12.5	T.14
8	Gradient, riktningsderivator. (sista till duggan)	12.7	T.12–14
9	Taylorutveckling.	12.9	—
10	Extremvärden, klassificering av kritiska punkter.	13.1	T.15
11	Extremvärden på begränsade områden, bivillkor och Lagrangemultiplikatorer.	13.2–3	T.15–16
12	Fortsättning på bivillkor och Lagrangemultiplikatorer.	13.3	T.15–16
13	Dubbelintegraler, itererad integration.	14.1–2	T.17–18
14	Forts. på itererad integration, variabelbyte (polära koordinater).	14.2, 14.4	T.20
15	Generaliserade integraler, medelvärde, variabelbyte.	14.3–4	T.20
16	Trippelintegraler, variabelbyte.	14.5–7	T.19–20
17	Vektorfält och skalärfält, konservativa vektorfält.	15.1–2	T.22
18	Kurvintegraler oberoende av vägen, Huvudsatsen.	15.4	T.21–23
19	Kurvintegraler: Greens sats i planet.	16.3	T.24
20	Repetition.	10.1–16.3	T.1–24

Ordningen på föreläsningar och lektioner (enligt innehåll, mer eller mindre):

F1, F2, **L1**, F3, **L2**, F4, F5, **L3**, F6, F7, F8, **L4** (hittills material till duggan), F9, F10, **L5**, F11, F12, **L6**, F13, F14, **L7**, F15, F16, **L8**, F17, F18, **L9**, F19, F20, **L10**.

Undervisning

- Undervisningen består av 20 föreläsningar och 10 lektioner om 2 timmar vardera.
- Under föreläsningarna går vi igenom teori och räknar belysande exempel.
- Lektionerna är främst avsedda för problemlösning, där ni kan få hjälp av lektionsledaren till de uppgifter ni inte kunnat lösa hemma. Se alltså till att ha försökt lösa de rekommenderade uppgifter innan ni kommer till lektionen, så att ni kan ställa frågor till lektionsledaren och på detta sätt använda lektionstiden optimalt.
- Jag rekommenderar varmt att ni tittar på följande filmer, som komplettering till föreläsningarna, lektionerna och kurslitteraturen:

- **Travis Kowalski**: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLE7F8F33E161D1425>

- **Jonas Månsson**: <http://www.matematikblogg.se/flerdim2015.html>

- Khan Academy: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus>

- En annan fantastisk källa är hemsidan till KTH:s **Armin Halilovic**:

http://ingforum.haninge.kth.se/armin/AR_12_13/SF1626/dirfler12_13.html

Nere på sidan finns det **EXTRA ÖVNINGAR** som är väldigt bra att gå igenom för att få en känsla för detta vad man har lärt sig under föreläsningarna.

Föreläsning 1: Introduktion; funktioner av flera variabler: grafer, nivåkurvor, nivåytor; koordinater i rummet $\mathbb{R}^3$

Introduktion

I kursen envariabelanalys studerades funktioner av en variabel. Dessa typer av funktioner är lätta att askådliggöra eftersom vi kan rita grafen till dem. Det finns många fysikaliska problem som kan beskrivas med hjälp av funktioner av en variabel, men för att beskriva fenomen i vår tredimensionella värld behöver vi i allmänhet funktioner av fler än en variabel.

Exempel

- Densiteten hos ett tredimensionellt föremål ges av en funktion $\rho(x, y, z)$ där x , y och z är de tre rumsvariablerna. Hur ska man gå tillväga för att bestämma föremålets massa, masscentrum eller tröghetsmoment?
- Om vi öppnar ytterdörren till en föreläsningssal kommer temperaturen i en punkt (x, y, z) i rummet att förändras över tiden. Temperaturen är därmed en funktion av fyra variabler $T(x, y, z, t)$. Hur ska man gå tillväga för att bestämma var temperaturen är maximal/minimal eller i vilken riktning som temperaturen förändras snabbast?
- I varje punkt på jordytan blåser det längs en viss vektor (vars längd och riktning förändras över tiden). Vinden kan beskrivas med ett vektorfält, dvs. en funktion som till varje punkt (x, y) på jordytan ordnar en vektor $\vec{v}(x, y)$. Hur ska man gå tillväga för att bestämma hur stort arbete som krävs för att flytta ett föremål längs en kurva på jordytan?

Som synes finns det gott om fenomen som är naturliga att beskriva med funktioner av fler än en variabel, och under kursen kommer vi att ta fram ett antal matematiska metoder för denna typ av funktioner.

Relevanta kapitel i kursboken:

Dessa tas upp på duggan:

- 10-11: Vektorer och vektorvärda funktioner, kurvor, topologi
- 12: Funktioner av flera variabler, partiella derivator, kedjeregeln, gradient.

Sedan följer:

- 13: Extremvärden, optimering
- 14: Integraler, där integrationsintervallet är en yta eller volym
- 15: Integraler, där integrationsintervallet är en kurva
- 16.3: Vektoranalys med fysikaliska tillämpningar: kurvintegraler av vektorfält, Greens sats.

Koordinatgeometri i flera variabler

Vi såg i exemplen att vi kommer studera funktioner av flera variabler. Om vi låter antalet variabler vara n , så kommer definitionsmängden till våra funktioner att vara (en del av) mängden av alla n -tupler $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, av alla reella tal $x_1, x_2, \dots, x_n$. Denna mängd betecknas $\mathbb{R}^n$.

Exempel 1. $\mathbb{R}^1$ (skrivs normalt bara $\mathbb{R}$) motsvarar tallinjen, $\mathbb{R}^2$ ett plan, $\mathbb{R}^3$ det tredimensionella rummet, medan $\mathbb{R}^n$, för $n > 3$, är svårare att åskådliggöra sig geometriskt. I $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ använder vi ofta beteckningarna (x, y) respektive (x, y, z) i stället för (x_1, x_2) respektive (x_1, x_2, x_3) .

Elementen i mängden $\mathbb{R}^n$ är vektorer, och precis som för vektorer kan vi definiera vektoraddition, multiplikation med skalär och skalärprodukt.

Definition 1.

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \vec{x} &= \lambda(x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n\end{aligned}$$

Ibland kan det vara praktiskt att tolka elementen i $\mathbb{R}^n$ som matriser. Om vi använder konventionen att $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ är en kolonnmatrix så kan vi skriva $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$, där elementen i högerledet ska tolkas som matriser.

Definition 2. Längden av en vektor $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ ges av

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Definition 3. Avståndet mellan två punkter $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ges av

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Definition 4. Vinkeln mellan två vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ definieras som den vinkel $\theta \in [0, \pi]$, som uppfyller

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

Sats 1 (Cauchy-Schwarz olikhet). För $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, så gäller $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ med likhet precis då $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är parallella (dvs. då $\vec{x} = t\vec{y}$, $t \in \mathbb{R}$).¹

Bevis. Vi antar att $\vec{x} \neq \vec{0}$ (trivial lösning). Skalärprodukten av en vektor med sig själv kan aldrig vara negativ. Låt $t \in \mathbb{R}$ som vi snart ska specificera. Då gäller:

$$0 \leq (t\vec{x} + \vec{y}) \cdot (t\vec{x} + \vec{y}) = t^2|\vec{x}|^2 + 2t\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2$$

Kvadratkomplettering och ansättning $t = -\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2}$ ger:

$$0 \leq |\vec{x}|^2 \left(t + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} \right)^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{x}|^2} + |\vec{y}|^2 = |\vec{y}|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{x}|^2} \iff |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

Likhet inträffar precis då $t\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, dvs. då $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är parallella. □

¹För $n = 2$ och $n = 3$ är satsen självklar från följande formeln för skalärprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \theta$ där θ är vinkeln mellan vektorerna. Cauchy-Schwarz olikhet följer då omedelbart från detta att $|\cos \theta| \leq 1$ för alla θ . Likheten inträffar då $|\cos \theta| = 1$, alltså då $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$, vilket betyder att vektorerna är parallella.

Det är relativt enkelt att visa att även triangelolikheten $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ gäller för $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (utveckla $|\vec{x} + \vec{y}|^2$ och använd Cauchy-Schwarz olikhet).

Man kan mäta avstånd i $\mathbb{R}^n$ på andra sätt än den Euklidiska normen $|\vec{x}|$ ovan (**OBS: överkurs för 1MA017**). Två andra definitioner som bibehåller vissa grundläggande egenskaper (Δ -olikheten, $|\vec{x}| \geq 0$ med likhet för $\vec{x} = 0$, samt $|\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$) är normerna $|\vec{x}|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ respektive $|\vec{x}|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{N}^+$. Man kan visa att normerna är ekvivalenta med den Euklidiska, dvs. $A|\vec{x}|_p \leq |\vec{x}| \leq B|\vec{x}|_p$.

Topologiska begrepp

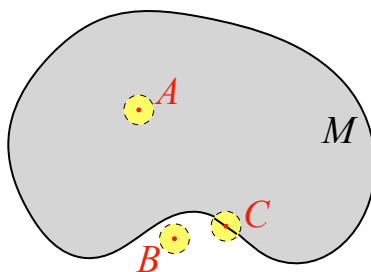
För att kunna definiera gränsvärden (och i förlängningen kontinuitet och derivata) hos funktioner av flera variabler, behöver vi generalisera begreppen öppna/slutna intervall och ändpunkter/inre punkter hos intervall i $\mathbb{R}^n$. Vi börjar med att definiera en omgivning till en punkt.

Definition 5. En *omgivning* till en punkt $\vec{a}$ består av alla punkter som ligger inom ett visst avstånd från $\vec{a}$.

För ett tal $\delta > 0$, så är mängden $N(\vec{a}, \delta) = \{\vec{x} : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta\}$ en $(\delta-)$ omgivning till $\vec{a}$. I $\mathbb{R}^1$ blir en δ -omgivning till $\vec{a}$ ett intervall på tallinjen, i $\mathbb{R}^2$ blir det en cirkelskiva kring $\vec{a}$ med radie δ , och i $\mathbb{R}^3$ blir det ett klot kring $\vec{a}$ med radie δ , alla ovannämnda utan rand.

Definition 6. Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. En punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ är:

1. *inre punkt* till M om det finns en omgivning A till $\vec{a}$ som helt ligger i M ($A \subset M$).
2. *yttre punkt* till M om det finns en omgivning B till $\vec{a}$ som helt ligger utanför M ($B \cap M = \emptyset$).
3. *randpunkt* till M om $\vec{a}$ varken är inre eller yttre punkt, dvs om alla omgivningar till $\vec{a}$ innehåller både punkter som tillhör M och punkter som inte tillhör M .



Figur 1: Föreläsning 1: En *inre* punkt till M med en omgivning $A \subset M$, en *yttre* punkt till M med en omgivning B s.a. $B \cap M = \emptyset$ och en *randpunkt* till M med en omgivning C som har icke-tomt snitt med både M och M 's komplement. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Mängden av alla inre punkter kallas det *inre* av M och betecknas M° eller $\text{Int}(M)$. Mängden av alla randpunkter kallas *randen* till M och betecknas ∂M . En randpunkt kan tillhöra mängden, men behöver inte göra det.

Definition 7. Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. M är *öppen* om $M = M^\circ$ och *sluten* om M^c är en öppen mängd.

Alternativt kan M sägas vara *öppen* om $\partial M \cap M = \emptyset$ (M innehåller **inga** randpunkter) och *sluten* om $\partial M \subset M$ (M innehåller **alla** sina randpunkter). OBS: En mängd är **varken öppen eller sluten** om den innehåller några av sina randpunkter (alltså är inte öppen), dock ej alla.

Exempel 2. Mängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ består av en elliptisk skiva. Randen består av ellipsen med ekvation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. För varje punkt i mängden finns en omgivning som är helt innehållen i mängden, och består således bara av inre punkter. Mängden är således öppen.

Exempel 3. Mängden $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ består av enhetssfären i $\mathbb{R}^3$. Alla omgivningar till punkter på sfären innehåller både punkter på sfären och i dess komplement, så alla punkter på sfären är randpunkter till mängden. Därmed $\partial M \subset M$ och mängden är sluten.

Definition 8. Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. Det *slutna höljet* av M ges av $\bar{M} = M \cup \partial M$.

Från ovanstående definitioner gäller M sluten $\iff \partial M \subset M \iff M = M \cup \partial M$, så en mängd M är sluten omm. den uppfyller $\bar{M} = M$.

Man kan också visa att $\bar{M}$ alltid är en sluten mängd. Komplementet till $\bar{M}$ är de yttre punkterna till M och de utgör per definition en öppen mängd.

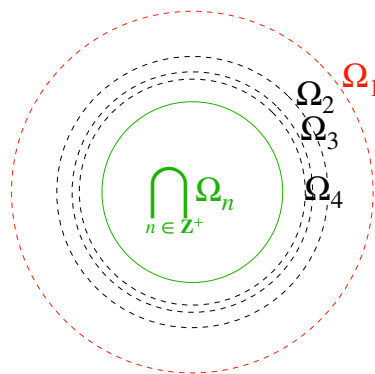
Definition 9. En mängd M i $\mathbb{R}^n$ kallas *begränsad* om $M \subset N(\vec{0}, r)$ för något $r > 0$.

Punkterna i en begränsad mängd ligger på ändligt avstånd från origo. En mängd som är både sluten och begränsad kallas för *kompakt*. Enhetssfären är ett exempel på en kompakt mängd. Vi återkommer till de topologiska begreppen när vi har infört gränsvärden i $\mathbb{R}^n$ om några kapitel. Vi avslutar med ett resultat om unioner och snitt av öppna mängder.

Sats 2. Antag att $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ är öppna för alla $i \in I$ (indexmängd). Då är $\cup_{i \in I} \Omega_i$ öppen.

En oändlig union av öppna mängder är öppen, men ett oändligt snitt av öppna mängder behöver inte vara öppen.

Exempel 4. Låt $\Omega_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < (1 + \frac{1}{n})^2\}$, för något $n \in \mathbb{Z}^+$. Unionen av Ω_n uppfyller $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \Omega_n = \Omega_1$.



Figur 2: Föreläsning 1: Mängder Ω_n för några n och deras snitt. (Bild: Hania, med KeyNote.)

eftersom mängderna blir allt mindre. Snittet av Ω_n uppfyller

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \Omega_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

som är en sluten mängd (slutna mängder definieras m.h.a. $\geq$, $\leq$ eller $=$, öppna med $>$ eller $<$).

Resten av detta kapitel kommer ägnas åt att studera vilka ytor i $\mathbb{R}^3$ som olika linjära och kvadratiske ekvationer i x , y , och z ger upphov till. En linjär ekvation i x , y , och z kan skrivas $ax + by + cz = d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ och är, som bekant, ekvationen för ett plan.

Planet $z = 0$ kallas xy -planet, planet $y = 0$ kallas xz -planet, och planet $x = 0$ kallas yz -planet. Om någon av variablerna x , y eller z saknas, kommer den motsvarande ytan att vara parallell med axeln som motsvarar den frånvarande variabeln.

Exempel 5. Ekvationen $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ motsvaras i $\mathbb{R}^2$ av en cirkel med centrum i $(-2, 1)$ och radie 1. I $\mathbb{R}^3$ motsvaras ekvationen av en cylinder som är parallell med z -axeln.

Skärningspunkten mellan två tvådimensionella ytor i $\mathbb{R}^3$ utgör i allmänhet en endimensionell kurva i $\mathbb{R}^3$ (vi återkommer till kurvor i kapitel 11 i kursboken).

Exempel 6. Vilka punkter (x, y, z) löser ekvationssystemet $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$? Ekvationen $x^2 + y^2 = 4$ motsvarar en cylinder, och ekvationen $z = 2$ ett plan. Snittet av dessa mängder är en cirkel med radien 2 och med mittpunkten i $(0, 0, 2)$, i planet $z = 2$.

Funktioner av flera variabler

Låt D vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. En funktion av n variabler tilldelar till varje element $(x_1, \dots, x_n) \in D$ en punkt $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Fallet $n = 1$ har vi studerat i kursen envariabelanalys. För $n = 1$ kan funktioner beskrivas geometriskt med grafer. För $n = 2$ och $n = 3$, som vi främst kommer behandla i denna kurs, finns ingen lika bra geometrisk beskrivning av funktioner.

Betrakta fallet $n = 2$, så att f är en funktion av de båda variablerna x och y . Definitionsmängden D ligger i xy -planet och grafen till f är den tredimensionella punktmängden $\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$. Grafen till f bildar en yta i rummet uppspänd rakt *ovanför* (eller *under*, eller *delvis si och delvis så* om det finns nollställen) definitionsmängden D .

Om funktionen har en symmetri av något slag blir det enklare att rita grafen till denna. Ett exempel är radiell symmetri:

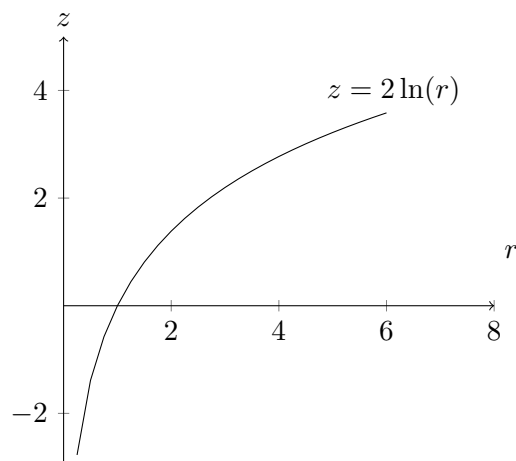
Exempel 7. Skissa grafen till funktionen

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad 0 < x^2 + y^2 \leq 4.$$

I xy -planet ges avståndet r till origo av $r^2 = x^2 + y^2$, så funktionen kan skrivas

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2) \\ &= \ln(r^2) \\ &= 2 \ln(r), \quad r \in (0, 2]. \end{aligned}$$

Så vi får grafen till f genom att rotera grafen till $z = 2 \ln(r)$ kring z -axeln.



Det kan vara svårt att rita ytor i 3D på ett bra sätt. Ett alternativ kan då vara att rita de så kallade *nivåkurvorna* $f(x, y) = c$ i xy -planet för olika värden på konstanten c .

Den resulterande figuren liknar en topografisk karta (höjdkurvor) över funktionen. Jämför även väderkartornas isotermer och isobarer.

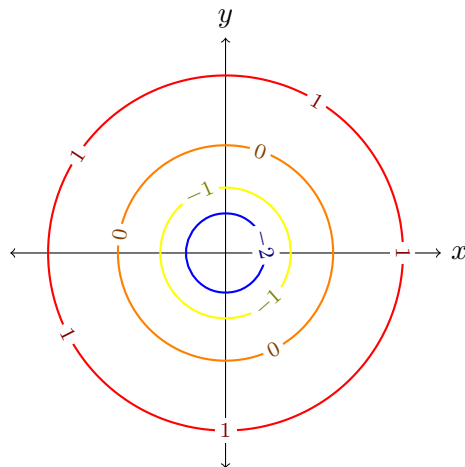
Exempel 8. Skissa nivåkurvorna till funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ för $c = \{-2, -1, 0, 1\}$.

Den radiella symmetrin gör att nivåkurvorna måste vara koncentriska cirklar. Nivåkurvan för $c = 0$ blir enhetscirkeln. $c = 1$ ger

$$\begin{aligned} 1 &= \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = e \\ &\Rightarrow \text{cirkel med radie } \sqrt{e} \approx 1.65 \end{aligned}$$

$c = -1$ och $c = -2$ ger slutligen

$$x^2 + y^2 = e^{-1} \text{ respektive } x^2 + y^2 = e^{-2}$$



Om avståndet mellan c -värdena är konstant, som i detta exempel, så betyder glesa nivåkurvor att funktionen förändras sakta och täta nivåkurvor att funktionen förändras snabbt, i analogi med höjdkurvor på en karta.

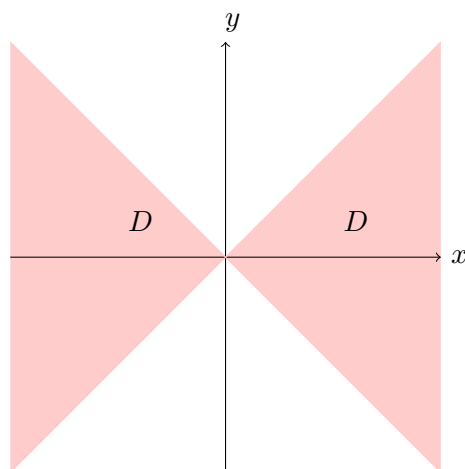
Om inget annat anges är definitionsmängden D till en funktion f av n variabler det största mängd i $\mathbb{R}^n$ för vilken $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är väldefinierat för alla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Exempel 9. Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x-y}$.

f är definierad då $\frac{x+y}{x-y} > 0$. Beroende på om $x-y > 0$ eller om $x-y < 0$ får vi två olika fall:

$$\begin{aligned} x-y > 0 : \quad & \frac{x+y}{x-y} > 0 \\ \Rightarrow x+y > 0 & \Rightarrow -x < y < x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y < 0 : \quad & \frac{x+y}{x-y} > 0 \\ \Rightarrow x+y < 0 & \Rightarrow x < y < -x \end{aligned}$$



Olikheten i första fallet är rimlig när $x > 0$ och olikheten i andra fallet är rimlig när $x < 0$.

Betrakta nu fallet $n = 3$. Grafen består då av en fyrdimensionell punktmängd som vi inte kan visualisera. Vi får i allmänhet nöja oss med att hitta eventuella symmetrier och skissa funktionens *nivåtor* $f(x, y, z) = c$.

Exempel 10. Nivåytorna till funktionen $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ är koncentriska ellipsoider med centrum i origo.

Föreläsning 2: Mängder i $\mathbb{R}^n$; andragsytor; polära, cylindriska och sfäriska koordinater

Cylindriska och sfäriska (rymdspolära) koordinater

Kvadratiske ekvationer i $\mathbb{R}^3$ kan ge upphov till cylindrar och sfärer. Om ett problem i $\mathbb{R}^3$ har en sådan geometri är det, som vi ska se, ofta praktiskt att byta koordinatsystem från de vanliga kartesiske koordinaterna till cylindriska eller sfäriska koordinater.

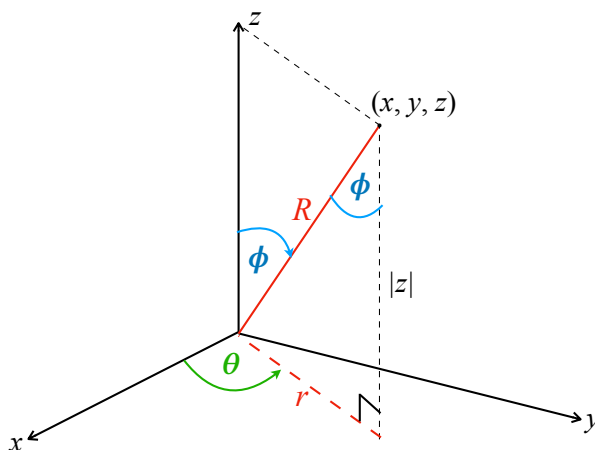
Cylindriska koordinater fås genom att x - och y -koordinaterna byts mot polära koordinater, medan z -koordinaten är oförändrad. Relationen mellan (x, y, z) och $[r, \theta, z]$ blir:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z$$

Cylindriska koordinater lämpas väl till problem som har axiell symmetri. Notera att r är avståndet från punkten P till z -axeln, och inte till origo.

Vid radiell symmetri är **sfäriska (rymdspolära)** koordinater att föredra. Variabeln R motsvarar avståndet till origo ($R \geq 0$), variabeln θ är vinkeln mellan den positiva x -axeln och projektionen av punkten på xy -planet ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), och variabeln ϕ är vinkeln mot positiva z -axeln ($0 \leq \phi \leq \pi$). Relationen mellan kartesiska och sfäriska koordinater ges av:

$$x = R \sin(\phi) \cos(\theta), \quad y = R \sin(\phi) \sin(\theta), \quad z = R \cos(\phi)$$



Figur 3: Rymdspolära / sfäriska koordinater i $\mathbb{R}^3$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

I kartesiska koordinater motsvarar ekvationerna $x = a$, $y = b$, $z = c$ plan i rummet. I cylindriska koordinater motsvarar $r = a$ ett cylindriskt skal med radie a som är parallellt med z -axeln och $\theta = b$ motsvarar ett halvt plan som är ortogonalt med xy -planet. I sfäriska koordinater motsvarar $R = a$ ett sfäriskt skal med radie a , $\phi = b$ motsvarar en cirkulär kon kring z -axeln och $\theta = c$ har samma tolkning som för cylindriska koordinater.

Liknande koordinatbyten kan göras även för $\mathbb{R}^n$, $n > 3$ (**OBS: överkurs**), men är förstås svårare att visualisera sig. Låt exempelvis $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ och låt $[R', \phi', \theta']$ vara de sfäriska koordinaterna för tre dimensioner. Då gäller $w = R \cos(\phi)$, $R' = R \sin(\phi)$, och relationen mellan kartesiska och sfäriska (fyrdimensionella) koordinater blir:

$$\begin{aligned} x &= R \sin(\phi) \sin(\phi') \cos(\theta'), & y &= R \sin(\phi) \sin(\phi') \sin(\theta'), \\ z &= R \sin(\phi) \cos(\phi'), & w &= R \cos(\phi) \end{aligned}$$

Andragradskurvor och andragradsytor

En allmän andragradsekvation i variablerna x och y kan skrivas

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

I undantagsfall kan detta uttryck faktoriseras till produkten

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

varvid lösningarna ges av två räta linjer. I alla andra fall får vi en så kallad *kvadratisk kurva* eller *kägelsnitt* som kommer att vara krökt. Det finns fyra olika typer av andragradskurvor. En irreducibel andragradsekvation i variablerna x och y motsvarar någon av följande fyra typer av kurvor: **cirkel**, **ellips**, **hyperbel** och **parabel**. Se bilderna på slutet av anteckningarna.

En allmän andragradsekvation i variablerna x , y och z kan skrivas

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

I undantagsfall kan detta uttryck faktoriseras till produkten

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

varvid lösningarna ges av två plan. I alla andra fall får vi en så kallad *kvadratisk yta* som kommer att vara krökt. Det finns sex olika typer av kvadratiske ytor. En irreducibel andragradsekvation i variablerna x , y och z motsvarar någon av följande sex typer av krökta ytor:

1. **Sfär.** Ekvationen för en sfär med centrum i punkten (x_0, y_0, z_0) och radie r är

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Jämför med cirkelns ekvation och avståndsformeln i $\mathbb{R}^3$.

2. **Cylinder.** Ekvationen för en cylinder parallell med z -axeln ges av

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Analogt är $(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ en cylinder som är parallell med y -axeln osv. Ovanstående cylindrar är cirkulära eftersom tvärsnittet är en cirkel. Men en cylinder kan också vara elliptisk, parabolisk eller hyperbolisk om tvärsnittet är en ellips, parabel eller hyperbel. Exempelvis är cylindern $y = x^2/2$ parabolisk och parallell med z -axeln.

3. **Kon.** Punkterna (x, y, z) på en kon parallell med z -axeln uppfyller att z -koordinaten är proportionell mot radien $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dvs. $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ eller med andra ord

$$z^2 = c^2(x^2 + y^2).$$

Konstanten c ger ett mått på hur snäv konen är. Ovanstående kon är cirkulär, men precis som cylindrar kan koner även vara elliptiska. Motsvarande ekvation för en elliptisk kon är

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Om minustecknet placeras framför någon av de andra variablerna får vi en kon parallell med motsvarande axel.

4. **Paraboloid.** En elliptisk paraboloid kring z -axeln har ekvationen

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

och en hyperbolisk paraboloid kring z -axeln har ekvationen

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

5. **Hyperboloid (2 typer).** En hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

är antingen **en- eller tvåmantlad** och har ett elliptiskt tvärsnitt i ett koordinatplan och ett hyperboliskt tvärsnitt i ett annat koordinatplan.

Se bilderna på slutet av anteckningarna. De kommer att vara mycket nyttiga som stöd till Lektion 1.

Kvadratiske former

Ett kvadratisk uttryck i x , y och z kan alltid kvadratkompletteras så att det inte innehåller några förstagraderstermer. Vi ska nu studera det kvarvarande uttrycket mer i detalj.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Uttrycket i högerledet kallas *den kvadratiske formen* för matrisen $\mathcal{A}$. Vi inför följande begrepp:

Definition 10. $\mathcal{A}$ är *positivt definit* om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x} > 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, *positivt semidefinit* om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x} \geq 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ och *indefinit* om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x}$ antar både positiva och negativa värden.

Förutom att kvadratiske former kan relateras till olika ytor i rummet, så kommer de också vara viktiga vid klassificering av extrempunkter av funktioner av flera variabler. För att avgöra om en matris är positivt definit kan vi kvadratkomplettera motsvarande kvadratiske form.

Exempel 11. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ är positivt definit. Kvadratkomplettering av motsvarande kvadratiske form ger:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy + 4xz + 6yz &= (x + y + 2z)^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz + 2y^2 + 6z^2 + 6yz \\ &= (x + y + 2z)^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz = (x + y + 2z)^2 + (y + z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

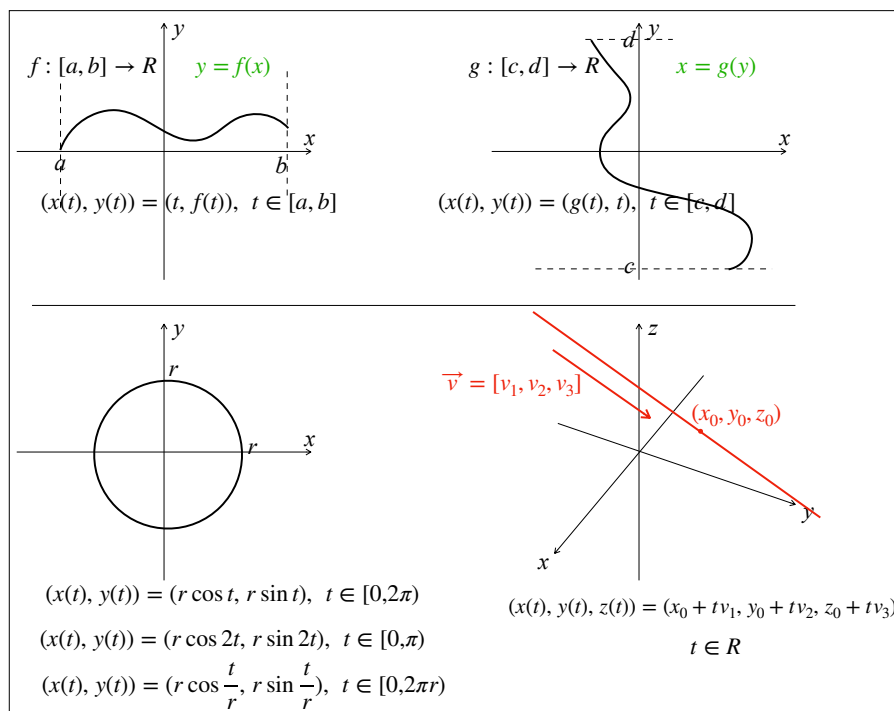
Den kvadratiske formen är positiv för alla nollskilda val av (x, y, z) , så matrisen är positivt definit.

I linjär algebra visas att en matris är positivt definit om alla dess egenvärden (dvs. tal λ som uppfyller $\mathcal{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}$ för något $\vec{x}$) är positiva. Man kan även relatera detta till tecknet på vissa determinanter (Sats 8, Kap 10.7 i kursboken).

Föreläsning 3: Vektorvärda funktioner: parametriska kurvor, båglängd

Vektorvärda funktioner: parametriska kurvor

En vektorvärd funktion av en variabel med värden i $\mathbb{R}^n$, dvs en funktion på formen $t \rightarrow \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ kallas för en *n-dimensionell kurva* i $\mathbb{R}^n$. För $n = 2$ talar man om en plan kurva, och för $n = 3$ om en rymdkurva. Variabeln t kallas *parameter*, och dess definitionsmängd är vanligen ett intervall på den reella axeln. Funktionerna $x_1(t), \dots, x_n(t)$ kallas *komponentsfunktioner*.



Figur 4: Föreläsning 3: Några exempel på parametriska kurvor. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Parametern ger upphov till en riktning i vilken kurvan genomlöps. Som nästa exempel visar, kan en och samma kurva uttryckas med flera olika parameterframställningar (val av funktion och definitionsmängd).

Exempel 12. Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i planet har parameterframställningen $x = a \cos(\theta)$, $y = b \sin(\theta)$ för $\theta \in [0, 2\pi)$ eftersom det då gäller att:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{a^2 \cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2(\theta)}{b^2} \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \end{aligned}$$

Om $a = b = r$ får vi en cirkel. På samma sätt inses att cirkeln $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ har parameterframställningen $x = \frac{1}{2}(1 + \cos(\theta))$, $y = \frac{1}{2} \sin(\theta)$ för $\theta \in [0, 2\pi)$.

Exempel 13. Avgör vilken kurva som har parameterframställningen

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad y = \frac{t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi eliminerar parametern t . Division av ekvationerna för x och y ger:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 + y^2 = x \Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Detta är samma kurva som i exemplet innan. Observera dock att origo inte kommer med om vi använder den andra parametriseringen. Positiva värden på t ger övre halvan av kurvan och negativa värden på t ger undre halvan av kurvan.

De plana kurvorna ovan kunde beskrivas med en ekvation i x och y . För att beskriva en rymd-kurva i parameterfri form krävs ett ekvationssystem med två ekvationer i x , y och z (varje ekvation motsvarar en yta i rummet).

Exempel 14. Parametrisera skärningskurvan mellan ytorna

$$z + \sqrt{1-x^2-y^2} = 0 \quad \text{och} \quad x + y = 1.$$

Kurvan $z + \sqrt{1-x^2-y^2} = 0$ är undre halvan av enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (den del som ligger under xy -planet). Ekvationen $x + y = 1$ motsvarar ett plan. Vi sätter $x = t$ ($y = t$ fungerar lika bra) och får:

$$\begin{aligned} y = 1 - x = 1 - t, \quad z &= -\sqrt{1-x^2-y^2} = -\sqrt{1-t^2-(1-t)^2} \\ &= -\sqrt{1-t^2-(1-2t+t^2)} = -\sqrt{2t-2t^2} \end{aligned}$$

Rotuttrycket är definierat då $2t(1-t) \geq 0$, vilket inträffar då både t och $(1-t)$ är positiva (de kan inte båda vara negativa), dvs. då $t \in [0, 1]$. En parameterframställning är alltså $\vec{x}(t) = (t, 1-t, -\sqrt{2t(1-t)})$, $t \in [0, 1]$.

Följande metod hjälper ofta hitta en parametrisering av skärningskurvan (γ) mellan två ytor. Metoden fungerar fint om en yta är plan och en kvadratisk som t.ex. i den rekommenderade uppgiften Adams 11.3-9 eller som i exemplet nedan. Metoden innehåller följande steg, vilket vi sedan illustrerar på ett konkret exempel:

1. **Eliminera** variabeln z i en av ekvationerna (ibland blir det bättre att eliminera en annan variabel). Då reducerar man problemet till två variabler. Ekvationen i variablerna x och y beskriver **projektion** av kurvan γ på xy -planet. Kalla projektionen γ_p .
2. **Parametrisera** den platta kurvan γ_p , alltså hitta funktioner $x(t)$ och $y(t)$ sådana att punkterna $(x(t), y(t))$ genomlöper hela kurvan γ_p för $t_0 \leq t \leq t_1$.
3. **Uttryck** z som en funktion av $x(t)$ och $y(t)$ m.h.a. de givna ekvationerna. På det sättet får vi $z = z(t)$ och följande:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

ger oss en parametrisering av kurvan γ .

Exempel 15. Tillämpa steg för steg metoden ovan för att parametrisera skärningskurvan mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $x + z = 2$.

1. **Eliminera** z : $z = 2 - x$ från planets ekvation. Insättning i paraboloidens ekvation ger $2 - x = x^2 + y^2$. Kvadratkoppletteringen låter oss identifiera kurvan:

$$2 - x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 = \frac{8}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

Vi känner igen kurvan γ_p som cirkeln med mittpunkten i $(-\frac{1}{2}, 0)$ och radien $\frac{3}{2}$.

2. **Parametrisera** den platta kurvan γ_p : Den vanligaste parametriseringen för γ_p är

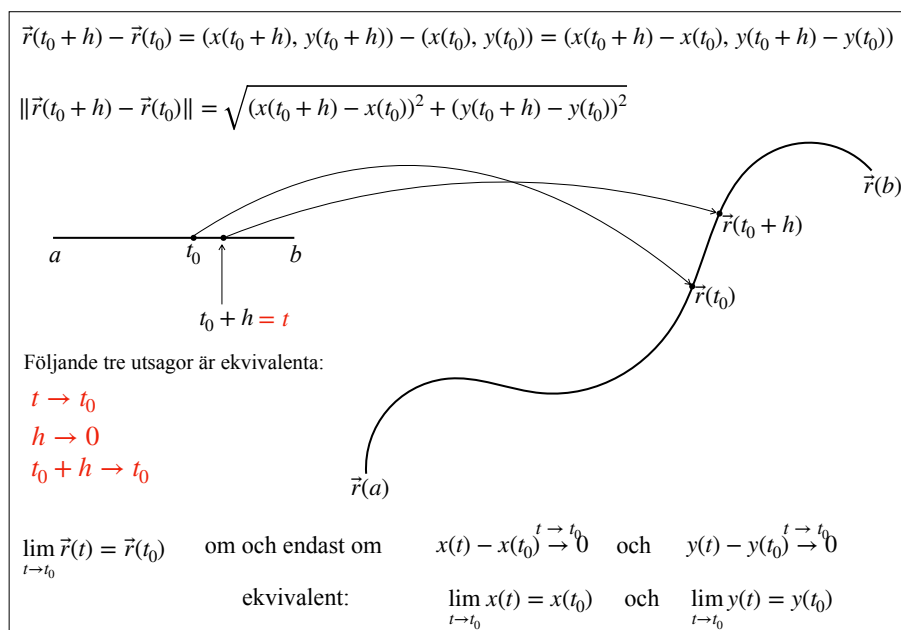
$$x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos t, \quad y(t) = \frac{3}{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. **Uttryck** z som en funktion av $x(t)$ och $y(t)$ m.h.a. de givna ekvationerna:

$$z(t) = 2 - x(t) = 2 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos t\right) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos t.$$

Vår parametrisering av kurvan γ är alltså följande:

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos t, \frac{3}{2} \sin t, \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos t\right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



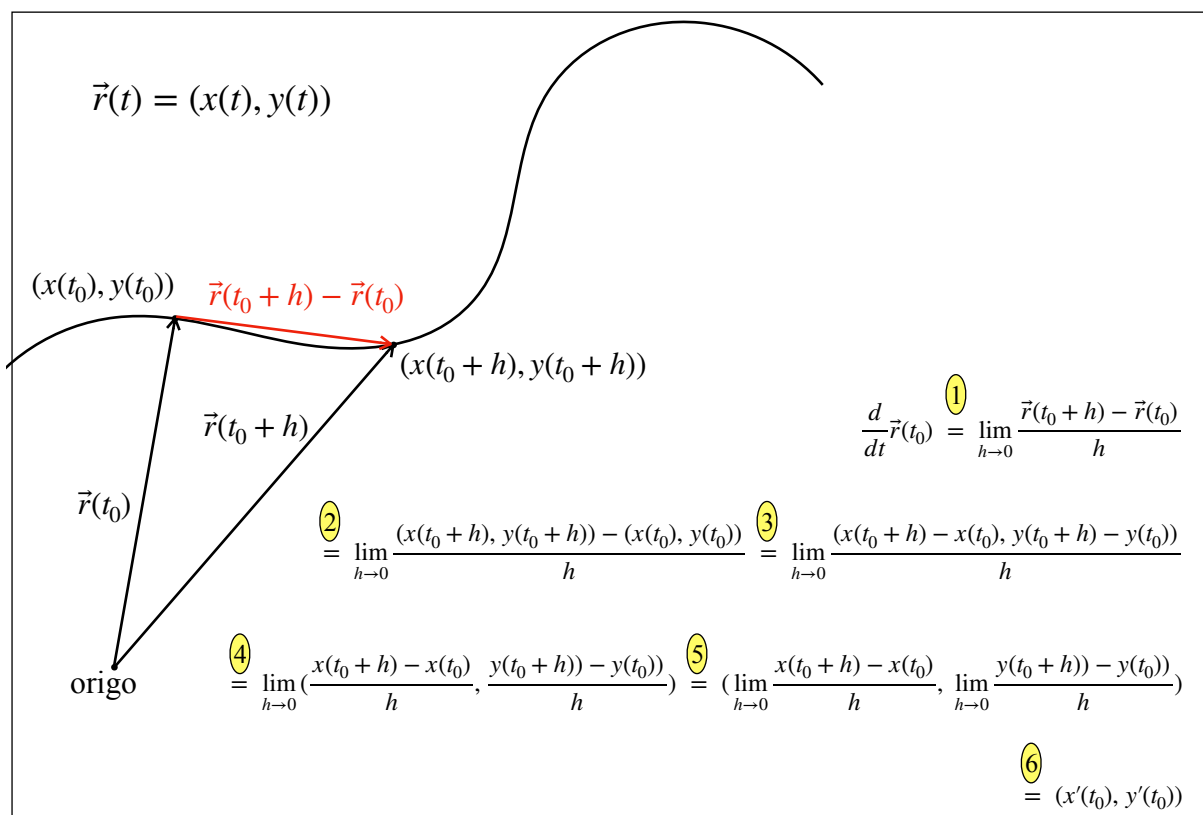
Figur 5: Föreläsning 3: En förklaring varför gränsvärde och kontinuitet för vektorvärda funktioner undersöks komponentsvis. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Om parametern t får beteckna tiden, så kan $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tolkas som *läget* hos en partikel vid tiden t . Gränsvärde och kontinuitet för vektorvärda funktioner är komponentvis. Se mer förklaring i bilden.

Om komponentsfunktionerna $x(t), y(t), z(t)$ alla är deriverbara så kan vi definiera vektorn

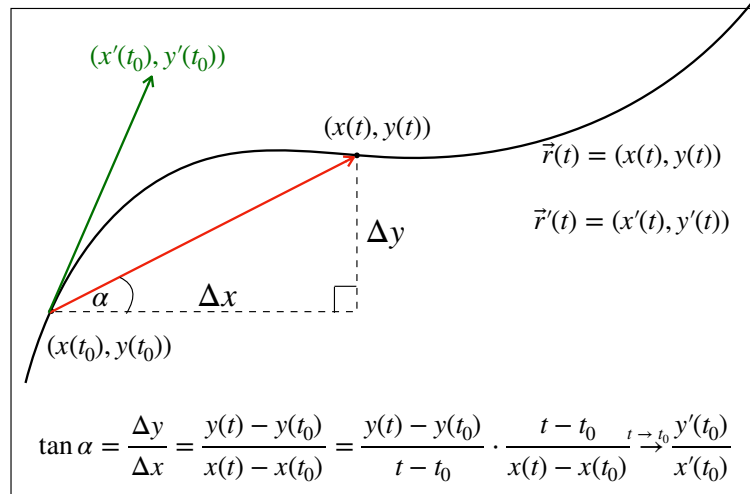
$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Vi kallar $\vec{r}'(t)$ *tangentvektorn* till kurvan i punkten $\vec{r}(t)$. Om $\vec{r}(t)$ tolkas som partikelns läge så kan $\vec{r}'(t)$ tolkas som partikelns *hastighet* och $|\vec{r}'(t)|$ som dess *fart* vid tiden t . Vidare kan $\vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ tolkas som partikelns *acceleration* vid tiden t . Se mer förklaring i bilderna som följer.



Figur 6: Föreläsning 3: En förklaring varför derivering av vektorvärda funktioner sker komponentvis: 1. definition av derivatan $\vec{r}'(t)$, 2. insättning av komponentsfunktioner $x(t)$ och $y(t)$, 3. vektor-addition / -subtraktion sker komponentvis, 4. skalning av vektorer sker komponentvis, 5. gränsvärdet räknas komponentvis, 6. derivatans definition för funktioner $x(t)$ och $y(t)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Precis som för vektorer kan vi definiera skalär- och vektorprodukt för vektorvärda funktioner. Följande sats, som är en enkel följd av räkneregler för derivatan av skalärvärda funktioner av en variabel, ger en produktregel för skalär- och vektorprodukter samt för en (variabel) skalning. Observera att alla tre produktregler har identisk konstruktion.



Figur 7: Föreläsning 3: En förklaring varför hastighetsvektorn $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ är tangent till kurvan i punkten $(x(t_0), y(t_0))$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Sats 3. (Theorem 1 i Adams 11.1) Låt $\vec{u}(t)$ och $\vec{v}(t)$ vara två vektorvärda funktioner i en variabel och låt $\lambda(t)$ vara en skalärvärd funktion. Då gäller:

1. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$ (derivatan av en summa är summan av derivator)
2. $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{u}(t)) = \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t)$ (produktregeln 1: för en variabel skalning)
3. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$ (produktregeln 2: för skalärprodukt)
4. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$ (produktregeln 3: för kryssprodukt)
5. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\vec{u}'(\lambda(t))$ (kedjeregeln; tänk här på $\lambda(t)$ som ett variabelbyte).

Observera att sista formeln visar att tangentvektorns riktning är oberoende av val av parameterframställning. (Satsen bevisas m.h.a. respektive regler för envariabelfunktioner, med egenskaper av operationer på vektorer, och allt görs komponentsvis.)

Exempel 16. Låt $\vec{r}(t)$ vara läget på en partikel vid tiden t . Visa att om kraften på partikeln är parallell med $\vec{r}(t)$, så är $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ konstant.

Enligt Newtons andra lag så gäller sambandet $\vec{F}(t) = m\vec{r}''(t)$ mellan en kropps acceleration $\vec{r}''(t)$ och kraften $\vec{F}(t)$ som verkar på kroppen. I detta fall gäller därmed

$$\vec{r}''(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(t) = \frac{k}{m}\vec{r}(t)$$

för någon konstant k . Vi undersöker derivatan av $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)) = \vec{r}''(t) \times \vec{r}(t) + \underbrace{\vec{r}'(t) \times \vec{r}'(t)}_{=\vec{0}} = \frac{k}{m} \underbrace{\vec{r}(t) \times \vec{r}(t)}_{=\vec{0}} = \vec{0}.$$

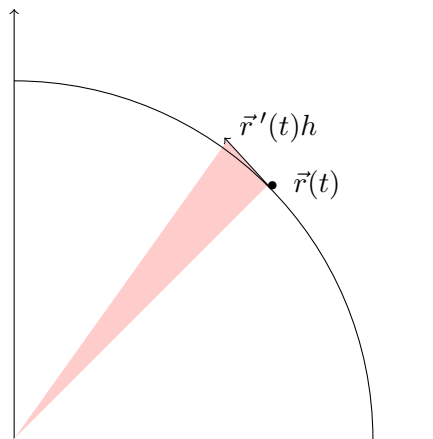
Derivatan av $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är alltså noll, vilket implicerar att funktionen $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ måste vara konstant.

Situationen i exemplet gäller för planeterna i solsystemet om vi väljer att låta solen ligga i origo. Betrakta nu ett kort tidsintervall h . Arean av den skuggade triangeln i figuren är, enligt den geometriska tolkningen av vektorprodukten, lika med

$$\frac{1}{2}|(\vec{r}'(t)h) \times \vec{r}(t)| = \frac{h}{2}|\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)|.$$

Vi visade i exemplet att vektorn $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är konstant. Arean som översveps av en planet i solsystemet per tidsenhet är därför

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} |(\vec{r}'(t)h) \times \vec{r}(t)| &= \frac{1}{2} |\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)| \\ &= \text{konstant}. \end{aligned}$$



Detta är Keplers andra lag för planetbanorna i solsystemet. Den härleddes empiriskt från planetobservationer i början av 1600-talet. Vektorn $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är en konstant vektor som hela tiden är vinkelrät mot $\vec{r}(t)$. Detta innebär att $\vec{r}(t)$ måste ligga i ett och samma plan. Detta är också en följd av Keplers andra lag som säger att planetbanorna är elliptiska. Att elliptiska banor uppfyller villkoret i exemplet ovan ges av:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (a \cos(kt), b \sin(kt)), & \vec{r}'(t) &= (-ak \sin(kt), bk \cos(kt)) \\ \vec{r}''(t) &= (-ak^2 \cos(kt), -bk^2 \sin(kt)) = -k^2 \vec{r}(t). \end{aligned}$$

Båglängd av en kurva

Låt nu $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, vara en två- eller tredimensionell kurva, vars komponenter är deriverbara funktioner. Vi ska bestämma längden av kurvan. Precis som när vi bestämde båglängden av en funktionsgraf, så delar vi in parameterintervallet i n stycken delintervall: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. På varje delintervall $[t_{i-1}, t_i]$ kan kurvan approximeras av $|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$, så kurvans längd är minst:

$$s_n = \sum_{i=1}^n |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

s_n är en Riemannsumma som under vissa villkor på kurvan konvergerar mot integralen $\int_a^b \left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| dt$.

Låt nu $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Då gäller

$$\left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| = |(x'(t), y'(t), z'(t))| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2},$$

Så båglängden av av kurva ges av

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Exempel 17. Bestäm längden av kurvan $\vec{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), \frac{2}{3}t^{3/2})$, $t \in [0, 2\pi]$. Kurvan är en spiral kring z -axeln som sträcks ut allt mer. Dess längd ges av:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2 \sin(t))^2 + (2 \cos(t))^2 + (t^{1/2})^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + t} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} (4 + t)^{3/2} \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{3} ((4 + 2\pi)^{3/2} - 8). \end{aligned}$$

Längden av en kurva mellan två punkter är oberoende av val av parametrisering. Ibland kan det vara praktiskt att välja båglängden som parameter för kurvan, dvs. $\vec{r}(s)$. Sådan parametrisering kallas **båglängdparametrisering**. För att byta parameter från den ursprungliga parametern t till båglängden s utnyttjar vi formeln för båglängden $s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau$, ur vilken vi kan lösa ut t som funktion av s och sätta $\vec{r}(t(s))$.

En fördel med att ha båglängden som parameter är att:

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|} \Rightarrow \frac{d}{ds} \vec{r}(t(s)) = \vec{r}'(t) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t(s))|}$$

vilket innebär att tangentvektorn alltid är en enhetsvektor.

Det enklaste exemplet som man inte behöver avancerade teorier för är följande parametrisering av enhetscirkeln med mittpunkten i origo och radien 1. Ett exempel på en båglängdparametrisering är

$$\vec{r}: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ s.a. } \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Längden för hela kurvan är lika med 2π och den är lika med längden för parametriseringsintervallet. Dessutom är båglängden mellan punkterna $\vec{r}(0) = (1, 0)$ och $\vec{r}(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ lika med α radianer. Dessutom är farten, alltså längden till hastighetsvektorn, i varje punkt lika med 1, vilket vi får när vi använder triggettan:

$$\|\vec{r}'(t)\| = \|(x'(t), y'(t))\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Parametriseringen $\vec{r}: [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ sådan att $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ är däremot inte en båglängdparametrisering. Tänk att man här genomlöper cirkeln två gånger snabbare än i förra exemplet. Farten är då lika med 2 i varje punkt (kedjeregeln!) och bågen mellan startpunkten och en godtycklig punkt på kurvan är två gånger längre än parametriseringsintervallet mellan 0 och parametern för slutpunkten på bågen.

Exempel 18. Kurvan γ kan på parameterform skrivas som

$$\vec{r}(t) = (\ln(1 + t^2), \ln(1 + t^{-2}), \sqrt{8} \arctan(t)), \quad t \in [1, T]$$

där T är en konstant som är större än 1. Båglängdparametrisera kurvan γ .

Lösning: vi behöver beräkna hastigheten och farten. Hastigheten fås genom att derivera komponent efter komponent:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \frac{d}{dt}(\ln(1+t^2), \ln(1+t^{-2}), \sqrt{8}\arctan(t)) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, -\frac{2t^{-3}}{1+t^{-2}}, \frac{\sqrt{8}}{1+t^2} \right) \\ &= \left(\frac{2t}{1+t^2}, -\frac{2t^{-1}}{t^2+1}, \frac{\sqrt{8}}{1+t^2} \right)\end{aligned}$$

och farten är längden av hastighetsvektorn:

$$\|\vec{r}'(t)\|^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 + \left(-\frac{2t^{-1}}{t^2+1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8}}{1+t^2} \right)^2 = \frac{4t^2 + 4t^{-2} + 8}{(1+t^2)^2} = 4t^{-2} \cdot \frac{t^4 + 1 + 2t^2}{1 + 2t^2 + t^4} = 4t^{-2}.$$

Eftersom $t > 0$, får vi $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\|\vec{r}'(t)\|^2} = 2t^{-1}$ och därför $s(t) = \int_1^t 2\tau^{-1}d\tau = 2\ln(t)$ så att $t = e^{s/2}$. Vidare, $t = 1$ motsvarar $s = 0$ och $t = T$ motsvarar $s = 2\ln(T)$. Svaret är alltså att båglängdsparametriseringen för kurvan är

$$\vec{r}(s) = (\ln(1+e^s), \ln(1+e^{-s}), \sqrt{8}\arctan(e^{s/2})), \quad s \in [0, 2\ln(T)].$$

Föreläsning 4: Funktioner av flera variabler: gränsvärdet och kontinuitet

Gränsvärden och kontinuitet

Vi ska nu definiera gränsvärden för vektorvärda funktioner och funktioner av flera variabler. Alla dessa funktioner kan generellt skrivas som en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ för några positiva heltal n och p .

Till varje punkt $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ ordnar funktionen $\vec{f}$ ett element $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^p$. $\vec{f}$'s komponenter kan skrivas

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Om $n = 1$, $p > 1$ får vi en vektorvärd funktion av en variabel (kurva, yta). Om $n > 1$, $p = 1$ får vi en funktion av flera variabler. För att kunna ta fram en differential- och integralkalkyl för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ behöver vi en definition av gränsvärde.

Definition 11. Låt $\vec{f}$ vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ med definitionsmängd D och antag att $\vec{a}$ är en inre punkt eller randpunkt till D . Vi säger då att $\vec{f}$ har gränsvärdet $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$ om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{x} - \vec{a}| < \delta \\ \vec{x} \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon$$

Detta skrivs $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ eller $\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{b}$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$.

Man kan fråga sig hur gränsvärdena $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$ och $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x})$ är relaterade. Låt därför $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ och notera att $\vec{y}$ kan skrivas

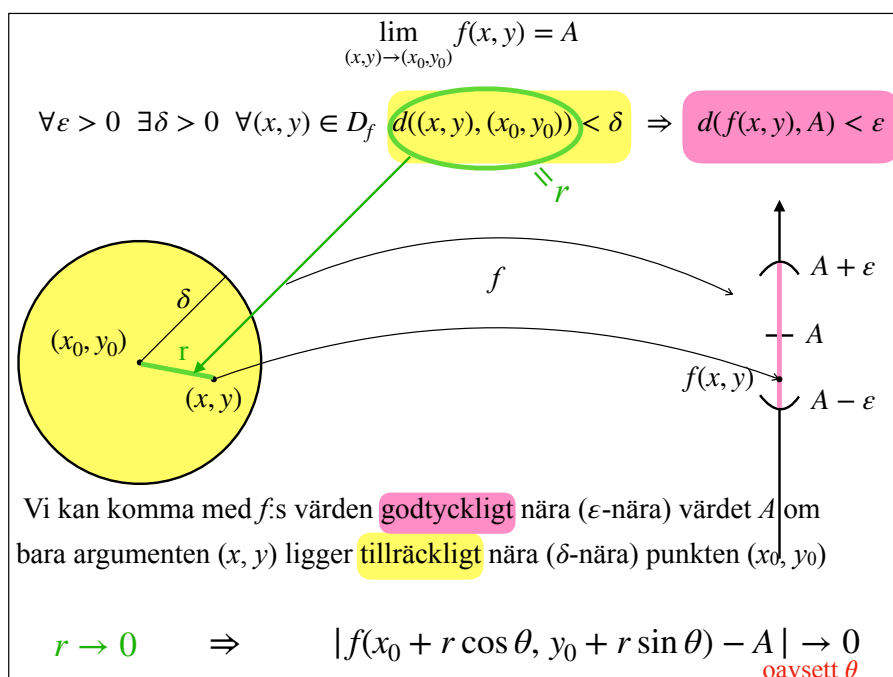
$$\vec{y} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_p e_p \quad \text{för} \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_p = (0, \dots, 0, 1)$$

Triangelolikheten ger $|\vec{y}| = |y_1 e_1 + \dots + y_p e_p| \leq |y_1 e_1| + \dots + |y_p e_p| = |y_1| + \dots + |y_p|$. Samtidigt gäller förstås $|\vec{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2} \geq \sqrt{y_j^2} = |y_j|$ för alla $j \in \{1, \dots, p\}$. Sammanfattningsvis får vi, om vi byter ut $\vec{y}$ mot $\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}$,

$$|f_j(\vec{x}) - b_j| \leq |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| \leq |f_1(\vec{x}) - b_1| + \dots + |f_p(\vec{x}) - b_p|.$$

Detta innebär att $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ precis då $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j$ för alla $j \in \{1, \dots, p\}$.

Gränsvärden för vektorvärda funktioner kan reduceras till gränsvärden av de reellvärda komponenterna. Detta var anledningen till att vi kunde definiera derivatan av en parametriserad kurva genom att derivata kurvans komponenter. Under återstoden av detta kapitel kommer vi därför att arbeta med funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$.



Figur 8: Föreläsning 4: Definition av gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$. Oftast $(x_0, y_0) = (0, 0)$. För trevariabelfunktioner är definitionen samma, fast δ -omgivningar av (x_0, y_0, z_0) är öppna **klot**, inte öppna cirkelskivor. Man har alltså ännu fler vägar mot punkten, inte bara i planet, utan också i rummet från alla håll. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Gränsvärde och kontinuitet för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Man kan enkelt bevisa från definitionen att alla linjära funktioner $f(x, y) = ax + by + c$ är kontinuerliga. Dessutom uppfyller gränsvärden av funktioner av flera variabler samma räkneregler som för funktioner av en variabel, vilket leder till en hel massa nya kontinuerliga funktioner.² Om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = L$ och $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = M$, så gäller:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = L + M, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})g(\vec{x}) = LM, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{a})}{g(\vec{x})} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

Om vi dessutom har en envariabelfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som är kontinuerlig i $t = L$, då:

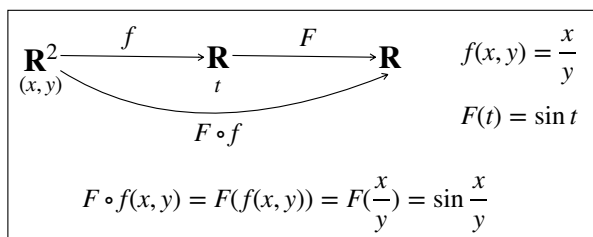
$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(f(\vec{x})) = F(L).$$

Den sista regeln ser kanske mindre självklart ut än de andra, men jag tror att de flesta skulle använda den intuitivt. Här kommer exempel på användning av reglerna ovan, med $f = f(x, y)$. Man kan förstås tillämpa dessa regler bara om uttrycket är bestämt, för bara i sådana fall kan man köra insättning:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (4x + 2y + x^2) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2^2 = 8 + 6 + 4 = 18.$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (5,2)} x^2 y^3 = 5^2 \cdot 2^3 = 25 \cdot 8 = 200.$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{x+2y}{x^2-y} = \frac{3+2 \cdot 2}{3^2-2} = \frac{7}{7} = 1.$

²M.h.a. reglerna 1–4 visar man enkelt att bl.a. polynomfunktioner, rationella funktioner och en hel del andra är kontinuerliga; man ska bara akta sig för obestämda uttryck, men vi lär oss strax hur man kan hantera dessa.

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,6)} \sin \frac{x}{y} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Här är $F(t) = \sin t$ och $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Funktionen F är definierad för alla reella tal, och funktionen f är definierad överallt utanför x -axeln, ty där $y = 0$. $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,6)} \frac{x}{y} = \frac{\pi}{6}$. Bilden illustrerar hur sammansättningen fungerar.



Figur 9: Föreläsning 4: Illustrationen för exemplet för regeln $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(f(\vec{x})) = F(L)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

För funktioner av en variabel skilde vi på vänster- och högergränsvärden beroende på från vilket håll som vi närmade oss den punkt i vilken vi ville veta gränsvärdet. Om vänster- och högergränsvärdena sammanföll, så var de lika med gränsvärdet i punkten. För funktioner av flera variabler kan vi närma oss en viss punkt längs oändligt många kurvor. Vi kan rimligen inte bestämma gränsvärdet längs var och en av dessa kurvor och kan inte bestämma gränsvärden med denna metod. Vi inleder med ett par exempel:

För att visa att ett gränsvärde $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$ inte existerar räcker det att hitta två olika, väl valda kurvor som går mot $\vec{a}$ och för vilka $f(\vec{x})$ närmar sig olika värden.

Exempel 19. Visa att gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ inte existerar.

Vi provar med de båda räta linjerna $(x, y) = (t, 0)$ respektive $(x, y) = (t, t)$.

$$\text{Den första ger: } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0 \quad \text{och den andra ger } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$$

Gränsvärdena är olika, så gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ kan inte existera. Se illustrationen (på nästa sida) för ett likadant exempel, där $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, som diskuteras hos Travis (Playlist *Calculus 3*, Topic 10, minuterna 12:30–19:55).

Vi tar ett ännu knepigare exempel.

Exempel 20. Visa att gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2}$ inte existerar.

Vi provar med alla räta linjer $(x, y) = (t, kt)$ respektive $(x, y) = (0, t)$. Dessa ger:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (kt)^2}{(t^4 + (kt)^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k^2 t^6}{(t^4 + k^2 t^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k^2 t^2}{(t^2 + k^2)^2} = 0, \quad k \neq 0$$

För $(x, y) = (0, t)$ och $(x, y) = (t, 0)$ är funktionerna identiskt lika med noll. Gränsvärdet är noll längs alla räta linjer. Längs parabeln $(x, y) = (t, t^2)$ får vi dock gränsvärdet:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (t^2)^2}{(t^4 + (t^2)^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^8}{(2t^4)^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{så gränsvärdet existerar ej.}$$

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = ?$$

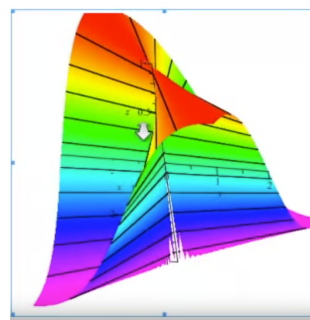
Vi närmar oss origo längs olika vägar och får olika resultat:

längs x -axeln: $\lim_{(t,0) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \cdot t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = \lim_{(t,0) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{t^2} = 0$

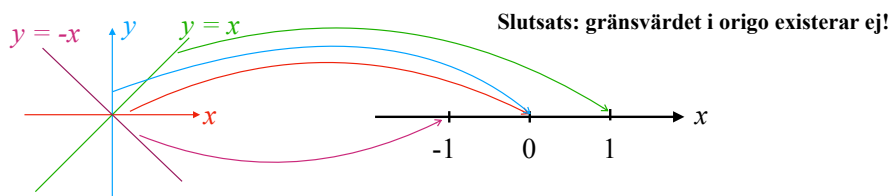
längs y -axeln: $\lim_{(0,t) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \cdot 0 \cdot t}{0^2 + t^2} = \lim_{(0,t) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{t^2} = 0$

längs diagonalen $y = x$: $\lim_{(t,t) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \cdot t \cdot t}{t^2 + t^2} = \lim_{(t,t) \rightarrow (0,0)} \frac{2t^2}{2t^2} = 1$

längs diagonalen $y = -x$: $\lim_{(t,-t) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \cdot t \cdot (-t)}{t^2 + (-t)^2} = \lim_{(t,-t) \rightarrow (0,0)} \frac{-2t^2}{2t^2} = -1$



Travis Playlist 3 Topic 10
minuterna 12:30—19:55



Figur 10: Föreläsning 4: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ existerar ej. (Bild: Hania, med KeyNote.)

I fallen då man får samma gränsvärde längs olika linjer kan man misstänka att gränsvärdet existerar. För att bevisa att det är fallet, använder man polärt koordinatbyte och man visar att om avståndet mellan origo (eller en annan punkt där man undersöker gränsvärdet, men oftast är det origo) och punkter som närmar sig origo går mot noll, då går även avståndet mellan värdena i dessa punkter och det tilltänkta gränsvärdet mot noll, som i följande exempel.

Exempel 21. Visa att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} = 0$.

Vi provar med alla räta linjer $(x, y) = (t, kt)$ respektive $(x, y) = (0, t)$ och $(x, y) = (t, 0)$ och kommer i varje fall till gränsvärdet 0. Det är dock inget bevis, eftersom det finns ju andra vägar mot origo, inte enbart de rätlinjiga! För att bevisa att gränsvärdet är lika med 0, gör vi polärt koordinatbyte: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ och vi ska bevisa (enligt teorin i bilden på s. 21) att

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{\sqrt{(r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2}} = 0 \quad \text{oavsett } \theta.$$

$$\frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{\sqrt{(r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2}} = \frac{r^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{r \sqrt{(\cos \theta)^2 + 3(\sin \theta)^2}} = \frac{r^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{r \sqrt{1 + 2(\sin \theta)^2}} = \frac{r \cos \theta \cdot \sin \theta}{\sqrt{1 + 2(\sin \theta)^2}}.$$

I näst sista steget har vi använt triggettan i nämnaren. Nu kan vi visa att uttrycket går mot noll då r går mot noll, och detta oavsett θ m.h.a. instängningssatsen. Vi använder också detta att både sinus och cosinus är begränsade med -1 och 1 och att $2(\sin \theta)^2 \geq 0$:

$$0 \leq \frac{|r| \cos \theta \cdot \sin \theta}{\sqrt{1 + 2(\sin \theta)^2}} \leq \frac{r \cdot 1 \cdot 1}{\sqrt{1 + 0}} = r.$$

Instängningssatsen visar nu att uttrycket går mot noll då $r \rightarrow 0$ och detta oavsett θ .

Att visa att ett gränsvärde existerar är ofta ganska svårt. Ibland kan vi dock reducera problemet till ett endimensionellt gränsvärde.

Exempel 22. Avgör om gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ existerar och bestäm det i fallet att det existerar.

När $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ så gäller $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0$. Alltså får vi:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) \underbrace{=}_\text{L'Hôpital} 0$$

Exempel 23. Visa att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy+x^3y^3} = 1$ för $x > 0, y > 0$.

Vi kan skriva

$$\frac{\ln(1+xy)}{xy+x^3y^3} = \frac{\ln(1+xy)}{xy(1+(xy)^2)} = \frac{\ln(1+t)}{t(1+t^2)} \quad (\text{ansätt } t = xy)$$

Vi ser att x och y endast förekommer i kombinationen xy och sätter detta till en ny variabel. När $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ så gäller $t \rightarrow 0$, och

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy+x^3y^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{1+t^2} = 1.$$

Med hjälp av gränsvärdesdefinitionen för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ kan vi nu definiera kontinuitet. (Fallet $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ behandlas komponentsvis).

Definition 12. Låt f vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ med definitionsmängd D . Vi säger att f är *kontinuerlig i punkten* $\vec{a} \in D$ om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$. f är en *kontinuerlig funktion* om f är kontinuerlig i varje punkt $\vec{a} \in D$

Precis som i envariabelanalys, kan man prata om kontinuerliga *utvidgningar* för tvåvariabelfunktioner. Som t.ex. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ som är definierad överallt utom i noll kan utvidgas kontinuerligt till hela $\mathbb{R}$ om vi ansätter $f(0) = 1$, men funktioner med olika höger- och vänstergränsvärden i någon punkt inte kan utvidgas till kontinuerliga funktioner. Funktionerna i två exemplen på s. 22 kan inte utvidgas till kontinuerliga funktioner på hela $\mathbb{R}^2$, medan det är möjligt för funktionerna i två nästa exemplen, genom ansättning $f(0, 0) = 0$. I sista exemplet ovan: $f(0, 0) = 1$.

Från räknereglerna för gränsvärden inses att summan, produkten, och sammansättningen osv. av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig. För kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ finns en motsvarighet till satsen om mellanliggande värden. Motsvarigheten till intervall i $\mathbb{R}^n$ är följande.

Definition 13. En mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ är en *bågvis sammanhängande mängd* om det för varje par $\vec{a}, \vec{b}$ av punkter i D finns en kontinuerlig funktion $\vec{x}$ från $[\alpha, \beta]$ till $\mathbb{R}^n$ som uppfyller $\vec{x}(\alpha) = \vec{a}$, $\vec{x}(\beta) = \vec{b}$ och $\vec{x}(t) \in D \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Sats 4. Om $D \subset \mathbb{R}^n$ är en bågvis sammanhängande mängd och $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ är kontinuerlig så är $f(D)$ en bågvis sammanhängande mängd.

Föreläsning 5: Partiella derivator; tangentplan

Partiella derivator; tangentplan till grafytan $z = f(x, y)$

Ett enkelt sätt att studera en funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ av flera variabler är att undersöka hur varje variabel för sig påverkar funktionen. Vi fixerar därmed alla variabler utom en och betraktar funktionerna:

$$f(x_1, a_2, a_3, \dots, a_n), \quad f(a_1, x_2, a_3, \dots, a_n), \quad \dots, \quad f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$$

Geometriskt innebär detta att vi studerar funktionens beteende längs räta linjer som är parallella med koordinataxlarna. De n funktionerna ovan är vanliga funktioner av en variabel och vi kan definiera deras derivator på vanligt sätt. Låt nedan $\vec{e}_j$ vara den j :te standardbasvektorn.

Definition 14. Låt $\vec{a}$ vara en inre punkt i definitionsmängden D_f till en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_j) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

existerar så säger vi att f är *partiellt deriverbar med avseende på variabeln x_j* i punkten $\vec{a}$.

Gränsvärdet betecknas $f'_j(\vec{a})$ eller $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})$ och kallas den *partiella derivatan med avseende på x_j* i punkten $\vec{a}$.

Om alla partiella derivator $f'_j(\vec{a})$, $j \in \{1, \dots, n\}$, existerar så sägs f vara *partiellt deriverbar* i $\vec{a}$. De partiella derivatorna kan användas för att definiera funktioner f'_j vars funktionsvärde i en punkt $\vec{x}$ ges av den partiella derivatan $f'_j(\vec{x})$.

Vi kommer att syssla mest med partiella derivator för tvåvariabelfunktioner $f(x, y)$, eftersom där kan man diskutera många geometriska aspekter och tolkningar, bl.a. *tangentplan* till grafytan i punkten $(a, b, f(a, b))$. I detta fall kan vi skriva om definitionerna för två partiella derivator på följande sätt. En partiell derivata med avseende på (m.a.p.) x och en m.a.p. y i punkten (a, b) definieras då på följande sätt. Man brukar kalla förändringen i x -ledet för h och förändringen i y -ledet för k :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = g'(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f'_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = h'(b)$$

Observera att dessa är vanliga derivator för envariabelfunktioner $g(x) = f(x, b)$ (i $x = a$) och $h(y) = f(a, y)$ (i $y = b$). Dessa är förstas lutningskoefficienterna för tangentlinjer till kurvor $z = f(x, b)$ i planet $y = b$ (den röda kurvan i bilden) och $z = f(a, y)$ i planet $x = a$ (den gröna kurvan i bilden), båda i punkten $(a, b, f(a, b))$. Ett *tangentplan* (kalla den Π) till grafytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ definieras som planet som går genom denna punkt och som innehåller båda tangentlinjer enligt beskrivningen ovan (den svarta och den vinröda i bilden). Vi kommer att ta fram ekvationen för detta plan.

Planets ekvation på standardform, alltså $Ax + By + Cz + D = 0$, fås genom en normalvektor (A, B, C) till planet och en punkt i planet (som ger värdet för D). I vårt fall får vi en normalvektor till planet Π som kryssprodukten av riktningsvektorerna³ $(1, 0, f'_x(a, b))$ och $(0, 1, f'_y(a, b))$:

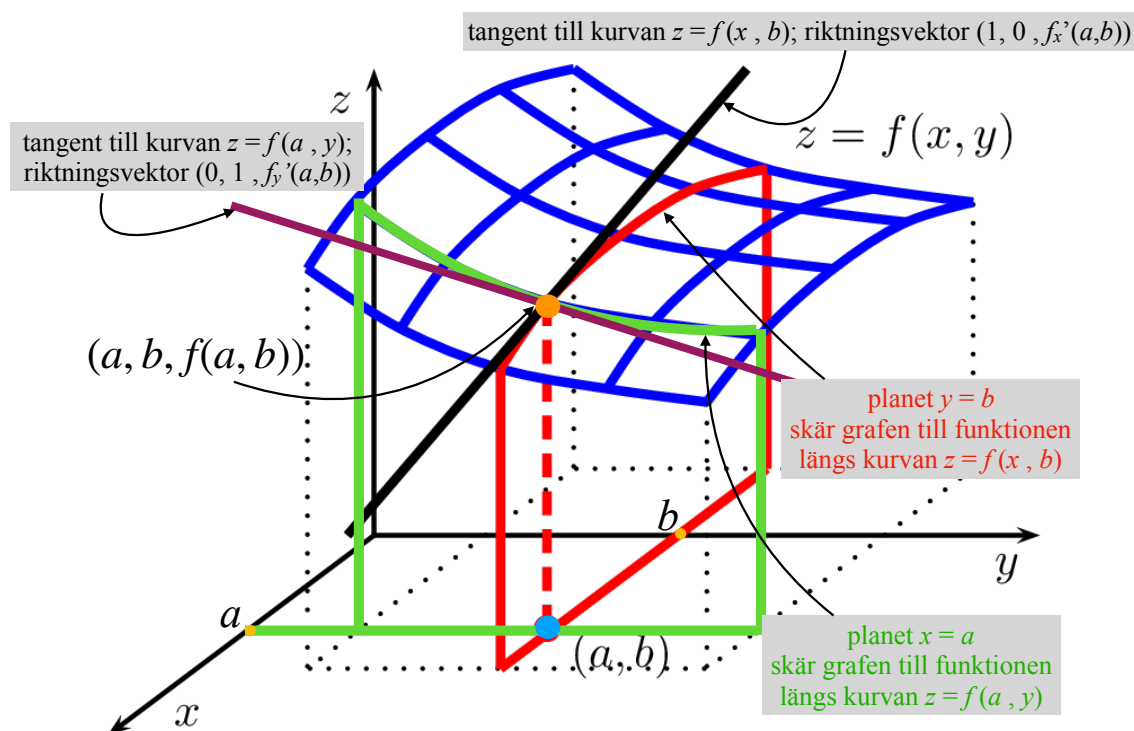
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x(a, b) \\ 0 & 1 & f'_y(a, b) \end{vmatrix} = (-f'_x(a, b), -f'_y(a, b), 1),$$

alltså är vektorerna $\vec{N}_1 = (-f'_x(a, b), -f'_y(a, b), 1)$ och $\vec{N}_2 = (f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1)$ normalvektorer till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $P = (a, b, f(a, b))$: den första pekar uppåt (ty $\Delta z = 1 > 0$) och den andra nedåt (ty $\Delta z = -1 < 0$). Alla punkter $A = (x, y, z)$ i detta plan uppfyller villkoret att $\vec{PA}$ är vinkelrät mot vektorn $\vec{N}_2$, vilket betyder att deras skalärprodukt är lika med noll. Definitionen av skalärprodukt för två vektorer $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ och $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ är $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$, och därför har vi:

$$A \in \Pi \Leftrightarrow \vec{PA} \cdot \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow (x - a, y - b, z - f(a, b)) \cdot (f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1) = 0$$

$$(x - a)f'_x(a, b) + (y - b)f'_y(a, b) - z + f(a, b) = 0 \Leftrightarrow z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

vilket är en standardekvation för tangentplanet Π till grafytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.



Figur 11: Föreläsning 5: Tangentplan till grafytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

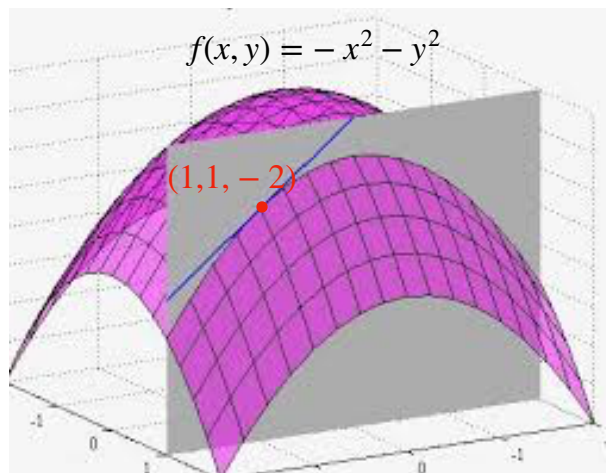
³Varför är just dessa riktningsvektorer? Vektorn $(1, 0, f'_x(a, b))$ ligger i planet $y = b$ där y är konstant, alltså sker det ingen förändring i y ledet: därav $\Delta y = 0$ som andra komponenten. Kvoten mellan den tredje och den första komponenterna är lika med derivatan $f'_x(a, b)$, alltså kan man t.ex. ta $\Delta x = 1$ och $\Delta z = f'_x(a, b)$. Samma resonemang förs för riktningsvektorn $(0, 1, f'_y(a, b))$ i planet $x = a$.

Exempel 24. Bestäm en standardekvation för tangentplanet till grafytan till $f(x, y) = -x^2 - y^2$ i punkten $(1, 1, -2)$. Tangentplanets ekvation är

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Vi behöver alla element i ekvationen. Hos oss är $a = 1$ och $b = 1$. Eftersom $f(x, y) = -x^2 - y^2$, är $f(1, 1) = -2$. De partiella derivatorna: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$, alltså $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -2$, vilket ger tangentplanets ekvation

$$z = -2 - 2(x - 1) - 2(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y + z - 2 = 0.$$



Figur 12: Föreläsning 5: Tangentplan till grafytan $z = -x^2 - y^2$ i punkten $(1, 1, -2)$. OBS: planet i bilden är inte tangentplanet! (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vid partiell derivering betraktas alla variabler, utom den man deriverar med avseende på, som konstanter. Partiell derivering är därmed egentligen derivering av en funktion av en variabel, så samma deriveringsregler gäller som för funktioner av en variabel:

Exempel 25. Bestäm $f'_1(x, y)$ och $f'_2(x, y)$ för $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$.

För att bestämma $f'_1(x, y)$ betraktar vi y som en konstant och får:

$$f'_1(x, y) = \frac{1 \cdot (x + y) - 1 \cdot x}{(x + y)^2} = \frac{y}{(x + y)^2}.$$

För att bestämma $f'_2(x, y)$ betraktar vi x som en konstant och får, med omskrivningen $f(x, y) = x(x + y)^{-1}$:

$$f'_2(x, y) = x(-1)(x + y)^{-2}(1) = -\frac{x}{(x + y)^2}.$$

Från ovanstående exempel ser vi att funktionen $f(x, y)$ är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \text{ty} \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(\frac{y}{(x + y)^2} \right) + y \left(-\frac{x}{(x + y)^2} \right) = 0.$$

Man kan faktiskt visa att alla funktioner på formen $f(x, y) = g(\frac{y}{x})$ löser den givna partiella differentialekvationen. Kedjeregeln ger nämligen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= g' \left(\frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2} g' \left(\frac{y}{x} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= g' \left(\frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} g' \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(-\frac{y}{x^2} \right) g' \left(\frac{y}{x} \right) + y \cdot \frac{1}{x} g' \left(\frac{y}{x} \right) = 0.$$

Notera vidare att om en partiellt deriverbar funktion $f(x, y)$ uppfyller $f'_1(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, så är f oberoende av x , dvs. $f(x, y) = \varphi(y)$ för någon funktion φ .

I kursen envariabelanalys visade vi att en deriverbar funktion är kontinuerlig. En partiellt deriverbar funktion av flera variabler behöver dock inte vara kontinuerlig, vilket visas i nästa exempel.

Exempel 26. Funktionen f är definierad som $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och som $f(0, 0) = 0$. Funktionen är partiellt deriverbar utanför origo, men också i origo eftersom det är identiskt lika med noll på koordinataxlarna. Alltså gäller $f'_1(0, 0) = f'_2(0, 0) = 0$. Observera att, för att beräkna partiella derivatorna i $(0, 0)$, måste man räkna direkt från derivatans definition, eftersom funktionen i origo definieras på ett annat sätt än för punkterna utanför origo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0}{h(h^2 + 0^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 \cdot k}{k(0^2 + k^2)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^2} = 0.$$

Funktionen är dock inte kontinuerlig eftersom när vi närmar oss origo längs linjen $y = x$ så får vi gränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

som är skilt från funktionsvärdet i origo.

Partiell deriverbarhet är därför ingen lämplig flerdimensionell motsvarighet till deriverbarhet i en variabel och vi hittar nedan (i Föreläsning 6) en bättre motsvarighet.

Högre ordningens derivator

Om de partiella derivatorna av en funktion f av n variabler i sin tur är partiellt deriverbara, så kan vi definiera andra ordningens partiella derivator

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = f''_{ij} \quad \text{för } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ osv.}$$

Exempel 27. Bestäm andra ordningens partiella derivator av funktionen $f(x, y) = xy + \ln(xy^2)$

$$f'_x = y + \frac{1}{xy^2} \cdot y^2 = y + \frac{1}{x}, \quad f'_y = x + \frac{1}{xy^2} \cdot 2xy = x + \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = -\frac{2}{y^2}.$$

Vi kan även beräkna tredje ordningens partiella derivator, exempelvis

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{xxx} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{yxx} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f'''_{xxy} = 0,$$

osv.

I exemplet ovan var de blandade partiella derivatorna f''_{xy} och f''_{yx} lika. Detta är ingen tillfällighet som följande sats visar

Sats 5. (Schwarz) Låt f vara en funktion av n variabler med definitionsmängd D . Om alla partiella derivator upp till och med ordning k är kontinuerliga, så är alla blandade derivator av ordning k (tagna m.a.p. samma variabler, fast i olika ordningar) lika.

Beviset är relativt likt beviset av att en funktion med kontinuerliga partiella derivator är differentierbar och bygger på medelvärdessatsen (bevis i kursboken). Vi kommer att använda denna sats flera gånger under kursens gång.

Vi introducerar också följande beteckningar, som är praktiska (korta!) när man senare ska skriva ner antaganden i olika satser:

Definition 15. Låt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ är en öppen mängd. (Funktionen f är alltså en funktion av n variabler.) Man säger att:

- f är av klass C^0 i Ω om f är kontinuerlig i Ω . Man skriver också kort $f \in C^0$,
- f är av klass C^1 i Ω om f är partiellt deriverbar i Ω och alla partiella derivatorna (som funktioner av n variabler) är kontinuerliga i Ω . Man skriver också kort $f \in C^1$,
- generellt, för $k \geq 2$: f är av klass C^k i Ω om f är k gånger partiellt deriverbar i Ω och partiella derivatorna (som funktioner av n variabler) av ordning k är kontinuerliga i Ω . Man skriver också kort $f \in C^k$.

Andra ordningens partiella derivator förekommer i många partiella differentialekvationer (PDE). En viktig sådan PDE är *Laplaces ekvation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i } \mathbb{R}^2 \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{i } \mathbb{R}^3.$$

Lösningar $u(x, y)$ respektive $u(x, y, z)$ till Laplaces ekvation kallas för *harmoniska funktioner*. Laplaces ekvation används för att beskriva system i jämvikt. Givet att temperaturen på randen ∂D av en kropp ges av en känd funktion $f(x, y)$ så kommer temperaturen i kroppens inre $u(x, y)$ i jämvikt att vara lösningen till det så kallade *Dirichletproblemet*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, y) = f(x, y). \end{cases}$$

Exempel 28. Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ och anta att $u(x, y) = 0$ på $x^2 + y^2 = 1$ samt att $u(x, y) = 2 \ln(2)$ på $x^2 + y^2 = 4$.

Dirichletproblemet ovan har lösningen $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Vi ser direkt att randvillkoret är uppfyllt. Vidare gäller

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x \\ u''_{xx} &= \frac{2}{x^2 + y^2} + 2x(-1) \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4}{x^2 + y^2} - 4 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Harmoniska funktioner har många intressanta egenskaper. Exempelvis antar harmoniska funktioner alltid maximum och minimum på randen av området (rimligt med tanke på temperaturlämpningen). Vidare är medelvärdet av en harmonisk funktion på en omgivning $N(\vec{a}, \delta)$ eller på ytan $\partial N(\vec{a}, \delta)$ alltid lika med funktionsvärdet i punkten $\vec{a}$. Slutligen är alla begränsade harmoniska funktioner definierade på hela $\mathbb{R}^n$ konstanta.

Föreläsning 6: Differentierbarhet, linjärisering

Differentierbarhet

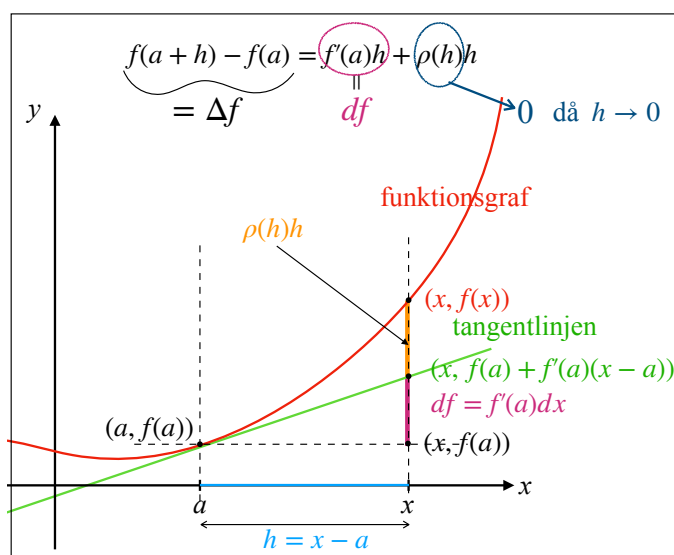
Om en funktion av en variabel är deriverbar i en punkt a och där har derivatan $f'(a)$, så innebär det att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \overbrace{\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right)}^{\rho(h)} = 0.$$

Funktionen $\rho(h)$ är definierad för alla $h \neq 0$ sådana att $a+h \in D_f$, och uppfyller $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$. f är alltså deriverbar i punkten a om det finns en konstant A och en funktion $\rho(h)$ s.a.

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \rho(h)h, \quad \text{där } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0.$$

Om vi kallar $a+h$ för x , så får vi $h = x - a$ och $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \rho(x-a)(x-a)$, så termen $\rho(x-a)(x-a)$ blir *felet vid linjär approximation* av funktionen f . Vi utvidgar denna definition till flera variabler.

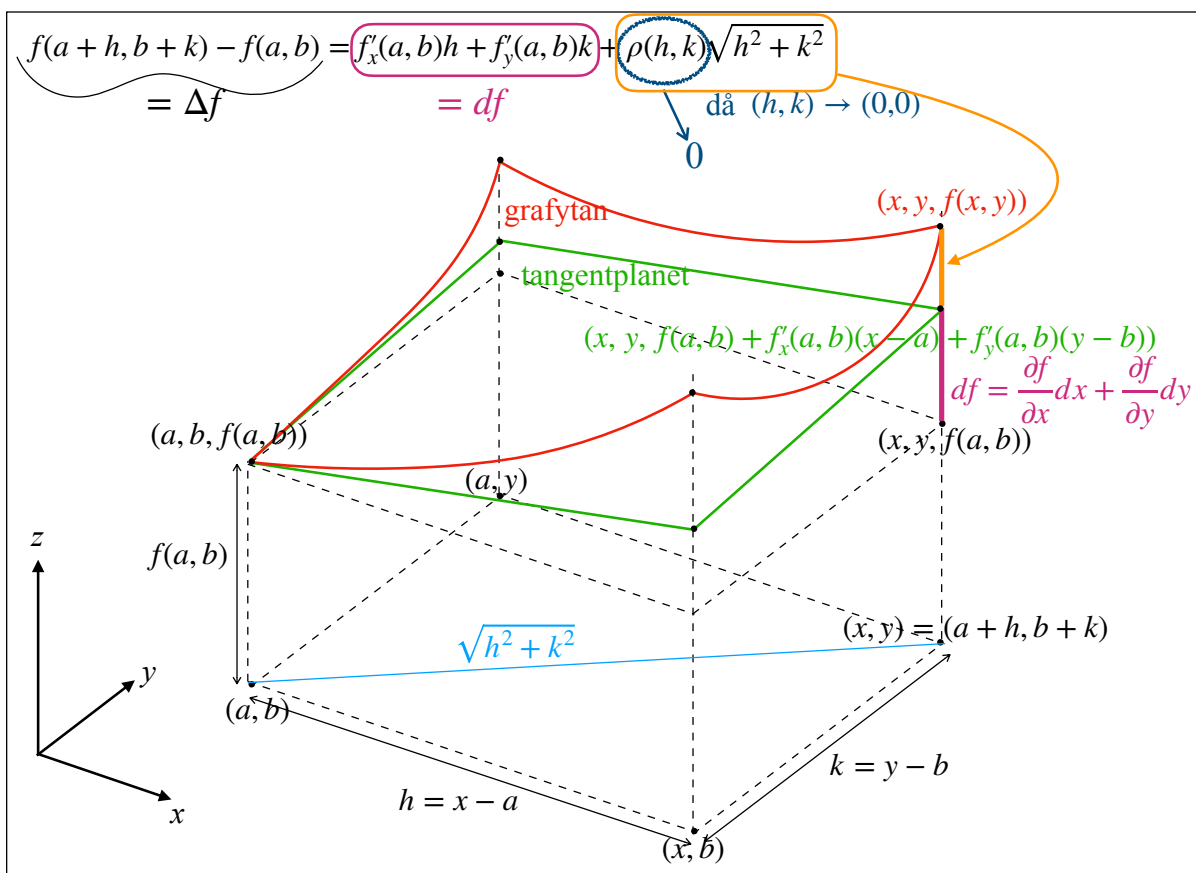


Figur 13: Föreläsning 6: Geometrisk tolkning av deriverbarheten i punkten a av en envariabelfunktion $y = f(x)$. Δf beskriver den verkliga skillnaden mellan $f(x)$ och $f(a)$ för en x nära a ; $df = f'(a)dx = f'(a)h$ beskriver den approximativa (linjära!) skillnaden mellan dessa värden. Deriverbarheten i punkten a innebär att $(\Delta f - df)/h \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$, alltså att värdena på kurvan approximeras mycket bra med värdena på tangentlinjen. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Definition 16. Låt $\vec{a}$ vara en inre punkt i definitionsmängden D till en funktion f av n variabler. Vi säger att f är differentierbar i punkten $\vec{a}$ om det finns konstanter $A_1, \dots, A_n$ och en funktion $\rho(\vec{h})$ sådan att

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + \rho(\vec{h})|\vec{h}| \quad \text{där } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \rho(\vec{h}) = 0.$$

Precis som konstanten framför h i det endimensionella fallet var derivatan $f'(a)$, så är konstanterna $A_1, \dots, A_n$ i det flerdimensionella fallet de partiella derivatorna av f . För att visa detta



Figur 14: Föreläsning 6: OBS: samma färger som i bilden för envariabelfunktionen! Geometrisk tolkning av deriverbarheten i punkten (a, b) av en tvåvariabelfunktion $z = f(x, y)$. Δf beskriver den verkliga skillnaden mellan $f(x, y)$ och $f(a, b)$ för en (x, y) nära (a, b) ; $df = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$ beskriver den approximativa (linjära!) skillnaden mellan dessa värden. Deriverbarheten i punkten (a, b) innebär att $(\Delta f - df)/\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, alltså att värdena på ytan approximeras mycket bra med värdena på tangentplanet. (Bild: Hania, med KeyNote.)

kan vi sätta $\vec{h} = t\vec{e}_j$ och får då

$$\frac{f(\vec{a} + t\vec{e}_j) - f(\vec{a})}{t} = \frac{A_j t}{t} + \rho(t\vec{e}_j) \frac{|t\vec{e}_j|}{t} \rightarrow A_j, \quad \text{då } t \rightarrow 0.$$

Men enligt definitionen av partiell derivata är ovanstående gränsvärde lika med $f'_j(\vec{a})$. Alltså gäller:

Sats 6. En differentierbar funktion är partiellt deriverbar och $A_j = f'_j(\vec{a})$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Sats 7. En differentierbar funktion är kontinuerlig.

Bevis.

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} (A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \rho(\vec{h})|\vec{h}|) = f(\vec{a})$$

□

Exempel 29. Visa från definitionen att $f(x, y) = x^2 + y^2$ är deriverbar i varje punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vi beräknar $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Låt oss ta en godtycklig punkt (x, y) och små h och k :

$$\Delta f = f(x + h, y + k) - f(x, y) = (x + h)^2 + (y + k)^2 - x^2 - y^2 = 2xh + 2yk + h^2 + k^2$$

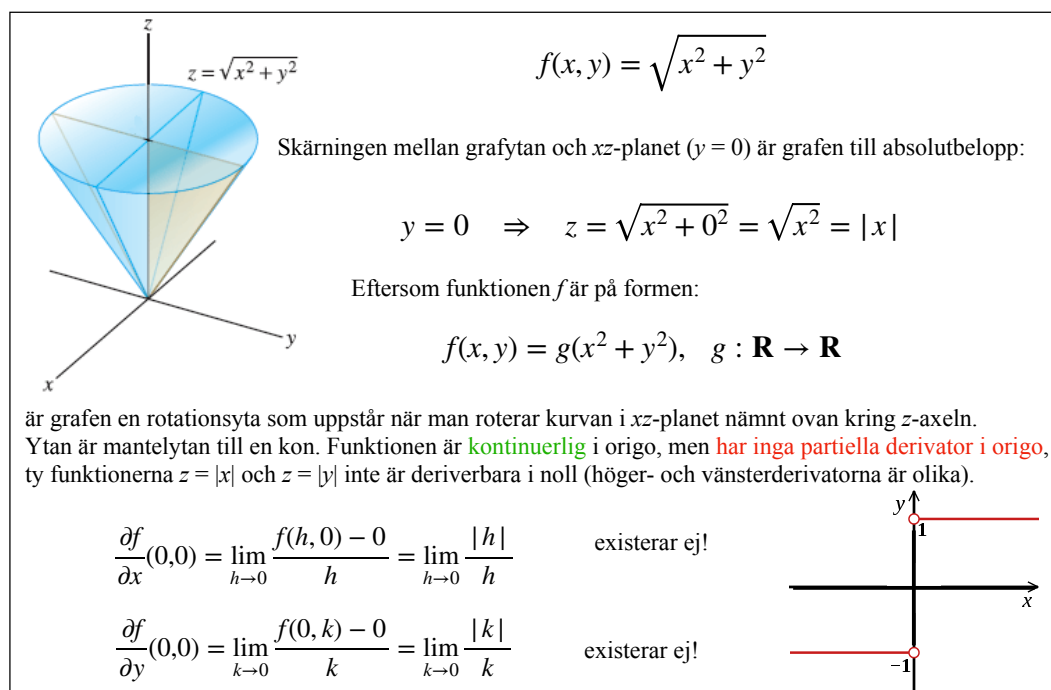
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k = 2xh + 2yk$$

$$\Delta f - df = (2xh + 2yk + h^2 + k^2) - (2xh + 2yk) = h^2 + k^2$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0,$$

vilket betyder att funktionen är deriverbar i punkten (x, y) .

Exempel 30. Här kommer ett exempel på en funktion som är kontinuerlig i origo, men har inga partiella derivator där. Detta är en 3D-motsvarighet till absolutbelopp-funktionen från envariabelanalys (kontinuerlig, men ej deriverbar i noll).



Figur 15: Föreläsning 6: Funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ är kontinuerlig, men har inga partiella derivator i origo. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Exempel 31. Approximera skillnaden mellan $f(2, 1)$ och $f(2.01, 1.03)$ där $f(x, y) = \ln |x^2 + xy|$.

Den verkliga skillnaden är svår att beräkna och vi måste använda räknaren. Då får vi

$$\Delta f = f(2.01, 1.03) - f(2, 1) = \ln |(2.01)^2 + 2.01 \cdot 1.03| - \ln 6 \approx 0.0182.$$

Det är enklare att beräkna differentialen df i stället, eftersom vi då blir av med logaritmen och har bara polynom att hantera, och dessutom med heltals argument. Och vi vet ju att $\Delta f \approx df$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{2x + y}{x^2 + xy}dx + \frac{x}{x^2 + xy}dy.$$

Jacobianen

För en vektorvärd funktion $\vec{y} = f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

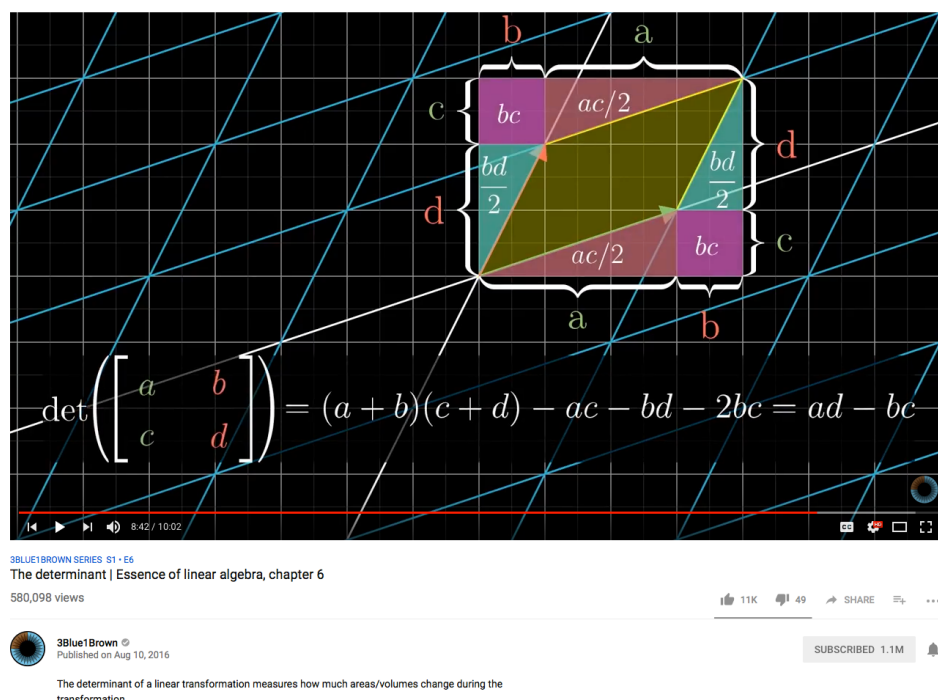
$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{är Jacobimatrisen } D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen är alltså en $m \times n$ -matris där j :te raden i $D\vec{f}(\vec{x})$ är $\nabla f_j(\vec{x})$.

Exempel 32. Bestäm Jacobimatrisen till avbildningen $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$

Eftersom

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos(\theta), & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin(\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin(\theta), & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos(\theta) \end{aligned} \quad \text{får vi Jacobimatrisen } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



Figur 17: Föreläsning 6: Länken mellan $\det(A)$ och arean av parallelogrammen genererad av A 's kolonner. Från YouTube, **3Blue1Brown**.

Betrakta nu en funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (som i ovanstående exempel). För linjära avbildningar $\vec{y} = A\vec{x}$ vet vi från den linjära algebran att viktiga egenskaper hos avbildningen kan härledas

från determinanten av matrisen A . Vi ska nu se att determinanten av Jacobiamatrisen kan ge viktig information om de *lokala* egenskaperna hos en funktion $\vec{f}$. Låt för enkelhetens skull $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pondera en rektangel vars hörn ligger i

$$(a_1, a_2), \quad (a_1 + h_1, a_2), \quad (a_1, a_2 + h_2) \quad \text{och} \quad (a_1 + h_1, a_2 + h_2).$$

Arean som innesluts av denna rektangel är $h_1 h_2$. f ordnar rektangelns hörn enligt följande:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) \\ f_2(a_1, a_2) \end{pmatrix} \\ (a_1 + h_1, a_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1 + h_1, a_2) \\ f_2(a_1 + h_1, a_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 \\ f_2(a_1, a_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 \end{pmatrix} \\ (a_1, a_2 + h_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2 + h_2) \\ f_2(a_1, a_2 + h_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 \\ f_2(a_1, a_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 \end{pmatrix} \\ \text{Area} &\approx \begin{vmatrix} h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = h_1 h_2 \left| D\vec{f}(\vec{x}) \right| \end{aligned}$$

så areaförändringen av en avbildning är $\det(D\vec{f}(\vec{x}))$. Jämför med $\det(A)$ för den linjära avbildningen $\vec{y} = A\vec{x}$ som avbildar basvektorerna $(1, 0)$ och $(0, 1)$ på vektorerna (a, c) och (b, d) (se bilden på sidan 35):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Föreläsning 7: Kedjeregeln

Kedjeregeln behövs för att derivera sammansatta funktioner. I envariabelanalys finns det bara en enda version av kedjeregeln, men det finns hur många som helst versioner av kedjeregler för flervariabelfunktioner. Vi kommer att gå igenom några viktigaste versioner och lära oss använda dem m.h.a. Jacobianer och m.h.a. diagram som hos Adams.

Version 0 Den endimensionella kedjeregeln för

$$f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

säger att $\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)$. Om vi inför beteckningarna $u = f(v)$, $v = g(t)$, så kan kedjeregeln också skrivas

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dt}, \quad u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Version G Den mest generella version av kedjeregeln: Med hjälp av Jacobimatrisen kan kedjeregeln för en sammansatt funktion uttryckas med hjälp av en matrismultiplikation. Låt $\vec{x} = \vec{g}(\vec{t}) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, och $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, så

$$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^q \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{R}^m$$

$$D\vec{g}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_q} \end{pmatrix}, \quad D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t}) = \underbrace{D\vec{f}(\vec{g}(\vec{t}))D\vec{g}(\vec{t})}_{\text{Matrismultiplikation}}$$

$(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t})$ är en funktion från $\mathbb{R}^q$ till $\mathbb{R}^m$. Enligt kedjeregeln är $\frac{\partial}{\partial t_j}(\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t})$

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_k} \frac{\partial g_k(\vec{t})}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_1} \frac{\partial g_1(\vec{t})}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_n} \frac{\partial g_n(\vec{t})}{\partial t_j}$$

och detta är precis resultatet på rad i och kolonn j i matrismultiplikationen ovan ($i = 1, \dots, m$ och $j = 1, \dots, q$, ty produkten av en $m \times n$ -matris och en $n \times q$ -matris är en $m \times q$ -matris).

I exemplen nedan kommer vi att använda samma beteckningar som ovan i de generella formlerna, men följande beteckningar för att illustrera vad funktionerna står för. Då använder vi:

- s för en envariabel skalärfunktion,
- $\vec{v}$ för en vektorvärd funktion,
- f för en flervariabelfunktion med skalära värden,

- Φ för ett variabelbyte i $\mathbb{R}^2$ eller i $\mathbb{R}^3$.

OBS: $\frac{d}{dt}$ används för derivator till envariabelfunktioner och $\frac{\partial}{\partial x}$ för flervariabelfunktioner.

Version 1: (se F3: del 5 i Sats 3 på s. 16) med $q = 1$ och $n = 1$ och $m = n$.

$$\vec{v} \circ s : \mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{v}} \mathbb{R}^n$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}(s(t))) = s'(t) \cdot \vec{v}'(s(t)).$$

Varför är det så? Eftersom derivering av vektorvärda funktioner sker komponentsvis och komponentfunktionerna $x_1, \dots, x_n$ är vanliga envariabelfunktioner och för dem gäller den vanliga envariabel-kedjeregeln. Alltså, om $\vec{v}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, då är $\vec{v}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ och därför får vi:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}(s(t))) = \left(\frac{d}{dt}(x_1(s(t))), \dots, \frac{d}{dt}(x_n(s(t))) \right) = (x_1'(s(t)) \cdot s'(t), \dots, x_n'(s(t)) \cdot s'(t)) = s'(t) \cdot \vec{v}'(s(t)).$$

I det sista steget har vi brutit ut skalären $s'(t)$ framför vektorn samt satt in $\vec{v}'(s(t))$ i.s.f. vektorn med derivatorna till komponentfunktionerna, och i det näst sista: tillämpat den envariabel-kedjeregeln till komponentfunktionerna. I det här varianten för kedjeregeln kan man tänka på s -funktionen som omparametrisering av kurvan.

Version 2: (se F4: regel 4 på s. 22) med $q = n$ och $n = 1$ och $m = 1$.

Först generellt. Den endimensionella kedjeregeln kan också användas för partiell derivering av funktioner av typen $f(g(t_1, \dots, t_n))$, alltså

$$f \circ g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

eftersom när vi deriverar partiellt, så fixerar vi alla variabler utom en. Alltså gäller, med $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$,

$$\frac{\partial f(g(\vec{t}))}{\partial t_j} = f'(g(\vec{t}))g_j'(\vec{t}) \quad \text{alternativt} \quad \frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{du}{dv} \frac{\partial v}{\partial t_j}, \quad u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Exempel 33. Uppgift 5 från Adams 12.3: Nu på ett konkret exempel och med beteckningar som återspeglar karaktären hos de inblandade funktionerna: beräkna $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ där $z = \arctan \frac{y}{x}$.

Situationen är följande:

$$z = s \circ f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R},$$

där $f(x, y) = \frac{y}{x}$ och $s(t) = \arctan t$.

Vi beräknar partiella derivatorna av sammanställningen $z = s \circ f$ enligt formlerna:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

som ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Det är inte svårt, men man måste lära sig känna igen situationer där man har sammansatta funktioner.

Exempel 34. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u$$

som har formen $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ (radiell symmetri).

Sätt $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Kedjeregeln ger nu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial z}$$

Vidare gäller:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}. \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \end{aligned} \quad (\text{av symmetriskäl})$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x f'(r) \frac{x}{r} + y f'(r) \frac{y}{r} + z f'(r) \frac{z}{r} = f'(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = r f'(r)$$

så differentialekvationen kan skrivas $r f'(r) = f(r)$, vilket är en separabel ordinär differentialekvation med lösningen

$$\int \frac{df}{f} = \int \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad \ln(f(r)) = \ln(r) + C \quad \Rightarrow \quad f(r) = e^{\ln(r)+C} = Dr.$$

Version 3: med $q = 1$ och $m = 1$.

Betrakta nu en sammansatt funktion på formen $f(\vec{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$, alltså

$$f \circ \vec{g}: \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Kedjeregeln har då följande utseende:

Sats 8. Låt f vara en differentierbar funktion på $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt $g_1, \dots, g_n$ vara deriverbara funktioner på ett intervall (a, b) . Om $\vec{g}(t) \in D$ för alla $t \in (a, b)$, så är $f(\vec{g}(t))$ deriverbar på (a, b) och

$$\frac{d}{dt}f(\vec{g}(t)) = f'_1(\vec{g}(t))g'_1(t) + \dots + f'_n(\vec{g}(t))g'_n(t)$$

eller med $u = f(\vec{v})$, $\vec{v} = \vec{g}(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n} \frac{dv_n}{dt}$$

Bevis. Vi undersöker gränsvärdet av differenskvoten $\frac{f(\vec{g}(t+k)) - f(\vec{g}(t))}{k}$. Eftersom f är differentierbar, så vet vi att

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x})h_i + |\vec{h}|\varphi(\vec{h}), \quad \text{där } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \varphi(\vec{h}) = 0.$$

Sätt nu $\vec{x} = \vec{g}(t)$ och $\vec{h} = \vec{g}(t+k) - \vec{g}(t)$, så att $\vec{x} + \vec{h} = \vec{g}(t+k)$. Då får vi:

$$\underbrace{\frac{f(\vec{g}(t+k)) - f(\vec{g}(t))}{k}}_{\rightarrow \frac{d}{dt}f(\vec{g}(t))} = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x}) \frac{h_i}{k} + \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h}) = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x}) \underbrace{\frac{g_i(t+k) - g_i(t)}{k}}_{\rightarrow g'_i(t)} + \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h}).$$

Det återstår att visa att resttermen går mot noll då $k \rightarrow 0$. Då $k \rightarrow 0$ så även $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$ (g_i deriverbara och därmed kontinuerliga) och då även $\varphi(\vec{h}) \rightarrow 0$. Vidare gäller

$$\frac{|\vec{h}|}{k} = \frac{|\vec{g}(t+k) - \vec{g}(t)|}{k} \rightarrow |g'_1(t), \dots, g'_n(t)| = C, \quad \text{så } \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h}) \rightarrow 0.$$

□

Hela situationen blir betydligt enklare att förstå om vi skriver upp det för $n = 2$. Och exemplet är viktigt, eftersom här kommer det för första gången plus-tecknet i formeln! Hittills var allt mycket likt situationen från envariabelanalys och formlerna var rätt så intuitiva. Från och med nu blir det riktigt nyttigt med både diagram som hos Adams och med matrismultiplikation.

Exempel 35.

$$f \circ \vec{v}: \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{v}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Vi har $z(t) = f(x(t), y(t))$. Sammansättningen är en vanlig envariabelfunktion och derivatan beräknas med vanliga metoder. Först ersätter vi bara $z(t)$ med $f(x(t), y(t))$:

$$z'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} = \dots$$

och nu tillämpar vi en typisk trick med att subtrahera och addera samma sak för att kunna trolla fram de partiella derivatorna:

$$\dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t+h))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} = \dots$$

och nu kan man tillämpa den vanliga envariabel-kedjeregeln:

$$\cdots = f'_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (x'(t), y'(t)) = \nabla f(\vec{v}(t)) \cdot \vec{v}'(t)$$

och nu ser vi både hur plus-tecknet kommer in i bilden OCH hur kedjeregeln kan noteras med hjälp av matrisprodukt!

Exempel 36. Bestäm $\frac{d}{dt}f(\vec{g}(t))$ för $f(x, y, z) = xz + \cos y$ och $\vec{g}(t) = (\sin(t), t^2, \ln(t^2 + 1))$.

Vi kan använda kedjeregeln och får då:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\vec{g}(t)) &= f'_1(\vec{g}(t))g'_1(t) + f'_2(\vec{g}(t))g'_2(t) + f'_3(\vec{g}(t))g'_3(t) \\ &= [f'_1(x, y, z) = z, \quad f'_2(x, y, z) = -\sin y, \quad f'_3(x, y, z) = x] \\ &= \ln(t^2 + 1) \cos(t) + (-\sin(t^2))2t + \sin(t) \frac{2t}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Vi kan också bestämma den sammansatta funktionen $f(\vec{g}(t))$ och derivera den som en funktion av en variabel:

$$\begin{aligned} f(\vec{g}(t)) &= (\sin(t)) \ln(t^2 + 1) + \cos(t^2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}f(\vec{g}(t)) &= \cos(t) \ln(t^2 + 1) + \sin(t) \frac{2t}{t^2 + 1} - 2t \sin(t^2). \end{aligned}$$

I exemplet ovan var det mer invecklat att använda kedjeregeln. Med hjälp av kedjeregeln kan vi dock lösa vissa problem utan att känna till båda funktionerna f och $\vec{g}(t)$ explicit.

Exempel 37. Låt $f(x, y)$ vara en differentierbar funktion som löser differentialekvationen $x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}$ i första kvadranten. Visa att f är konstant på alla hyperbler $xy = c$ i första kvadranten.

I detta fall känner vi inte f explicit, utan vet bara att f löser en viss differentialekvation. Vi vill veta f på alla kurvor $y = \frac{c}{x}$, $x > 0$ och sätter därför $f\left(x, \frac{c}{x}\right)$. Kedjeregeln ger:

$$\frac{d}{dx}f\left(x, \frac{c}{x}\right) = f'_1\left(x, \frac{c}{x}\right) \cdot 1 + f'_2\left(x, \frac{c}{x}\right) \left(-\frac{c}{x^2}\right) = \frac{1}{x} \left(x f'_1\left(x, \frac{c}{x}\right) - \frac{c}{x} f'_2\left(x, \frac{c}{x}\right)\right).$$

Den givna differentialekvationen ger nu att $x f'_1(x, y) - y f'_2(x, y) = 0$, vilket för $y = \frac{c}{x}$ ger att uttrycket i parenteserna ovan är noll. Därmed följer att $\frac{d}{dx}f\left(x, \frac{c}{x}\right) = 0$ och f är konstant längs $y = \frac{c}{x}$.

Version 4: med $q = n$ och $n = p$ och $m = 1$.

Den mer generella kedjeregeln får vi när $\vec{g}(t)$ är en vektorvärd funktion av n variabler, dvs. $\vec{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t), \dots, g_p(t), \dots, g_n(t))$, eller:

$$f \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Genom att kombinera de båda föregående varianterna av kedjeregeln får vi:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\vec{g}(\vec{t})) = f'_1(\vec{g}(\vec{t})) \frac{\partial g_1}{\partial t_j} + \dots + f'_p(\vec{g}(\vec{t})) \frac{\partial g_p}{\partial t_j} \quad \text{för } j \in \{1, \dots, n\}, \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

eller med $u = f(\vec{v})$, $\vec{v} = \vec{g}(\vec{t})$:

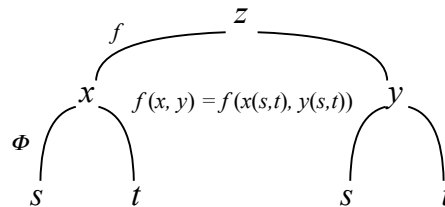
$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_p} \frac{\partial v_p}{\partial t_j}.$$

Så fort som den inre funktionen är vektorvärd får vi i kedjeregeln en summa med lika många termer som dimensionen på de inre funktionen. Ibland kan beroendet mellan variablerna vara mer invecklat som i nästa exempel. Då är det praktiskt att använda diagram som i kurslitteraturen⁴.

Exempel 38. Version 4 med $q = 2 = n$ (och $q = 3 = n$ i bilden på nästa sidan) och $m = 1$, alltså

$$f \circ \Phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

där Φ , ett variabelbyte i $\mathbb{R}^2$, definieras som: $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$.



Figur 18: Föreläsning 7: Kedjeregeln, Version 4 med $q = 2 = n$ och $m = 1$. Passar perfekt vid polärt koordinatbyte. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Derivatan till $z = f(x(s, t), y(s, t))$ beräknas på följande sätt, vilket kan avläsas antingen från diagrammet (på precis samma sätt som man avläser sannolikheterna från ett likartat utseende diagram!) eller m.h.a. matrismultiplikationen:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

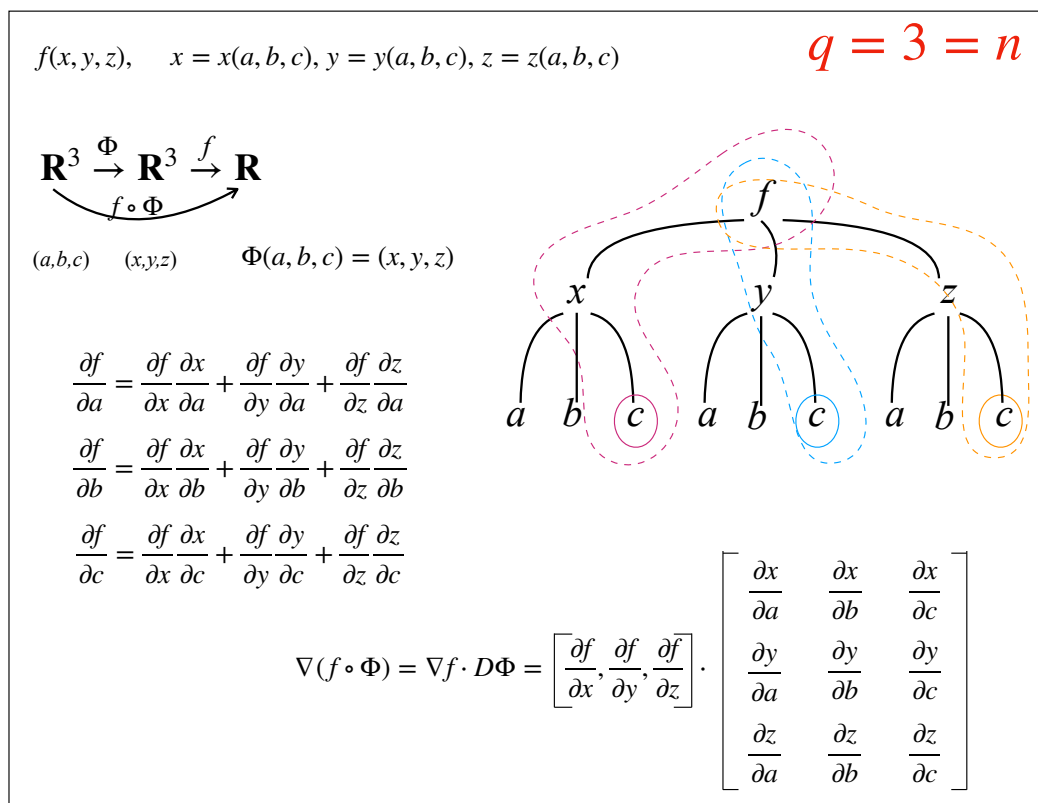
Gradienten till f är $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ och Jacobianen till Φ :

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

så är derivatan av sammansättningen lik med matrisprodukten av dessa två, alltså:

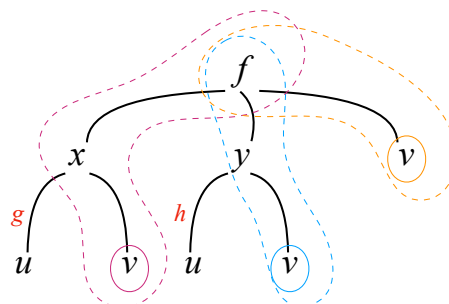
$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \nabla f \cdot D\Phi = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right).$$

⁴För ett ännu mer komplicerat exempel se Adams 12.5, Exempel 7.



Figur 19: Föreläsning 7: Kedjeregeln som i Travis T.14, min. 26–28. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Exempel 39. Låt $f(x, y, v)$, där $x = g(u, v)$ och $y = h(u, v)$, så att f har ett direkt beroende av variabeln v och två indirekta beroenden av variabeln u (via funktionerna g och h). Bestäm $\frac{\partial}{\partial v} f(x, y, v)$.



Figur 20: Föreläsning 7: Kedjeregeln, Exempel 39. Det finns tre vägar i diagrammet som leder till variabeln v . (Bild: Hania, med KeyNote.)

Kedjeregeln ger (se diagrammet!):

$$\frac{\partial}{\partial v} f(x, y, v) = f'_1(x, y, v) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{g'_2(u, v)} + f'_2(x, y, v) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{h'_2(u, v)} + f'_3(x, y, v)$$

Den generella kedjeregeln är ofta användbar för att avgöra hur olika partiella derivator förändras

när man byter variabler. Exempelvis an man visa att Laplaces ekvation i två dimensioner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ i polära koordinater är } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

(vilket direkt ger att $2 \ln(r)$ är harmonisk).

Exempel 40. Transformera differentialekvationen $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ genom att införa de nya variablerna $x = u + v$, $y = u - v$. Lös därefter ekvationen.

Sambandet mellan (x, y) och (u, v) kan skrivas $u = \frac{1}{2}(x + y)$ och $v = \frac{1}{2}(x - y)$. Kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

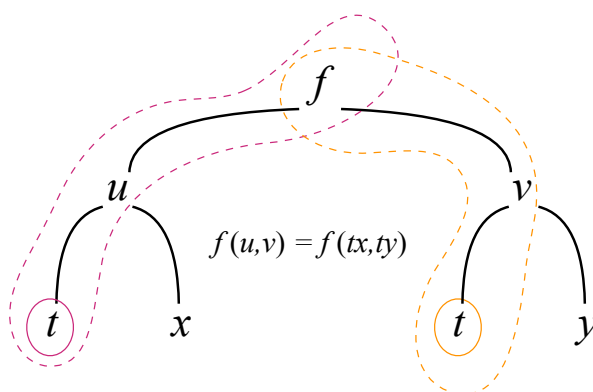
kombinerar vi båda dessa ekvationer får vi:

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial z}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

med lösningen $z = f(v) = f(x - y)$ för någon envariabelfunktion $f \in C^1$.

Exempel 41. Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion med kontinuerliga partiella förstaderivator. Antag att för alla reella tal $t > 0$ gäller $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$. Visa att då gäller

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f(x, y).$$



Figur 21: Föreläsning 7: Kedjeregeln, Exempel 41. Det finns två vägar i diagrammet som leder till variabeln t . (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vi använder kedjeregeln (se diagrammet!) på sambandet $t^3 f(x, y) = f(tx, ty)$ och får då:

$$3t^2 f(x, y) = \frac{d}{dt} f(tx, ty) = f'_1(tx, ty)x + f'_2(tx, ty)y$$

samtidigt gäller

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) &= f'_1(tx, ty)t \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty) = f'_2(tx, ty)t \quad \text{så} \\ x \frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) + y \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty) &= x f'_1(tx, ty)t + y f'_2(tx, ty)t = t \cdot 3t^2 f(x, y) = 3f(tx, ty). \end{aligned}$$

Till sist några anmärkningar om PDE (partiella differentialekvationer). Se också Jonas Månssons anteckningar till Föreläsning 6 på sidorna 4-6.

Här kommer några instruktioner angående lösning av riktigt enkla PDE:er. Man härleder komplicerade PDE:er till enkla sådana m.h.a. ett lämpligt koordinatbyte.

ODE	sökes $y = y(x)$	PDE	sökes $z = f(x, y)$ eller $w = f(x, y, z)$
	$y'(x) = 0$ ger $y(x) = C$ bara en konstant funktion har derivatan noll	$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ger $z(x, y) = \varphi(y)$ konstant m.a.p. x ! där $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är deriverbar	$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ger $z(x, y) = \psi(x)$ konstant m.a.p. y ! där $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är deriverbar
	$y''(x) = 0$ ger $y'(x) = C$ ger $y(x) = Cx + D$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ ger $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(y)$ ger $z(x, y) = \varphi_1(y)x + \varphi_2(y)$ två konstanter m.a.p. x ! där $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är deriv.	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ger $\frac{\partial z}{\partial y} = \psi_1(x)$ ger $z(x, y) = \psi_1(x)y + \psi_2(x)$ två konstanter m.a.p. y ! där $\psi_1, \psi_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är deriv.
	$y'(x) = f(x)$ ger $y(x) = F(x)$ s.a. $F'(x) = f(x)$	Analysera själva: Jonas Månssons Förel.4, s.3–4 och Förel. 6, s.4–6. $\frac{\partial f}{\partial v} = v$ $f = f(u, v)$ $f(u, v) = \int v dv = \frac{v^2}{2} + \varphi(u)$ eftersom $\frac{\partial}{\partial v}(\frac{v^2}{2} + \varphi(u)) = v + 0 = v$.	

Figur 22: Föreläsning 7: Kedjeregeln, Hur ska man hantera enkla PDE:er; en jämförelse med ODE:er. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Föreläsning 8: Tangentplan, gradient, riktningsderivator

Differentierbarhet (forts.)

I F6 sade vi att en funktion $f(x, y)$ var differentierbar i en punkt (a, b) om det fanns konstanter $A_1 = f'_1(a, b)$, $A_2 = f'_2(a, b)$ och en funktion ρ sådan att

$$\underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b)}_{f(\vec{a}+\vec{h})} = \underbrace{f(a, b)}_{f(\vec{a})} + \underbrace{f'_1(a, b)h}_{A_1 h_1} + \underbrace{f'_2(a, b)k}_{A_2 h_2} + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k)}_{|\vec{h}| \rho(\vec{h})}$$

där $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \rho(h, k) = 0$. Låt nu $x = a + h$, $y = b + k$, så vi får följande uppskattning av $f(x, y)$:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b) + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k)$$

Tangentens motsvarighet i två dimensioner blir tangentplanet

$$z = f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b).$$

Exempel 42. Bestäm tangentplanet till paraboloiden $z = x^2 + 2y^2$ i punkten $(1, 1, 3)$.

Funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ är differentierbar (motivering nedan) och har partiella derivator $f'_1(x, y) = 2x$ samt $f'_2(x, y) = 4y$, vilket ger $f'_1(1, 1) = 2$ och $f'_2(1, 1) = 4$. Tangentplanet har således ekvationen

$$z = 3 + 2(x - 1) + 4(y - 1) \quad \Rightarrow \quad 2x + 4y - z = 3$$

Normalvektorn till ett plan med ekvation $ax + by + cz = d$ är ju (a, b, c) , så från tangentplanet ekvation $f'_1(a, b)x + f'_2(a, b)y - z = d$ inses att funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ har normalvektorn

$$\vec{n} = (f'_1(a, b), f'_2(a, b), -1).$$

Tangentplanet kan användas för att göra linjär approximation av en funktionsyta. Vi återkommer till detta senare när vi tar upp Taylorapproximationer av funktioner av flera variabler.

En differentierbar funktion var partiellt deriverbar och kontinuerlig. Följande sats ger tillräckliga villkor för att en funktion ska vara differentierbar.

Sats 9. Låt f vara en funktion av n variabler med öppen definitionsmängd D . Om f är partiellt deriverbar och de partiella derivatorna $f'_1, \dots, f'_n$ är kontinuerliga, så är f differentierbar på D .

Bevis. Vi visar satsen för funktioner av två variabler och vill uppskatta

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a, b) \\ &= \underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}_{\text{def. } \alpha(t)=f(a+t, b+k)} + \underbrace{f(a, b+k) - f(a, b)}_{\text{def. } \beta(t)=f(a, b+t)} \end{aligned}$$

Medelvärdessatsen för funktioner av en variabel ger:

$$\begin{aligned}\alpha(h) - \alpha(0) &= (h - 0)\alpha'(\theta_1 h) = hf'_1(a + \theta_1 h, b + k) \\ \beta(k) - \beta(0) &= (k - 0)\beta'(\theta_2 k) = kf'_2(a, b + \theta_2 k)\end{aligned}$$

för några $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. Eftersom f'_1 och f'_2 är kontinuerliga, så finns det funktioner $\rho_1(h, k)$ och $\rho_2(h, k)$ som uppfyller

$$f'_1(a + \theta_1 h, b + k) = f'_1(a, b) + \rho_1(h, k) \quad f'_2(a, b + \theta_2 k) = f'_2(a, b) + \rho_2(h, k)$$

där $\rho_1(h, k) \rightarrow 0$ och $\rho_2(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ Alltså får vi

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf'_1(a, b) + kf'_2(a, b) + \underbrace{h\rho_1(h, k) + k\rho_2(h, k)}_{=\sqrt{h^2+k^2}\rho(h, k)}$$

□

Observera att satsen implicerar att funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ i Exempel 42 är deriverbar, ty funktionerna $g(x, y) = 2x$ och $h(x, y) = 4y$ är kontinuerliga.

Gradient och riktningsderivata

De partiella derivatorna säger var för sig hur en funktion av n variabler förändras längs en rät linje parallell med någon av koordinataxlarna. Vi vill kunna avgöra hur en funktion förändras längs en godtycklig rät linje, dvs. i en godtycklig riktning. Följande vektor visar sig då vara användbar.

Definition 18. För partiellt deriverbara funktioner f av n variabler definierar vi *gradienten* av f i punkten $\vec{x}$ som

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) \quad (\text{betecknas även } \nabla f(\vec{x}))$$

Gradienten är ett vektorfält (en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$)

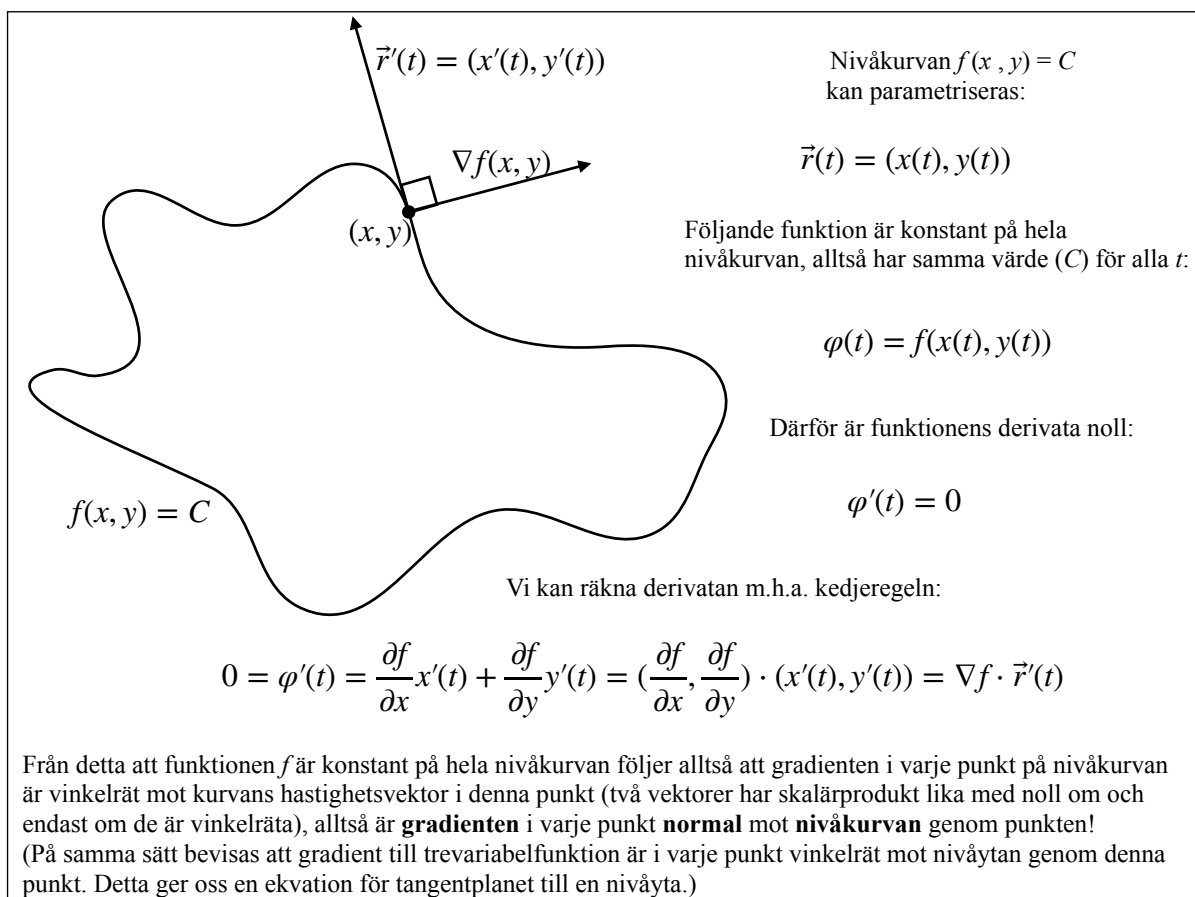
Exempel 43. Beräkna $\nabla f(\vec{x})$ för $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

De partiella derivatorna är:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{|\vec{x}|} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{|\vec{x}|}\end{aligned} \quad (\text{av symmetriskäl})$$

så gradienten blir:

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{x_1}{|\vec{x}|}, \frac{x_2}{|\vec{x}|} \right) = \frac{1}{|\vec{x}|}(x_1, x_2) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$



Figur 23: Föreläsning 8: En förklaring varför gradient i varje punkt i definitionsmängden till $f(x, y)$ är vinkelrät mot nivåkurvan genom denna punkt, och samma sak för gradienten och nivåytor till $g(x, y, z)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Nivåkurvorna till funktionen i exemplet är cirklar med centrum i origo. Gradienten till funktionen är alltså vinkelrät mot funktionens nivåkurvor. Detta gäller allmänt för funktioner av två variabler.

Sats 10. Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator. Om $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, så är $\nabla f(a, b)$ vinkelrät mot den nivåkurva till f som går genom (a, b) .

Bevis. Låt $(x(t), y(t))$ vara en parametrisering av nivåkurvan till f som går genom (a, b) och antag att $x(0) = a$, $y(0) = b$. För alla t nära noll är alltså $f(x(t), y(t)) = f(a, b)$ (från definition av nivåkurvor är alla funktionsvärden längs dem samma, i det här fallet lika med $f(a, b)$). Kedjeregeln (samt detta att derivatan till en *konstant* funktion är lika med noll) ger

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f'_1(x(t), y(t))x'(t) + f'_2(x(t), y(t))y'(t)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0.$$

Vektorn $(x'(t), y'(t))$ är en tangent till nivåkurvorna, så gradienten måste vara vinkelrät mot nivåkurvan. $\square$

På samma sätt kan man visa att gradienten till en funktion av tre variabler är vinkelrät mot

funktionens nivåytor. Med ett liknande resonemang kan vi också visa att om gradienten av en funktion men n variabler är noll i ett område så är funktionen konstant på området (jämför att om derivatan av en funktion av en variabel är noll så är funktionen konstant). Låt D vara ett bågvis sammanhängande område och antag att $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ för alla $\vec{x} \in D$. Då finns det, för varje par av punkter $\vec{a}, \vec{b} \in D$, en deriverbar kurva $\vec{x}(t)$, sådan att $\vec{x}(0) = \vec{a}$ och $\vec{x}(1) = \vec{b}$. Därmed gäller:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) &= f'_1(\vec{x}(t))x'_1(t) + \dots + f'_n(\vec{x}(t))x'_n(t) \\ &= \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot (\vec{x}'_1(t), \dots, \vec{x}'_n(t)) = \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t) = 0 \end{aligned}$$

vilket implicerar:

1. $f(\vec{x})$ är konstant
2. $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in D$

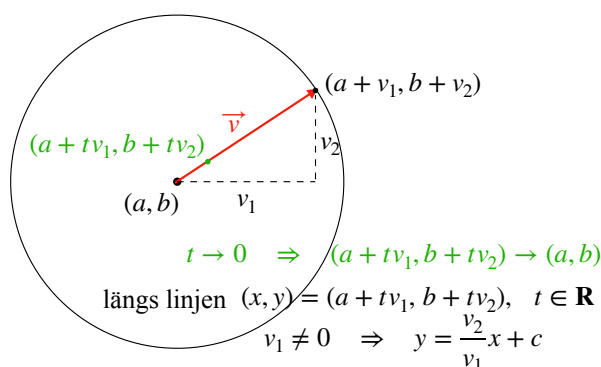
Gradienten kan också användas för att bestämma hur en funktion förändras längs en godtycklig rät linje $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ (och inte bara längs koordinataxlarna). Vi antar att $|\vec{v}| = 1$, dvs att linjens riktningsvektor är normerad.

Definition 19. *Riktningsderivatan* av funktionen f i punkten $\vec{a}$ i riktningen $\vec{v}$, $|\vec{v}| = 1$, definieras

$$D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} \quad (\vec{v} = \vec{e}_j \text{ ger } f'_j(\vec{a}))$$

Om f är en tvåvariabelfunktion (vilket oftast kommer att vara fallet för oss), då är riktningsvektorn $\vec{v} = (v_1, v_2)$ och definitionen ser ut på följande sätt:

$$D_{\vec{v}}f(a, b) = f'_{\vec{v}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}.$$



Figur 24: Föreläsning 8: Illustration till riktningsderivata, vad händer i definitionsmängden. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Riktningsderivatan uttrycker lutningen för tangentlinjen i punkten $(a, b, f(a, b))$ till kurvan som skärs ut från funktionsgrafen $z = f(x, y)$ av det vertikala (d.v.s. parallella med z -axeln) planet genom punkten (a, b) och i riktning med vektorn $\vec{v}$. Följande sats tillåter oss både beräkna

riktningsderivator på ett enkelt sätt och göra några geometriska observationer om funktionens tillväxt i olika riktningar:

Sats 11. Om f är en differentierbar funktion och $\vec{v}$ s.a. $|\vec{v}| = 1$ en given riktning, så är $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$.

Bevis. Sätt $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{v})$, så att φ beskriver f :s beteende längs linjen $\vec{a} + t\vec{v}$. Vi ser att

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0).$$

Samtidigt ger kedjeregeln:

$$\varphi'(t) = f'_1(\vec{a} + t\vec{v})v_1 + \dots + f'_n(\vec{a} + t\vec{v})v_n = \nabla f(\vec{a} + t\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

Ansätter vi $t = 0$ i ovanstående formel, så följer $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$, vilket skulle bevisas. □

Använder vi Cauchy-Schwarz⁵ olikhet på formeln för $f'_{\vec{v}}(\vec{a})$, så får vi:

$$|f'_{\vec{v}}(\vec{a})| = |\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}| \leq |\nabla f(\vec{a})| |\vec{v}| = |\nabla f(\vec{a})|$$

med likhet precis så $\vec{v}$ och $\nabla f(\vec{a})$ är riktade åt samma håll ($\cos 0 = 1$). Riktningensderivatan blir alltså som störst i gradientens riktning. Vi kan dra följande slutsatser:

- En funktion växer snabbast i riktningen $\nabla f(\vec{a})$ och tillväxten är i denna riktning $|\nabla f(\vec{a})|$.
- En funktion avtar snabbast i riktningen $-\nabla f(\vec{a})$ (då är $\alpha = \pi$ och $\cos \alpha = -1$) och avtagandet är i denna riktning $|\nabla f(\vec{a})|$.

Exempel 44. En riktigt typisk dugga- eller tentauppgift Låt

$$f(x, y) = \frac{3}{1 + x^2 + y^2}.$$

- I vilken riktning och med vilken fart växer $f(x, y)$ snabbast i punkten $(1, 1)$?
- Beräkna riktningensderivatan i punkten $(1, 1)$ i riktning med vektorn $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$.
- Bestäm ekvationer för tangent- och normallinjerna till nivåkurvan $f(x, y) = 1$ i punkten $(1, 1)$.
- Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 1)$.

Lösning:

Man måste förstås börja med att beräkna gradienten, eftersom den behövs till alla deluppgifterna! Observera att funktionen är sammansatt som i **Version 2** i Föreläsning 7:

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{6x}{(1 + x^2 + y^2)^2}, -\frac{6y}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{6x}{(1 + x^2 + y^2)^2} \cdot (-x, -y).$$

⁵Eller, i $\mathbb{R}^2$, formeln $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$; vi har ju $|\cos \alpha| \leq 1$ för alla värden på α . Riktningensvektorns längd är lika med 1, per definition.

- a) Snabbaste tillväxt sker i riktning med gradienten $\nabla f(1, 1)$, alltså $\frac{6}{9}(-1, -1) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. Farten är lika med längden på gradientvektorn, alltså

$$|\nabla f(1, 1)| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

- b) Först måste man normera riktningen: $|(1, \sqrt{3})| = \sqrt{1+3} = 2$. Riktningen $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Riktningensderivatan:

$$D_{\vec{u}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \vec{u} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{3}.$$

- c) **Normallinjens** riktningsvektor är gradienten i punkten (eller en godtycklig skalning av denne, som t.ex. $(1, 1)$), alltså normallinjen har en parameterekvation:

$$(x, y) = (1, 1) + t(1, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

eller, i xy -planet: $y = x$.

Tangentlinjen är vinkelrät mot normallinjen, alltså dennes riktningsvektor är en godtycklig vektor vinkelrät mot $(1, 1)$, t.ex. $(1, -1)$ och därmed en parameterekvation:

$$(x, y) = (1, 1) + t(1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

För att omvandla denna ekvation till (k, m) -ekvationen i xy -planet, löser vi ut t koordinatsvis och jämför värdena: $x = 1 + t$ och $y = 1 - t$ ger $x - 1 = 1 - y$, alltså har tangentlinjen (k, m) -ekvationen i xy -planet: $y = -x + 2$. Observera att den verkligen är vinkelrät mot linjen $y = x$ i xy -planet.

- d) Tangentplanetets ekvation är $z = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1)$, alltså $z = 1 + (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \cdot (x - 1, y - 1)$, alltså $z = 1 - \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{2}{3}(y - 1)$. Multiplikation av båda leden med 3 och lite omorganisering ger följande ekvation för tangentplanet till grafytan i punkten $(1, 1, 1)$:

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Exempel 45. Antag att funktionen $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$ beskriver temperaturen i ett område i rummet. Antag att vi befinner oss i punkten $(1, 1, 1)$. Hur förändras temperaturen då i riktningen $(1, 1, 1)$? I vilken riktning förändras temperaturen snabbast och hur stor är temperaturförändringen i denna riktning?

Vi deriverar funktionen partiellt för att bestämma gradienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2(-(x^2 + y^2)^{-2})2x = -\frac{2xz^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2yz^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 1, 1) = \left(-\frac{2 \cdot 1 \cdot 1^2}{(1^2 + 1^2)^2}, -\frac{2 \cdot 1 \cdot 1^2}{(1^2 + 1^2)^2}, \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1^2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Vektorn $(1, 1, 1)$ normeras till $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Riktningensderivatan i denna riktning är

$$\begin{aligned} f'_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}(1, 1, 1) &= \nabla f(1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1\right) = 0 \end{aligned}$$

så temperaturen förändras ej i denna riktning. Den maximala temperaturförändringen sker i gradientens riktning, dvs. i riktningen $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Storleken av denna tillväxt är

$$|\nabla f(1, 1, 1)| = \left| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Läs i kursboken om relationen mellan gradienten och tangentplan.

Exempel 46. Bestäm en standardekvation för tangentplanet till nivåytan till $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ genom punkten $(1, 3, 4)$. Gradienten i punkten är normal till nivåytan (**kedjeregeln!** plus att f är **konstant** på nivåytan), alltså är tangentplanets ekvation:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, 4)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3, 4)(y - 3) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, 4)(z - 4).$$

De partiella derivatorna⁶:

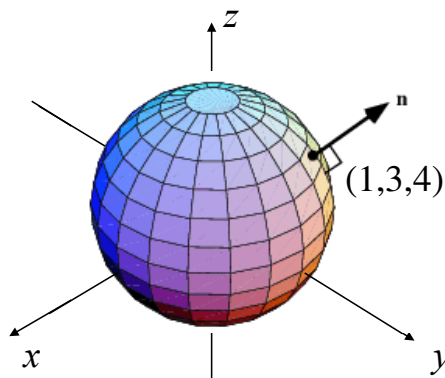
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z,$$

alltså

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, 4) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3, 4) = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, 4) = 8,$$

vilket ger tangentplanets ekvation

$$2(x - 1) + 6(y - 3) + 8(z - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 6y + 8z - 52 = 0.$$



Figur 25: Föreläsning 8: Tangentplan till nivåytan till $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ genom punkten $(1, 3, 4)$, alltså N_{26} . Nivåytan är sfären med mittpunkten i origo och med radien $\sqrt{26}$ och normalvektorn till ytan är lika med gradienten $\nabla f(1, 3, 4) = (2, 6, 8)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

⁶Mycket viktigt! Alla normalvektorer till sfärer med mittpunkten i origo är **skalningar av Ortsvektorn** med slutpunkten där normalen ställs upp! Här $\vec{n} = (2, 6, 8) = 2(1, 3, 4)$.

Föreläsning 9: Taylorserier, kvadratiska former

Taylorapproximationer, kvadratiska former

För differentierbara funktioner av n variabler vet vi att $f(\vec{a} + \vec{h}) \approx f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}$. För att erhålla en bättre uppskattning av f nära punkten $\vec{a}$ behöver vi härleda en flerdimensionell motsvarighet till Taylors formel.

Låt, för enkelhetens skull, f vara en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator av ordningen 1, 2, 3 osv (så många som behövs). Vi vill härleda en approximation av $f(a+h, b+k)$ och använda den endimensionella funktionen $F(t) = f(a+th, b+tk)$ för $t \in [0, 1]$. Då är $F(0) = f(a, b)$ och $F(1) = f(a+h, b+k)$.

Kedjeregeln ger:

$$\begin{aligned} F'(t) &= hf'_1(a+th, b+tk) + kf'_2(a+th, b+tk) \\ F''(t) &= h^2 f''_{11}(a+th, b+tk) + 2hk f''_{12}(a+th, b+tk) + k^2 f''_{22}(a+th, b+tk) \end{aligned}$$

osv.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F'(0) &= hf'_1(a, b) + kf'_2(a, b) \\ F''(0) &= h^2 f''_{11}(a, b) + 2hk f''_{12}(a, b) + k^2 f''_{22}(a, b) \end{aligned}$$

Men, eftersom F är endimensionell, ger Taylors formel samtidigt

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= F(1) = F(0) + F'(0) \cdot 1 + \frac{F''(0)}{2!} \cdot 1^2 + \dots \\ &= \underbrace{f(a, b)}_{f(\vec{a})} + \underbrace{f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k}_{\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f''_{11}(a, b)h^2 + 2f''_{12}(a, b)hk + f''_{22}(a, b)k^2)}_{\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}} + \dots \end{aligned}$$

där $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är Hessianmatrisen $\begin{pmatrix} f''_{11}(a, b) & f''_{12}(a, b) \\ f''_{21}(a, b) & f''_{22}(a, b) \end{pmatrix}$ (notera att $f''_{12} = f''_{21}$). Vi har härlett Taylorpolynomet av ordning två. Notera att resttermen har storleksordningen $\mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2})$, eftersom h^3 , h^2k , hk^2 och k^3 alla är uppåt begränsade av $(h^2 + k^2)^{3/2}$. Här skriver jag Taylorformeln för två- och trevariabelfunktioner på matrisform. För att få in hela formler på en rad, utelämnar jag argumenten för derivatorna, men det ska stå $f'_1(a, b)$ o.s.v. i det första fallet och $f'_1(a, b, c)$ o.s.v. i det andra fallet.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (f'_1, f'_2) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h, k) \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2})$$

$$f(a+h, b+k, c+l) = f(a, b, c) + (f'_1, f'_2, f'_3) \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + (h, k, l) \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} \\ f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + \mathcal{O}((h^2 + k^2 + l^2)^{3/2})$$

För funktioner som är tillräckligt många gånger deriverbara är Hessianmatriserna **symmetriska** (Schwarz sats!), alltså $f''_{ij} = f''_{ji}$ för alla par indexer i, j . Därför är den kvadratiska delen (**kvadratiska formen**) i utvecklingen följande för två- och trevariabelfunktioner:

$$Q(h, k) = f''_{11}h^2 + f''_{22}k^2 + 2f''_{12}hk$$

$$Q(h, k, l) = f''_{11}h^2 + f''_{22}k^2 + f''_{33}l^2 + 2f''_{12}hk + 2f''_{13}hl + 2f''_{23}kl.$$

Exempel 47. Bestäm Taylorpolynomet av ordning två till $f(x, y) = e^{xy} + x^2 + 2xy^3 + 3y$ kring punkten $(2, 0)$. Partiell derivering ger:

$$\begin{array}{lll} f'_x = ye^{xy} + 2x + 2y^3 & f''_{xx} = y^2e^{xy} + 2 & f(2, 0) = 5 \quad f''_{xx}(2, 0) = 2 \\ f'_y = xe^{xy} + 6xy^2 + 3 & f''_{xy} = (xy + 1)e^{xy} + 6y^2 \Rightarrow & f'_x(2, 0) = 4 \quad f''_{xy}(2, 0) = 1 \\ & f''_{yy} = x^2e^{xy} + 12xy & f'_y(2, 0) = 5 \quad f''_{yy}(2, 0) = 4 \end{array}$$

Taylorutvecklingen av ordning två blir därmed:

$$f(2 + h, k) = 5 + 4h + 5k + \frac{1}{2}(2h^2 + 2hk + 4k^2).$$

Extremvärden

Precis som för funktioner av en variabel är det ofta intressant att veta största och minsta värde för en funktion av n variabler. Vi börjar med att studera lokala extremvärden.

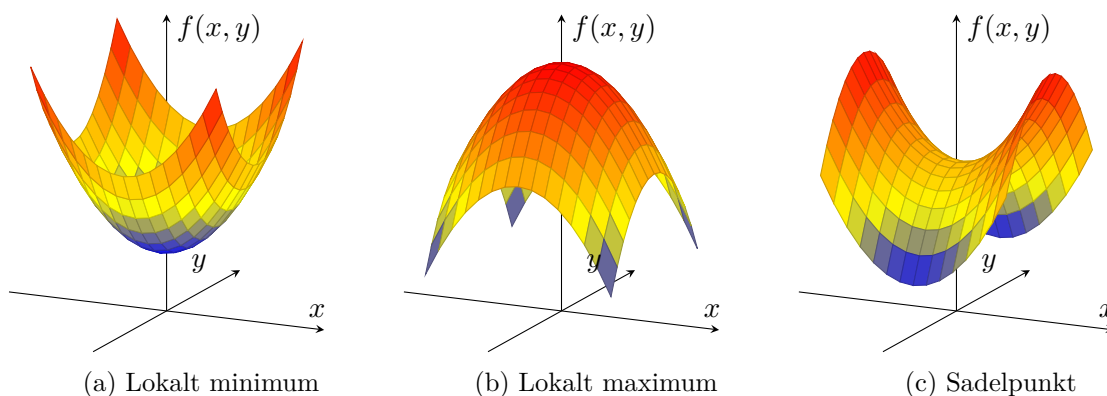
Definition 20. En funktion av n variabler sägs ha ett lokalt maximum i $\vec{a}$ om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ för alla $\vec{x}$ så att $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$.

I analogi med situationen för funktioner av en variabel är det lätt att visa att om f är partiellt deriverbar så är $f'_j(\vec{a}) = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$ i alla punkter $\vec{a}$ där f' har lokala maxima eller minima. Varför är det så? Funktionen f (av **två** variabler) uppnår sina extrema i synnerhet längs kurvorna $z(x) = f(x, b)$ och $z(y) = f(a, y)$, alltså måste derivatorna till dessa envariabelfunktioner vara lika med noll. Och dessa är ju f 's partiella derivator! Villkoret betyder då att tangentplanet till grafytan i punkten $(a, b, f(a, b))$ är parallell med xy -planet. Villkoret är också, precis som i envariabelanalys, enbart **nödvändigt**, dock inte tillräckligt (tänk på terrass).

Definition 21. En punkt $\vec{a}$ där $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ kallas en *kritisk punkt* till f .

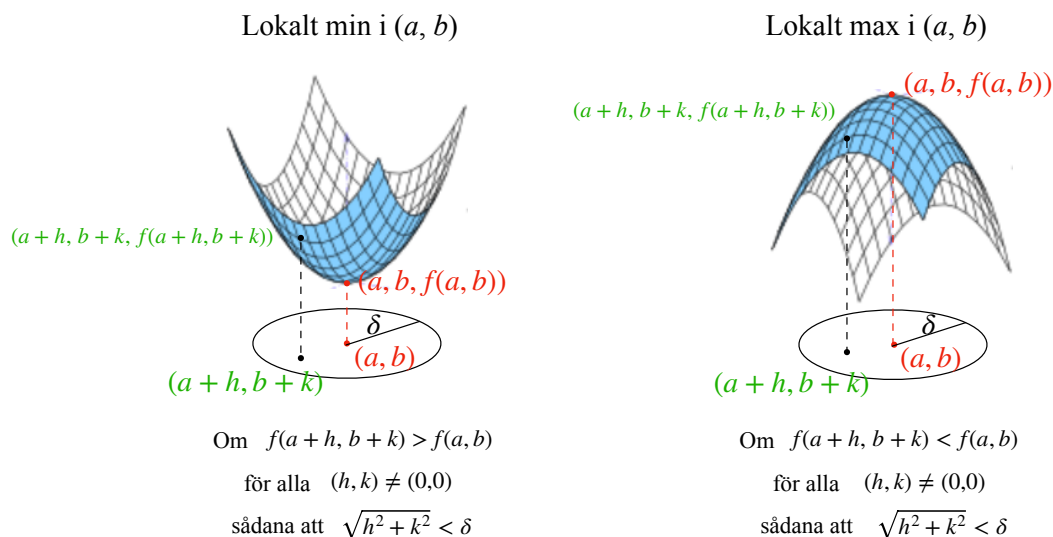
Eftersom alla lokala extrempunkter $\vec{a}$ till f i vilka f är partiellt deriverbar också är kritiska punkter, så kan lokala extrempunkter bara inträffa i **kritiska** punkter, **singulära** punkter (∇f existerar ej) och **randpunkter** till D_f . Jämför situationen i envariabelanalysen.

Det är inte säkert att en kritisk punkt är en lokal extrempunkt. Allmänt kan en funktion ha tre typer av utseende kring en kritisk punkt.



Med hjälp av Taylorapproximationen av en funktion ska vi ta fram en metod för att karakterisera kritiska punkter.

Låt f vara en funktion av n variabler med en kritisk punkt i $\vec{a}$.



Figur 27: Föreläsning 9: Lokalt minimum och maximum. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Lokalt minimum i $\vec{a} \Rightarrow f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) \geq 0$ för alla $\vec{h}$ så att $|\vec{h}| < \delta$

Lokalt maximum i $\vec{a} \Rightarrow f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) \leq 0$ för alla $\vec{h}$ så att $|\vec{h}| < \delta$ (se illustrationerna ovan för både minimi- och maximipunkt)

Sadelpunkt i $\vec{a} \Rightarrow f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$ antar både positiva och negativa värden oavsett hur litet vi väljer $\vec{h}$.

Taylorutveckling av f kring $\vec{a}$ ger

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \underbrace{\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}}_{=0, \text{ om } f \text{ har en kritisk punkt i } \vec{a}} + \vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h} + \mathcal{O}(|\vec{h}|^3).$$

Tillräckligt nära origo är $\mathcal{O}(|\vec{h}|^3)$ obetydlig jämfört med $\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}$, som har storleksordning $\mathcal{O}(|\vec{h}|^2)$, så beteendet hos $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$ bestäms av beteendet hos $\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}$ (för rigoröst bevis, se kursboken).

Definition 22. En $n \times n$ -matris A sägs vara

- *positivt definit* om $\vec{h}^T A \vec{h} > 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,
- *negativt definit* om $\vec{h}^T A \vec{h} < 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,
- *positivt semidefinit* om $\vec{h}^T A \vec{h} \geq 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,
- *negativt semidefinit* om $\vec{h}^T A \vec{h} \leq 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,
- *indefinit* om $\vec{h}^T A \vec{h}$ antar både positiva och negativa värden.

Genom att kombinera definitionen ovan med Taylorutvecklingen och diskussionen om tecknet på $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$, så ser vi tämligen direkt att:

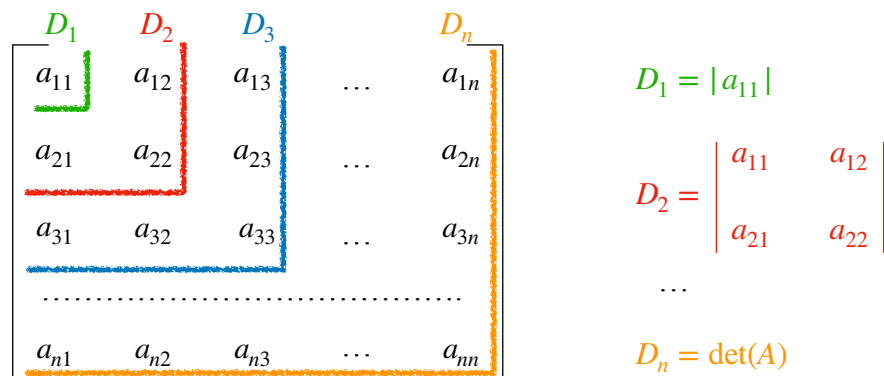
Sats 12. Antag att $\vec{a}$ är en kritisk punkt till f och att Hessianmatrisen $\mathcal{H}_f(\vec{x})$ är kontinuerlig i en omgivning till $\vec{a}$. Då gäller

1. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är positivt definit, så har f ett lokalt minimum i $\vec{a}$.

2. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är negativt definit, så har f ett lokalt maximum i $\vec{a}$.
3. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är indefinit, så har f en sadelpunkt i $\vec{a}$.
4. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är positivt eller negativt semidefinit, så kan f ha lokalt maximum, minimum, eller en sadelpunkt i $\vec{a}$.

Slutsatsen i fjärde fallet följer av att resttermen i Taylorutvecklingen för semidefinita $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ kommer bestämma tecknet på $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$.

Sats 13. (Sats 8, Adams 10.7) Låt A vara en symmetrisk $n \times n$ -matris med reella element, alltså $a_{ij} \in \mathbb{R}$ för alla i och j . Låt D_i för $i = 1, 2, \dots, n$ betecknar del-determinanterna som i bilden.



Figur 28: Föreläsning 9: Illustration till Sats 8 från Adams 10.7. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Då är matrisen A :

- positivt definit om $D_i > 0$ för alla i
- negativt definit om $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, D_4 > 0, \dots$, alltså omväxlande minus och plus, ända till den sista D_n
- indefinit om $|A| = D_n \neq 0$, men ingen av ovanstående gäller.

Om $|A| = D_n = 0$, ger satsen inget svar om A 's karaktär.

Satsen ovan i kombination med Sats 12 ger oss ett väldigt enkelt test (**andra derivatatestet**) för lokala extrempunkter för tvåvariabelfunktioner. Då är $n = 2$ och funktionen f har ett lokalt extremum i punkten (a, b) om $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ (d.v.s. (a, b) är en kritisk punkt) och Hessianens determinant i punkten (a, b) är positiv, alltså

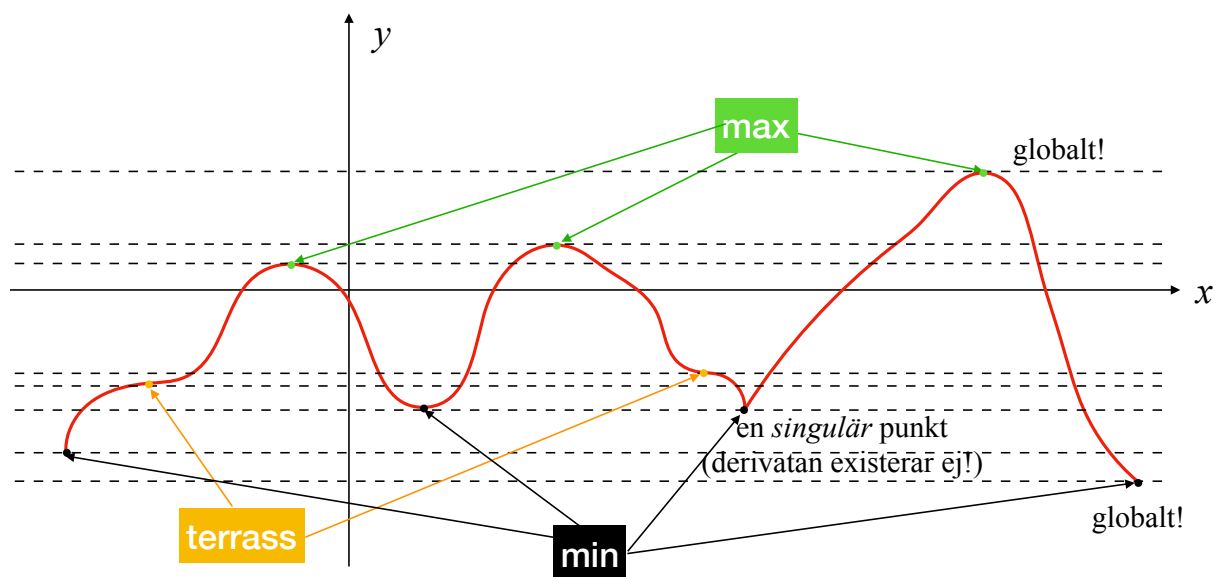
$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{11}(a, b) & f''_{12}(a, b) \\ f''_{21}(a, b) & f''_{22}(a, b) \end{vmatrix} > 0$, eftersom precis då är Hessianmatrisen positivt- eller negativt definit. Om då dessutom $D_1 = f''_{11}(a, b) > 0$, då är (a, b) ett **lokalt minimipunkt** (Hessianen är positivt definit) och om $D_1 = f''_{11}(a, b) < 0$, då är (a, b) ett **lokalt maximipunkt** (Hessianen är negativt definit).

OBS: Så här känner man igen om en kvadratisk form är positivt- eller negativt definit, eller indefinit **utan** Sats 10.7 från Adams:

- om uttrycket består av kvadrater av reella tal med **enbart plustecken** (som t.ex. $h^2 + k^2$ eller $6(h + \frac{1}{2}k)^2 + \frac{1}{2}k^2$), är formen **positivt definit**, ty $x^2 \geq 0$ för $x \in \mathbb{R}$.

- om uttrycket består av kvadrater av reella tal med **enbart minustecken** (som t.ex. $-h^2 - k^2$ eller $-6(h + \frac{1}{2}k)^2 - \frac{1}{2}k^2$), är formen **negativt definit**, ty $-x^2 \leq 0$ för $x \in \mathbb{R}$.
- om uttrycket består av kvadrater av reella tal med **olika tecken** (som t.ex. $h^2 - k^2$ eller $6(h + \frac{1}{2}k)^2 - \frac{1}{2}k^2$), är formen **indefinit**, ty vi kan uppnå både positiva och negativa resultat genom att nollställa ett kvadratuttryck och inte nollställa det andra. Så till exempel blir $h^2 - k^2$ positivt för $(h, k) = (1, 0)$ och negativt för $(h, k) = (0, 1)$. Uttrycket $6(h + \frac{1}{2}k)^2 - \frac{1}{2}k^2$ blir positivt för $(h, k) = (1, 0)$ och negativt för $(h, k) = (-\frac{1}{2}, 1)$.

Föreläsning 10: Extremvärden, klassificering av kritiska punkter



Figur 29: Föreläsning 10: Extrempunkter (maximi- och minimipunkter) till en envariabelfunktion kan finnas: i definitionsmängdens randpunkter, eller i inre punkter till definitionsmängden som är *singulära* punkter (där derivatan inte existerar) eller *stationära* / *kritiska* punkter (där funktionens derivata är lika med noll) om derivatan byter tecken i denna punkt. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Först några exempel som man klarar utan att använda avancerade teorier:

- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ som är definierad på följande definitionsmängd (uttrycket under rottecknet ska vara icke-negativt!):

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

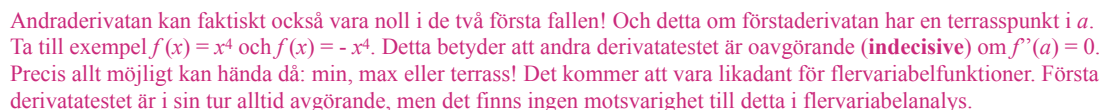
alltså på enhetscirkelskivan med mittpunkten i $(0, 0)$. Funktionen uppnår bara icke-negativa värden, och uppnår värdet 0 på definitionsmängdens rand (enhetscirkeln). Det globala minimum är alltså lika med 0. Det globala maximum är lika med 1 och uppnås bara i punkten $(0, 0)$. Grafytan till funktionen är förstas den övre halvsfären med radien 1 och mittpunkten i origo. Det är också ganska klart även utan beräkningar att tangentplanet till grafytan i punkten $(0, 0, 1)$ är planet $z = 1$ som är parallellt med xy -planet.

- $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ är definierad på hela $\mathbb{R}^2$. Denna funktionen uppnår bara positiva värden. Det globala maximum är $f(0, 0) = 1$ och det globala minimum existerar ej. Varför inte?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

men värdet 0 uppnås inte för något argument från $\mathbb{R}^2$.

- $f(x, y) = ax + by + c$, där $a, b, c \neq 0$, har ett plan som graf. Då är det också tydligt att funktionen uppnår varken ett globalt max eller min. Här finns det inte heller några guppar i grafen eller punkten där tangentplanet är parallellt med xy -planet. Därför finns



det inte ens *lokala* extrempunkter. Tänk att funktionens graf är sitt egna tangentplan i varje punkt.

- F10_appendix_TRAVIS_Topic15_Local_Extrema

$$x^2+y^2-6x+4y+10 = (x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)-13+10 \Rightarrow f(x,y) = (x-3)^2+(y+2)^2-3,$$

vilket betyder att grafen är paraboloid med vertex i $(3, -2, -3)$, uppnår därmed inget maximalt värde och har ett globalt minimum lika med $-3 = f(3, -2)$.

Idag kommer vi framförallt att undersöka extrempunkter för tvåvariabelfunktioner som ligger **inuti**⁷ definitionsmängden och där funktionen är deriverbar. För detta använder vi andra derivatetestet som var härlett under Föreläsning 9:

Sats 14. (Andra derivatetestet). Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en C^3 -funktion och (a, b) vara en stationär punkt inuti D_f , d.v.s.

$$\nabla f(a, b) = (f'_1(a, b), f'_2(a, b)) = (0, 0).$$

Låt dessutom D_2 beskriva determinanten till funktionens Hessianmatris i punkten (a, b) , alltså

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{11}(a, b) & f''_{12}(a, b) \\ f''_{21}(a, b) & f''_{22}(a, b) \end{vmatrix}.$$

Dä gäller följande:

- Om $D_2 > 0$, är (a, b) en **extrempunkt** till f :
 - Om $D_1 = f''_{11}(a, b) > 0$ (alltså är Hessianen **positivt definit**), är (a, b) en **minimipunkt** till f
 - Om $D_1 = f''_{11}(a, b) < 0$ (alltså är Hessianen **negativt definit**), är (a, b) en **maximipunkt** till f
 - (**OBS:** Om $D_1 = f''_{11}(a, b) = 0$, har vi $D_2 = 0 - (f''_{12}(a, b))^2 \leq 0$, alltså kan inte $D_2 > 0$ gälla.)
- Om $D_2 < 0$ (alltså är Hessianen **indefinit**), är (a, b) en **sadelpunkt** till f .
- Om $D_2 = 0$, ger satsen inget svar.

Satsen är direkta följden av Taylorutvecklingen och satsen om kvadratiska former (Adams 10.7, sats 8) som vi gick igenom under senaste föreläsning. Om ni ska analysera en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ med $n \geq 2$, behöver ni bedöma Hessianen m.h.a. kriterier för $D_1, D_2, \dots, D_n$ i sats 8 (En uppgift med en trevariabelfunktion finns som sista exemplet i Föreläsning 10.). Vi ska nu tillämpa satsen på några exempel av tvåvariabelfunktioner. (Se även den ovannämnda appendix-filen med fler exempel från Travis.)

Exempel 48. Karakterisera de kritiska punkterna $(0, 0)$ och $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$ till funktionen $f(x, y) = 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3$.

Partiell derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= 6x + 3y \\ f'_2(x, y) &= 3x + 2y + 3y^2 \end{aligned} \quad (\text{och vi ser att de givna punkterna faktiskt är kritiska})$$

$$\begin{aligned} f''_{11} &= 6 \\ f''_{12} &= 3 \\ f''_{22} &= 2 + 6y \end{aligned} \quad \text{Så Hessianmatrisen blir, i de kritiska punkterna:}$$

⁷På föreläsningar 11 och 12 kommer vi att se närmare vad som händer på randen till ett område, och vi kommer att lära känna flera metoder för att undersöka detta. Det blir nämligen betydligt mer komplicerat än i envariabelanalys!

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f(0,0) \vec{h} = 6h^2 + 6hk + 2k^2 = 6\left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{1}{2}k^2$$

vilket endast antar positiva värden, och vi således får ett lokalt minimum

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) \vec{h} = 6h^2 + 6hk + k^2 = 6\left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{2}k^2$$

vilket antar både positiva och negativa värden, och vi således får en sadelpunkt.

Exempel 49. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = xy - x^2y - y^2$ och klassificera dessa.

Vi deriverar funktionen partiellt för att hitta de kritiska punkterna.

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= y - 2xy \\ f'_2(x, y) &= x - x^2 - 2y \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y(1 - 2x) = 0 \\ x - x^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger $y = 0$ eller $1 - 2x = 0$. Nu kollar vi vad som händer med den andra ekvationen i båda fall:

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{kritiska punkter } (0, 0) \text{ och } (1, 0) \\ 1 - 2x = 0 &\Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{kritisk punkt i } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

Vi deriverar funktionen igen för att bestämma Hessianmatrisen.

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= -2y \\ f''_{12}(x, y) &= 1 - 2x \\ f''_{22}(x, y) &= -2 \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x \\ 1 - 2x & -2 \end{pmatrix}$$

I de kritiska punkterna får vi:

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi undersöker motsvarande kvadratiska former:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} &\Rightarrow 2hk - 2k^2 = -2\left(k - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{2} && (\text{indefinit, alltså sadelpunkt}) \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} &\Rightarrow -2hk - 2k^2 = -2\left(k + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{2} && (\text{indefinit, alltså sadelpunkt}) \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} &\Rightarrow -\frac{h^2}{4} - k^2 && (\text{negativt definit, alltså lokalt maximum}) \end{aligned}$$

Alternativt, från Sats 10.7 från Adams:

- Punkt $(0, 0)$: $D_2 = 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -1 < 0$, alltså är Hessianen indefinit, vilket ger en sadelpunkt.

- Punkt $(1, 0)$: $D_2 = 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-1) = -1 < 0$, alltså är Hessianen indefinit, vilket ger en sadelpunkt.
- Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$: $D_2 = (-\frac{1}{4}) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = \frac{1}{2} > 0$, och $D_1 = -\frac{1}{4} < 0$, vilket betyder att Hessianen är negativt definit, alltså har f ett maximipunkt där.

Om den kvadratiska formen är semidefinit för en kritisk punkt så kan den kritiska punkten karakteriseras genom studie av funktionsuttrycket eller Taylorutveckling av högre ordning kring punkten. För funktioner av en variabel gäller att om funktionen f har ett lokalt minimum i $x = a$ och inga andra kritiska eller singulära punkter så har f globalt maximum i $x = a$. Som följande exempel visar kan vi inte dra den slutsatsen för funktioner av flera variabler.

Exempel 50. Undersök de kritiska punkterna till $f(x, y) = x^2(1+y)^3 + y^2$ och se om funktionen har ett globalt minimum.

Partiell derivering och insättning i villkoret *gradienten är lika med noll* ger först:

$$f'_1(x, y) = 2x(1+y)^3 = 0, \quad f'_2(x, y) = 3x^2(1+y)^2 + 2y = 0.$$

Den första ekvationen ger $x = 0$ eller $y = -1$, vilket insatt i den andra ekvationen ger den enda kritiska punkten $(0, 0)$. Vidare gäller

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= 2(1+y)^3|_{(0,0)} &= 2 \\ f''_{12}(x, y) &= 6x(1+y)^2|_{(0,0)} &= 0 \\ f''_{22}(x, y) &= 6x^2(1+y) + 2|_{(0,0)} &= 2 \end{aligned}$$

så den kvadratiska formen för Hessianmatrisen är $2h^2 + 2k^2$, vilket motsvarar ett lokalt minimum 0. Funktionen har dock inget minsta värde. Längs den rätta linjen $x = 1$ är

$$f(1, y) = (1+y)^3 + y^2 \quad \text{vilket går mot } -\infty \text{ då } y \rightarrow -\infty.$$

Funktionen antar hur stora (till absolutbeloppet) negativa värden som helst.

Om vi för en funktion $f(x, y)$ kan visa att $|f(x, y)| < L$ för alla $x^2 + y^2 > R$ så kan man dock dra slutsatsen att om m är det minsta lokala extremvärdet och $m < -L$ så har f globalt minimum m .

Exempel 51. Bestäm alla kritiska punkter till $f(x, y) = 3xy - x^2 - 3y^2 + x - 12$ och karakterisera dessa.

De kritiska punkterna uppfyller

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = 3y - 2x + 1 = 0 \\ f'_2(x, y) = 3x - 6y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3y - 2x + 1 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3y - 4y + 1 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (2, 1).$$

Funktionen har andraderivatorna $f''_{11}(x, y) = -2$, $f''_{12}(x, y) = 3$, och $f''_{22}(x, y) = -6$ så Hessianmatrisen, med motsvarande kvadratiska form, blir

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow -2h^2 + 6hk - 6k^2 = -2(h^2 - 3hk) - 6k^2 = -2\left(\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2\right) - 6k^2 \\ = -2\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 + \frac{9}{2}k^2 - 6k^2 = -2\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{3}{2}k^2 < 0 \quad \forall (h, k) \neq (0, 0).$$

Hessianmatrisen är negativt definit, så den kritiska punkten är ett lokalt maximum.

Till slut ett exempel med en trevariabelfunktion. Observera att man här inte kan använda andraderivatatestet som i Sats 14, eftersom $D_2 > 0$ inte garanterar ett extremum som för tvåvariabelfunktioner. Tänk på den möjliga sekvensen $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, som beskriver en Hessianmatris som är indefinit. Här ska man i stället använda Sats 12 formulerad i anteckningar till Föreläsning 9.

Exempel 52. bestäm alla kritiska punkter till $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6xy - 6xz + 8yz + 4z$ och karakterisera dessa.

De kritiska punkterna uppfyller

$$\begin{cases} f'_1(x, y, z) = 3x^2 + 6x - 6y - 6z = 0 \\ f'_2(x, y, z) = 8y - 6x + 8z = 0 \\ f'_3(x, y, z) = 12z - 6x + 8y + 4 = 0 \end{cases}$$

Vi kan först ta fram z genom att jämföra uttrycken $6x - 8y$ som förekommer i båda ekvationer: $8z = 12z + 4$ ger $-4z = 4$, alltså $z = -1$. Nästa steget är insättning av $z = -1$ i de första två ekvationer. Detta ger ett 2×2 ekvationssystem med variablerna x och y :

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x - 6y = -6 \\ 8y - 6x = 8 \end{cases}$$

Vi får $y = \frac{3}{4}x + 1$ från den andra ekvationen, vilket insatt i ekvation 1 reducerar antalet variabler till ett:

$$3x^2 + 6x - 6\left(\frac{3}{4}x + 1\right) = -6 \Rightarrow 3x^2 + 6x - \frac{9}{2}x - 6 = -6 \Rightarrow 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(2x + 1) = 0.$$

Detta ger $x = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$, vilka ger $y = 1$ resp. $y = \frac{5}{8}$. Och, förstås, $z = -1$ i både fallen.

Vi får alltså två kritiska punkter: $(0, 1, -1)$ och $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, -1)$.

Dags för Hessianmatrisen (jag utelämnar argumentet, men alla derivatorna ska vara evaluerade i punkten (x, y, z)):

$$\begin{array}{lll} f''_{11} & = 6x + 6, & f''_{12} & = -6, & f''_{13} & = -6 \\ f''_{21} & = -6, & f''_{22} & = 8, & f''_{23} & = 8 \\ f''_{31} & = -6, & f''_{32} & = 8, & f''_{33} & = 12 \end{array}$$

vilket ger Hessianen

$$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x+6 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 8 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Deldeterminanterna är:

- $D_1 = 6x + 6$ är **positiv** för både $x = 0$ och $x = -\frac{1}{2}$.

-

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6x+6 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 48x + 48 - 36 = 48x + 12 = 12(4x + 1)$$

är **positiv** för $x = 0$ och **negativ** för $x = -\frac{1}{2}$.

-

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6x+6 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 8 \\ -6 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 48(1 + 4x)$$

är **positiv** för $x = 0$ och **negativ** för $x = -\frac{1}{2}$.

Sammanfattningsvis:

- I punkten $(0, 1, -1)$: $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, alltså är Hessianen **positivt definit**, vilket betyder att punkten är en **lokal minimipunkt**.
- I punkten $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, -1)$: $D_1 > 0$, $D_2 < 0$, $D_3 < 0$, alltså är Hessianen **indefinit**, vilket betyder att punkten är en **sadelpunkt**.

Föreläsning 11: Extremvärden på begränsade områden, bivillkor och Lagrangemultiplikatorer

Extremvärden för funktioner på kompakta områden

För kontinuerliga funktioner av flera variabler som är definierade på ett kompakt (begränsat och slutet) område gäller, precis som i envariabelanalysen (satsen om extremvärden) att funktionen har ett maximum och ett minimum. Vi ska därför ta fram en metod för att bestämma dessa globala extremvärden.

Exempel 53. Bestäm största och minsta värde för $f(x, y) = xy^2 - x - y$ i kvadraten D : $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

1. **Inre punkter.** Vi undersöker om funktionen har några kritiska punkter i D° och deriverar partiellt:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= y^2 - 1 = 0 \\ f'_2(x, y) &= 2xy - 1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \pm 1 \\ x &= \frac{1}{2y} \end{aligned} \quad (\text{kritiska punkter } (\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -1))$$

Endast den första av de kritiska punkterna ligger inom definitionsmängden.

2. **Rand.** Vi parametriserar de fyra randbitarna och undersöker om f har några kritiska punkter på dessa.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x, 0), & \text{ger } \varphi(x) &= -x & \text{för } 0 \leq x \leq 2 & & (\text{inga kritiska punkter}) \\ \varphi(x) &= f(x, 2), & \text{ger } \varphi(x) &= 3x - 2 & \text{för } 0 \leq x \leq 2 & & (\text{inga kritiska punkter}) \\ \varphi(y) &= f(0, y), & \text{ger } \varphi(y) &= -y & \text{för } 0 \leq y \leq 2 & & (\text{inga kritiska punkter}) \\ \varphi(y) &= f(2, y), & \text{ger } \varphi(y) &= 2y^2 - 2 - y & \text{för } 0 \leq y \leq 2 & & (\text{kritisk punkt i } (2, \frac{1}{4})) \end{aligned}$$

så på randen har vi bara den kritiska punkten $(2, \frac{1}{4})$

3. **Hörn.** Randstyckena har ändpunkter i hörnen $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$.

Vi undersöker slutligen funktionsvärdena i de sex punkter där maximum eller minimum kan inträffa.

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 2) = -2, \quad f(2, 0) = -2, \quad f(2, 2) = 4, \quad f(\frac{1}{2}, 1) = -1, \quad f(2, \frac{1}{4}) = -\frac{17}{8},$$

vilket ger oss ett maximum 4, och ett minimum $-\frac{17}{8}$.

Vi hittar alltså eventuella extrempunkter i det inre genom att undersöka de kritiska punkterna som tidigare. Kritiska punkter på randen fås genom att vi parametriserar randen och betraktar funktionen på randen som en funktion av en variabel (parametern). Om vi hade velat hitta maximum och minimum till funktionen i exemplet ovan på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$, så hade vi fått använda parametriseringen

$$\psi(\theta) = f(2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

vilket ger

$$\psi(\theta) = 8 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 2 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta)$$

och sedan satt derivatan av ψ till noll och löst ut θ . "Hörnet" i detta fall hade varit $(2 \cos(0), 2 \sin(0)) = (2, 0)$.

Exempel 54. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ då $x^2 + y^2 \leq 1$.

Vi söker först eventuella kritiska punkter i definitionsområdets inre

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = 1 + 2x = 0 \\ f'_2(x, y) = 1 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Vi parametriserar därefter randen enligt $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\psi(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta) + \sin(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)$$

$$\psi'(\theta) = -\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \tan(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ger } (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ och } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ ger } (x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Funktionsvärdena i extrempunkterna är $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$ respektive $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$. Maximum blir $1 + \sqrt{2}$ och minimum blir $1 - \sqrt{2}$ (eftersom $-\frac{1}{2} < 1 - \sqrt{2}$).

Om en funktion f av flera variabler är definierad på ett icke-kompakt område är det inte säkert att den har ett största eller minsta värde, utan detta måste motiveras på något sätt.

Exempel 55. Avgör om funktionen $f(x, y) = \frac{4x - 3}{1 + x^2 + y^2}$ har ett maximum och ett minimum på området $-1 \leq y \leq 1$.

Om funktionen är begränsad för stora värden på $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, så kommer eventuella maximum eller minimum att finnas på den kompakta mängden $-1 \leq y \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq r$ och på denna har varje kontinuerlig funktion maximum och minimum

$$|f(x, y)| = \frac{|4x - 3|}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{|4x| + 3}{1 + r^2} \leq \frac{4r + 3}{1 + r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Detta implicerar att f är begränsad för stora r , och följaktligen att f har max och min.

Exempel 56. Visa att om $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, då $f(x, y) = (x + 2y)e^{-(x^2 + y^2)} \rightarrow 0$. En bra lösning kan vara att gå över till polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (då gäller förstås $x^2 + y^2 = r^2$) och visa att $f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow \infty$, och detta oavsett θ :

$$f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta + 2r \sin \theta)e^{-r^2} = (\cos \theta + 2 \sin \theta)re^{-r^2}.$$

$$0 \leq |f(x(r, \theta), y(r, \theta))| = |\cos \theta + 2 \sin \theta|re^{-r^2} \leq 3 \frac{r}{e^{r^2}} \rightarrow 0$$

då $r \rightarrow \infty$ (ett standardgränsvärde i oändligheten). Begränsning för sinus och cosinus kommer från $|\cos \theta| \leq 1$ och $|\sin \theta| \leq 1$ för alla θ , samt triangelolikheten.

Lagrangemultiplikatorer

Vi ska i fortsättningen studera problemet att maximera eller minimera en funktion under ett eller flera bivillkor. Ett typexempel är:

$$\text{maximera } f(x, y) \quad \text{givet att } g(x, y) = C.$$

Bivillkoret $g(x, y) = C$ definierar en kurva i planet. Vi börjar med ett exempel där det, för kurvan $g(x, y) = C$, är lätt att lösa ut y som en funktion av x . Problemet blir då genast endimensionellt.

Exempel 57. Bestäm det kortaste anståndet från origo till kurvan $xy = 1$, $x, y > 0$.

Vi vill minimera $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, eller ekvivalent $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $xy = 1$. Villkoret kan skrivas $y = \frac{1}{x}$, så vi vill alltså minimera

$$g(x) = f(x, \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (\text{för } x > 0)$$

$$g'(x) = 2x - 2x^{-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(1 - \frac{1}{x^4}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

notera att de två första möjliga värdena på x ej uppfyller initialvillkoret $x, y > 0$. I $x = 1$ får vi avståndet $\sqrt{1^2 + (\frac{1}{1})^2} = \sqrt{2}$ och det är det kortaste avståndet eftersom $g''(1) = 2 + \frac{6}{1^4} = 8 > 0$.

Ett alternativ som kan vara användbart om det inte går att lösa ut y som en funktion av x i $g(x, y) = C$ är att använda en parametrisering av $g(x, y) = C$. Om vi exempelvis vill maximera $f(x, y) = (2x + 3y + 1)^2$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ kan vi sätta $x = \cos(t)$ och $y = \sin(t)$ och istället försöka maximera $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Detta envariabelproblem liknar de vi stötte på när vi sökte extremvärden till randen av kompakta områden. Räkningarna blir dock ganska invecklade, så vi ska ta fram en mer generell metod som ger enklare räkningar.

Lagranges metod variant 1

Antag att vi på något sätt vet att $f(x, y)$ har ett maximum på kurvan $g(x, y) = 0$. Om maximumet inträffar i punkten (a, b) och $\nabla g(a, b) \neq 0$, så kan kurvan nära (a, b) parametriseras som $(x(t), y(t))$ med $(x(t_0), y(t_0)) = (a, b)$ (följer av implicita funktionssatsen). Funktionen $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ har då maximum i $t = t_0$, så

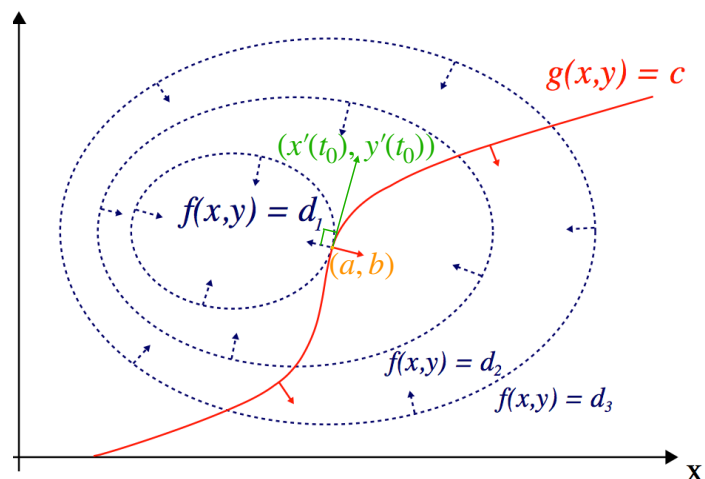
$$0 = \varphi'(t_0) = f'_1(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f'_2(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) = \nabla f(a, b) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Men $(x'(t_0), y'(t_0))$ är tangentvektorn till kurvan $g(x, y) = 0$ i (a, b) . Denna vektor är vinkelrät mot $\nabla g(a, b)$, så enligt ekvationen ovan så är

$$\nabla f(a, b) \text{ och } \nabla g(a, b) \text{ parallella.}$$

Detta är i sin tur ekvivalent med $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$, eller

$$\begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{vmatrix} = 0.$$



Figur 31: Föreläsning 11: Den röda kurvan visar bivillkoret $g(x, y) = c$. De blåa kurvorna är nivåkurvor för $f(x, y)$. Punkten där det röda bivillkoret tangerar en blå nivåkurva är det maximipunkten för $f(x, y)$ längs bivillkoret, eftersom $d_1 > d_2$. (Bild: Wikipedia.)

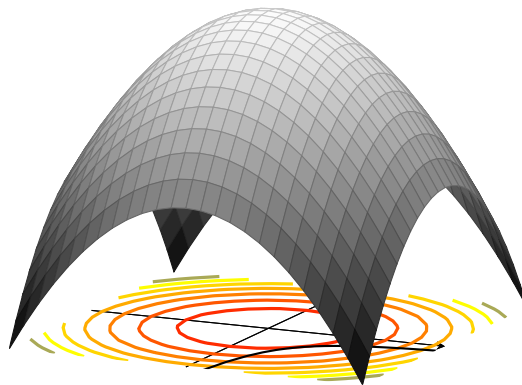
Maximum (minimum) av $f(x, y)$ givet att $g(x, y) = 0$ kan alltså inträffa i följande punkter:

1. Ändpunkter till $g(x, y) = 0$
2. Punkter där $\nabla g(x, y) = \vec{0}$ (eller ej exist.)
3. Punkter som uppfyller ekvationssystemet (metoden i Adams)

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = \lambda g'_1(x, y) \\ f'_2(x, y) = \lambda g'_2(x, y) \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ekvivalent (som på föreläsningar):

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_1(x, y) & f'_2(x, y) \\ g'_1(x, y) & g'_2(x, y) \end{vmatrix} = 0. \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$



Ekvationssystemet kan också skrivas kortfattat som $\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \vec{0}$ där $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ kallas för Lagrangefunktionen. I figuren ovan ser vi paraboloiden som ges av $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 9$ med tillhörande nivåkurvor projicerade på xy -planet. Vi ser även nivåkurvan $g(x, y) = 0$ till funktionen g (svart) som tangerar en av f 's nivåkurvor.

Titta också gärna på en alternativ förklaring för metoden, utan den implicita funktionssatsen och parametrisering för bivillkoret i Travis Topic 16, minuterna 19:00–26:00:

F11_appendix_TRAVIS_Topic16_Constrained_Extrema

Följande superfina bilder (en bild ovan och två till i början till F12) kommer från Wikipedia och referensen för källorna finns på:

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier

Till slut några ord om begreppen *inre punkt*, *randpunkt*, *öppen mängd*, *sluten mängd*, *randen* och på vilket sätt dessa begrepp är relativa:

- *Omgivning*: ett öppet (utan ändpunkter) intervall i $\mathbb{R}$, en cirkelskiva utan rand (cirkeln) i $\mathbb{R}^2$, ett klot utan rand (sfären) i $\mathbb{R}^3$.
- *Inre punkt* i en mängd: en punkt som kommer in i mängden med en viss (hel!) omgivning.
- *Randpunkt* till en mängd: en punkt vars varje omgivning innehåller både element från mängden och utanför mängden.
- *Öppen mängd* består av enbart inre punkter, alltså innehåller **inga randpunkter**
- *Sluten mängd* innehåller **alla sina randpunkter**

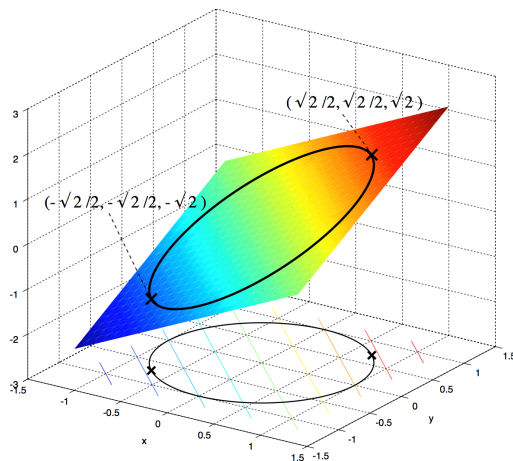
Det finns förstas mängder som är **varken öppna eller slutna** (om de innehåller vissa sina randpunkter, men inte alla).

	$\mathbb{R}^1$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
öppen omgivning	 ett intervall utan randen (2 ändpunkter)	 en cirkelskiva utan randen (cirkeln)	 ett klot utan randen (sfären)
	öppen mängd (alla punkter kommer in med en viss omgivning)	varken öppen eller sluten. Inga punkter kommer in med en omgivning. Två randpunkter saknas. Mängden består enbart av randpunkter i $\mathbb{R}^2$.	varken öppen eller sluten. Inga punkter kommer in med en omgivning. Två randpunkter saknas. Mängden består enbart av randpunkter i $\mathbb{R}^3$.
	Existerar ej	öppen mängd (alla punkter kommer in med en viss omgivning)	varken öppen eller sluten. Inga punkter kommer in med en omgivning. Många randpunkter saknas. Mängden består enbart av randpunkter i $\mathbb{R}^3$. Varje klot med mittpunkten i en punkt på cirkelskivan innehåller både punkter från cirkelskivan och utanför den (på både "baksidan" och "framsidan"), alltså är per definition en randpunkt!
	Existerar ej	Existerar ej	öppen mängd (alla punkter kommer in med en viss omgivning)

Figur 32: Föreläsning 11: Relativitet av vissa begrepp. Viktigaste budskap: något som är en öppen mängd i $\mathbb{R}^2$ (t.ex. öppen cirkelskiva) är bara randen i $\mathbb{R}^3$ (respektive: ett öppet intervall är öppet i $\mathbb{R}^1$, medan en kurva—trots att den kan vara en kontinuerlig avbildning av intervallet—är bara randmängden i $\mathbb{R}^2$); detta är jätteviktigt, eftersom det bestämmer vilka metoder vi väljer medan vi letar efter extrempunkter till flervariabelfunktioner på olika mängder. Stationära punkter och Hessianen undersöks bara för öppna mängder, på randen är det Lagrange som gäller! (Bild: Hania, med KeyNote.)

Föreläsning 12: Fortsättning på bivillkor och Lagrangemultiplikatorer

Exempel 58. Maximera och minimera $f(x, y) = x + y$ på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$, alltså på nivåkurvan $g(x, y) = 0$ till $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

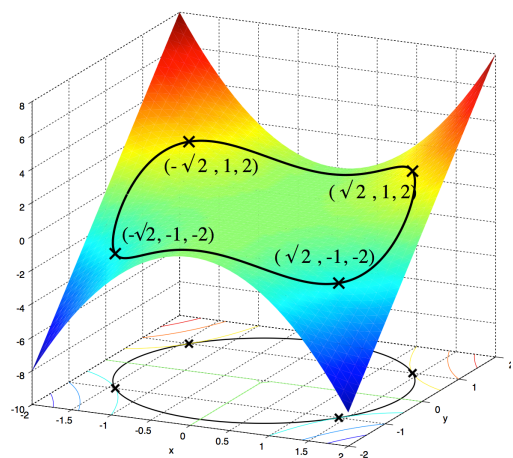


Figur 33: Föreläsning 12: Exempel. (Bild: Wikipedia. För exakta referenser se länken i F11.)

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_1(x, y) & f'_2(x, y) \\ g'_1(x, y) & g'_2(x, y) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ eller } x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Svar: Funktionens max på enhetscirkeln är $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ och min $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$.

Exempel 59. Maximera och minimera $f(x, y) = x^2 y$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 3$, alltså på nivåkurvan $g(x, y) = 0$ till $g(x, y) = x^2 + y^2 - 3$.



Figur 34: Föreläsning 12: Exempel. (Bild: Wikipedia. För exakta referenser se länken i F11.)

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_1(x, y) - f'_2(x, y) = 0 \\ g'_1(x, y) - g'_2(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2xy - x^2 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4xy^2 - 2x^3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array} \right.$$

$$4xy^2 - 2x^3 = 2x(2y^2 - x^2) = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ eller } x^2 = 2y^2).$$

Insättning av dessa två möjligheter i villkoret $x^2 + y^2 = 3$ ger sex kritiska punkter:

$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3}), (\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, -1).$$

De första två elimineras direkt, eftersom där är funktionens värde lika med noll, medan det är både positivt och negativt i de övriga fyra, vilket betyder att de första två punkter ger varken det minsta eller det största värdet på cirkeln. Vi beräknar värdena i de övriga fyra punkter (se bilden) och så är vi redo att formulera svaret:

Svar: Funktionens max på cirkeln är 2 (i två punkter) och min -2 (i två punkter). Se bilden!

Exempel 60. Maximera och minimera $f(x, y) = (2x + 3y + 1)^2$ för $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Eftersom enhetscirkeln är en sluten kurva med nollskild gradient, så uppfyller alla extrempunkter ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_1(x, y) = \lambda g'_1(x, y) \\ f'_2(x, y) = \lambda g'_2(x, y) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(2x + 3y + 1)2 = \lambda 2x \\ 2(2x + 3y + 1)3 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Om $\lambda \neq 0$, dividerar vi den andra ekvationen med den första och vi får ekvationen

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = \frac{3}{2}x \Rightarrow x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{13}{4}x^2 = 1 \\ \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} &\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) \text{ eller } \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right). \end{aligned}$$

Ekvationssystemet har också lösningen $\lambda = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$. För denna lösning gäller uppenbarligen $f(x, y) = 0$. De övriga funktionsvärdena är $f(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}) = (\sqrt{13} + 1)^2$ och $f(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}) = (-\sqrt{13} + 1)^2$, så maximum är $(\sqrt{13} + 1)^2$ och minimum är 0.

Lagranges metod variant 2

Lagranges multiplikatormetod fungerar på samma sätt om vi vill maximera funktionen $f(x, y, z)$ på ytan $g(x, y, z) = 0$, vilket motsvarar att vi maximerar / minimerar en trevariabelfunktion på nivåytan till en annan trevariabelfunktion. Även här är villkoret att gradienterna till båda nivåtytor ska vara parallella i extrempunkter (eftersom nivåytorna måste tangera varandra). Vi får då istället ett ekvationssystem med 4 ekvationer och 4 variabler.

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_1(x, y, z) = \lambda g'_1(x, y, z) \\ f'_2(x, y, z) = \lambda g'_2(x, y, z) \\ f'_3(x, y, z) = \lambda g'_3(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Även här kan man räkna utan λ , fast det finns ingen möjlighet att skriva upp en determinant (vi har bara två rader med gradienter, medan varje gradient har tre komponenter: helheten är inte kvadratisk!). Man kan ofta ställa upp en proportion som uttrycker faktum att gradienterna är parallella, men **man får aldrig någonsin sätta en variabel i nämnaren utan vidare!** En variabel kan ju vara lika med noll!

Här blir det också extra viktigt att förstå begreppet *rand* och faktum att begreppet är relativt och beror på om vi analyserar en mängd i $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. (Se förklaringen i bilden på s. 69)

Exempel 61. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ med bivillkoret $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, alltså på sfären med mittpunkten i origo och radien $\sqrt{14}$.

Vi använder Lagranges metod variant 2. Extrema finns där gradienterna till f och g är parallella.

$$\nabla f = (1, 2, 3), \quad \nabla g = (2x, 2y, 2z).$$

Att vektorerna är parallella betyder att följande proportion gäller (OBS: bara konstanter i nämnaren!):

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1} = \frac{2y}{2} = \frac{2z}{3}$$

$x = y = z = 0$ uppfyller proportionen, men punkten $(0, 0, 0)$ inte ligger på sfären, är alltså fullständigt ointressant för oss. Om $\nabla g \neq \vec{0}$, då implicerar proportionen att

$$2x = y = \frac{2}{3}z \quad \Leftrightarrow \quad (y = 2x \quad \text{och} \quad z = \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x).$$

Insättning av dessa i bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ ger

$$x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad 14x^2 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1 \quad \text{eller} \quad x = -1).$$

$x = 1$ ger punkten $(1, 2, 3)$ och $f(1, 2, 3) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$, medan $x = -1$ ger punkten $(-1, -2, -3)$ och $f(-1, -2, -3) = -14$.

Svar: Funktionens maximum på sfären är 14 och minimum -14 .

Exempel 62. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}^2$ i området D där

$$D = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}.$$

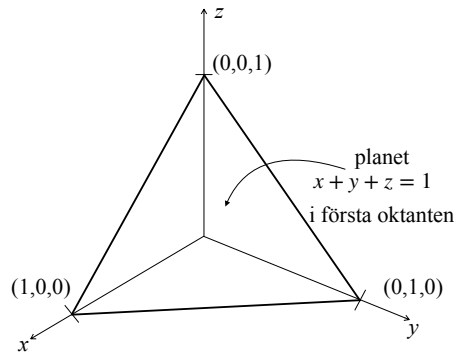
Området D är en (kompakt!) triangel i första oktanten, f är kontinuerlig, alltså uppnår garanterat sina max och min i D .

Vi observerar att i första oktanten (där $x, y, z \geq 0$) funktionen $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}^2$ antar enbart icke-negativa värden och att dessutom $f(x, y, z) = 0$ om åtminstone en av variablerna är lika med noll, och bara då! Detta betyder att

$$\min_D f(x, y, z) = 0.$$

Maximum måste antas i en punkt där

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0.$$



Figur 35: Föreläsning 12: Planet i exemplet 62. (Bild: Hania, med KeyNote.)

I maximipunkten måste $\nabla f \parallel \nabla g$ (Lagrange!).

$$\nabla f = \left(\frac{yz^2}{2\sqrt{x}}, \sqrt{x}z^2, 2\sqrt{xyz} \right), \quad \nabla g = (1, 1, 1).$$

Att $\nabla f \parallel \nabla g$ betyder att följande proportion gäller:

$$\frac{\frac{yz^2}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{\sqrt{x}z^2}{1} = \frac{2\sqrt{xyz}}{1}.$$

Vi multiplicerar hela proportionen med $\frac{2\sqrt{x}}{z}$ (vi vet redan att alla intressanta för oss variabler är nollskilda!) och får:

$$yz = 2xz = 4xy,$$

vilket ger (ty $x, y, z \neq 0$) $y = 2x$ och $z = 4x$, alltså, från villkoret $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$:

$$1 = x + 2x + 4x = 7x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{7}.$$

Vi har därför den unika lösningen $(x, y, z) = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$, vilken måste vara maximipunkten.

Svar: Det minimala värdet är 0. Det maximala värdet är $f(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}) = \frac{32}{2401}\sqrt{7}$.

OBS: överkurs på 5hp-kursen: Lagranges metod variant 3:

Låt oss härnäst undersöka problemet att maximera $f(x, y, z)$ givet två villkor $g(x, y, z) = 0$ och $h(x, y, z) = 0$. De båda villkoren definierar en kurva i rummet (skärningskurvan till nivåytorna till två trevariabelfunktioner). I varje punkt (x, y, z) på kurvan är både $\nabla g(x, y, z)$ och $\nabla h(x, y, z)$ vinkelräta mot kurvan, så vektorn $T(x, y, z) = \nabla g(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z)$ är parallell med kurvans tangent i (x, y, z) . Enligt resonemanget när vi införde multiplikatormetoden, så måste det i extrempunkten (a, b, c) gälla att $\nabla f(a, b, c) \cdot T(a, b, c) = 0$, dvs

$$\nabla f(a, b, c), \quad \nabla g(a, b, c), \quad \nabla h(a, b, c) \quad \text{ligger i samma plan.}$$

De tre gradienterna är linjärt beroende, vilket är ekvivalent med att determinanten av en matris med $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ på var sin rad måste vara noll i ett maximum/minimum.

Exempel 63. Maximera och minimera $f(x, y, z) = y$ under bivillkoren

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \quad \text{och} \quad h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Ekvationen $g(x, y, z) = 0$ definierar ett plan och $h(x, y, z) = 0$ en sfär, så skärningskurvan mellan dessa funktioner blir en cirkel, dvs en kompakt mängd. Det sökta maximum och minimum existerar således. Eftersom $\nabla f(x, y, z) = (0, 1, 0)$, $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$ och $\nabla h(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ är linjärt beroende så gäller:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2x - 2z. \quad \begin{array}{l} \text{Vi får } x = z, \text{ vilket insatt i } g \text{ och} \\ h \text{ ger ekvationssystemet} \end{array} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Vi sätter in $y = 1 - 2x$ i $2x^2 + y^2 = 1$ och får då:

$$2x^2 + (1 - 2x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x(6x - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

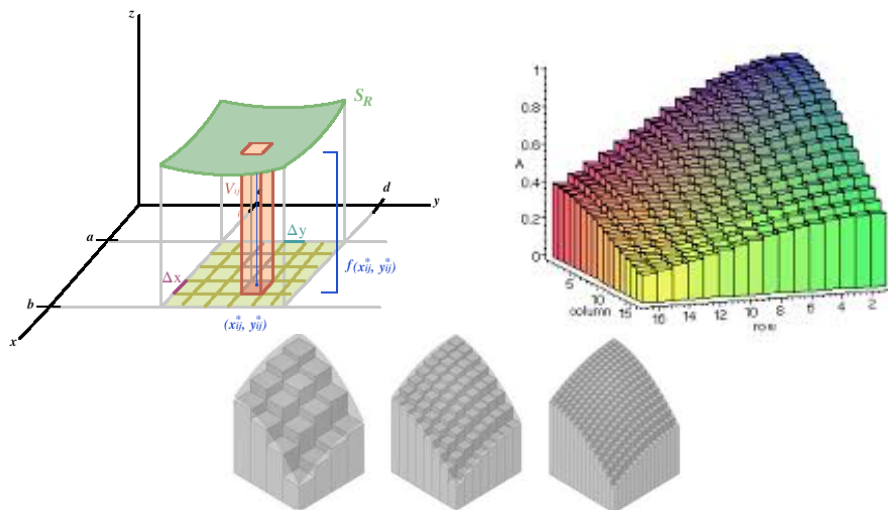
$$x = 0 \quad \text{ger} \quad z = 0 \quad \text{och} \quad y = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f(0, 1, 0) = 1 \quad (\text{maximum})$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{ger} \quad z = \frac{2}{3} \quad \text{och} \quad y = 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}. \quad (\text{minimum})$$

Svar: Det minimala värdet är $-\frac{1}{3}$. Det maximala värdet är 1.

Föreläsning 13: Dubbelintegraler, itererad integration

Vi införde integraler för att kunna lösa problemet att räkna ut arean under grafen till en funktion i en variabel. Vi har tidigare sett att grafen till en funktion av två variabler kan tolkas som en yta i rummet. Vi kan använda integraler också för att räkna ut volymen under grafen till en funktion av två variabler. Vi börjar med ett enkelt specialfall.



Figur 36: Föreläsning 13: Riemannkonstruktion: dubbelintegral som ett sätt att beräkna volym (med tecken!) mellan funktionens $z = f(x, y)$ graf och xy -planet. (Bild: Från nätet.)

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en rektangel i $\mathbb{R}^2$. Låt P_1 vara en partition av $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) och låt P_2 vara en partition av $[c, d]$ ($c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$). $P_1 \times P_2$ är en partition av Δ i delrektanglar Δ_{ij} . En funktion $\phi(x, y)$ kallas för en *trappstegsfunktion* om det finns en partition $P_1 \times P_2$ av Δ sådan att $\phi(x, y) = c_{ij}$ för alla $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Volymen under en trappstegsfunktion ges direkt av

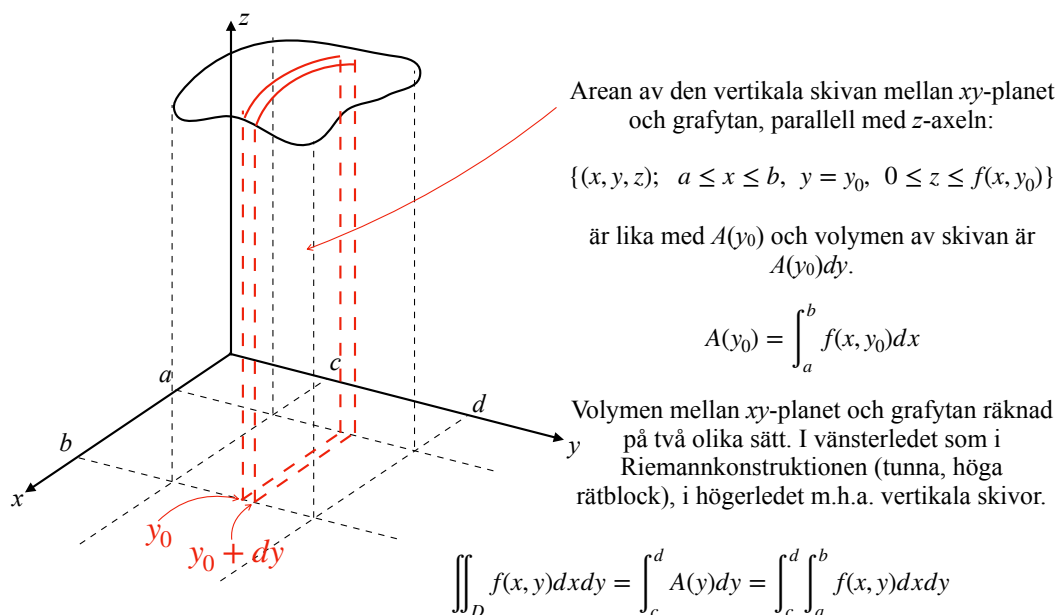
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \underbrace{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}_{\text{Arean av } \Delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \quad \text{vilket betecknas} \quad \underbrace{\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy}_{\text{Dubbelintegral}}.$$

Dubbelintegraler kan beräknas genom att vi först integrerar över den ena variabeln, och sedan över den andra, dvs:

Sats 15. För trappstegsfunktioner ϕ gäller

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \phi(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \phi(x, y) dx \right) dy.$$

Beviset följer av att vi först kan summera över i och sedan över j och vice versa (detaljerna utelämnas). Notera att integralen $\int_a^b \phi(x, y) dx$ ger tvärsnittsytan av kroppen under grafen till ϕ



Figur 37: Föreläsning 13: Sambandet mellan dubbelintegral och itererade integraler. (Bild: Hania, med KeyNote.)

skuren så att y hålls konstant. Därmed gäller:

$$\int_c^d \left(\int_a^b \phi(x, y) dx \right) dy = \int_c^d A(y) dy,$$

vilket är formeln för volymen av en kropp med tvärsnitt $A(y)$ som vi härledde i envariabelanalysen. För att visa den andra formeln skär vi grafytan med vertikala plan med en konstant x .

Låt nu f vara en godtycklig begränsad funktion definierad på Δ . Då finns det med säkerhet två trappstegsfunktioner ϕ och ψ sådana att

$$\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta.$$

Definition 23. Den begränsade funktionen f sägs vara integrerbar över rektangeln Δ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns trappstegsfunktioner ϕ, ψ som uppfyller olikheten ovan, samt

$$\left| \iint_{\Delta} \psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy \right| < \varepsilon.$$

Dubbelintegralen av ψ blir som en översumma till f och dubbelintegralen av ϕ blir som motsvarande undersumma, så precis som för enkelintegralen är en funktion integrerbar om under- och översumman kan komma godtyckligt nära varandra.

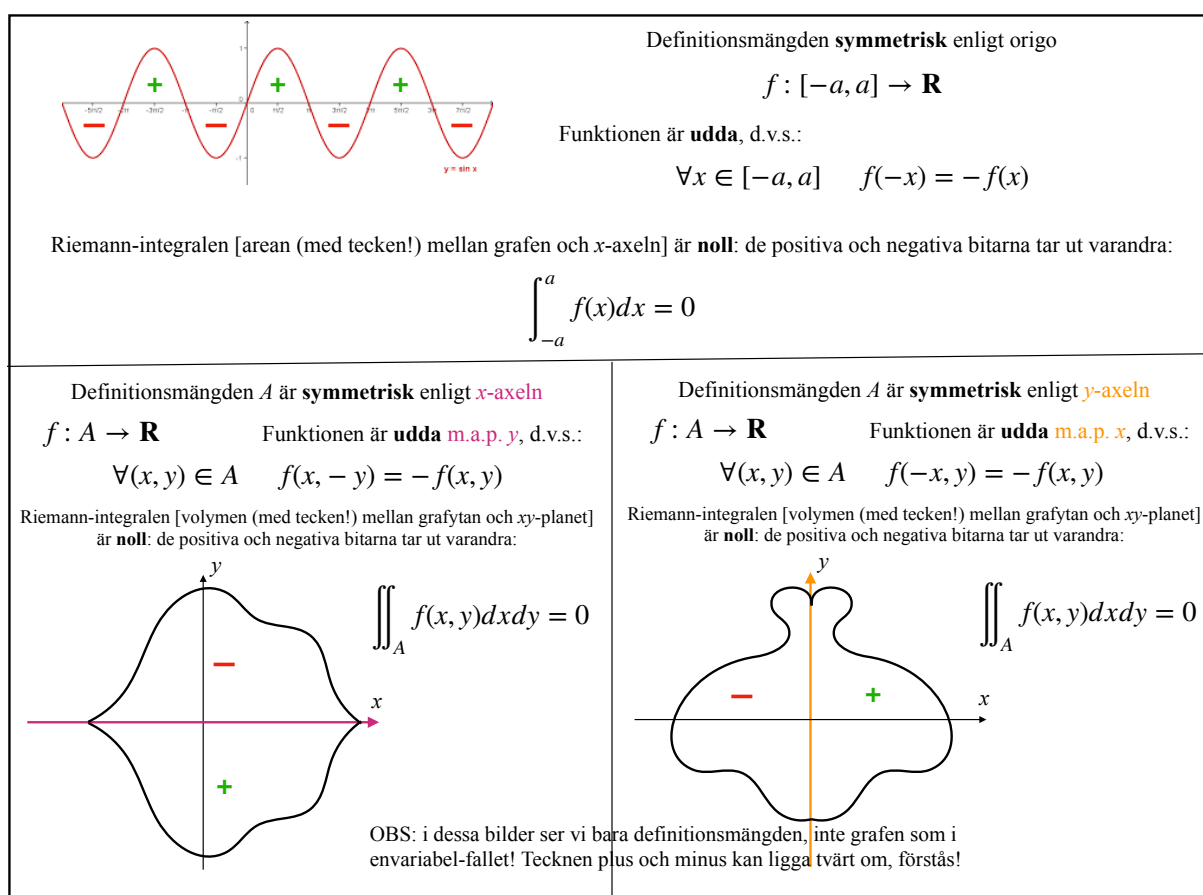
Sats 16. Om f är integrerbar över Δ så finns det exakt ett tal I sådant att

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy \leq I \leq \iint_{\Delta} \psi(x, y) dx dy$$

Vi låter därför talet I i ovanstående sats betecknas $I = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$. Avslutningsvis några egenskaper för dubbelintegraler (av integrerbara funktioner)

1. $\iint_{\Delta} (Af(x, y) + Bg(x, y)) dx dy = A \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy + B \iint_{\Delta} g(x, y) dx dy$
2. $[\forall (x, y) \in \Delta \quad f(x, y) \leq g(x, y)] \Rightarrow \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\Delta} g(x, y) dx dy$
3. $\left| \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| dx dy$ (Bevisas först för trappstegsfunktioner)

Egenskaperna ovan heter *linjäriteten*, *monotoniciteten* och *triangel-olikheten*.



Figur 38: Föreläsning 13: *Integration by inspection* som i Adams 14.1 upp.13–22. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vi skulle vilja veta vilka funktioner som är integrerbara.

Sats 17. Om f är kontinuerlig på Δ , så är f integrerbar över Δ .

Precis som i envariabelfallet bygger beviset på att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd (rektangeln Δ är kompakt) är likformigt kontinuerlig.

Det är ganska enkelt att visa att dubbelintegralen av alla integrerbara funktioner kan beräknas som en upprepande enkelintegral (**Fubinis sats**) och vi tar ett exempel på detta.

Exempel 64. Beräkna

$$\iint_{\Delta} \frac{x}{(1+xy)^2} dx dy, \quad \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1\}.$$

Integranden är kontinuerlig och därmed integrerbar. Vi integrerar först med avseende på y .

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{x}{(1+xy)^2} dx dy &= \int_1^3 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)^2} dy \right) dx = \int_1^3 \left[-\frac{1}{1+xy} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{1}{1+x} + 1 \right) dx = [x - \ln|1+x|]_1^3 \\ &= 3 - 2\ln(2) - 1 + \ln(2) = 2 - \ln(2). \end{aligned}$$

Vi hade lika gärna kunnat börja med att integrera över x , men då hade vi behövt partialbråksuppdelning och beräkningarna hade blivit mycket mer invecklade.

På samma sätt som arean mellan graferna till funktioner $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att $f(x) \geq g(x)$ för alla $x \in [a, b]$ uttrycks med formeln

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

kan volymen mellan grafytorna till tvåvariabelfunktioner $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att $f(x, y) \geq g(x, y)$ för alla $(x, y) \in D$ uttryckas med formeln

$$V = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy.$$

Föreläsning 14: Dubbelintegraler, fortsättning; variabelsubstitution (polära koordinater)

Fubinis sats på x - och y -enkla områden

För att kunna integrera funktioner över andra områden än rektanglar inför vi följande definition:

Definition 24. Låt f vara en begränsad funktion på den **begränsade** mängden D . Eftersom D är begränsad så finns det en rektangel R sådan att $D \subset R$. Vi inför den utvidgade funktionen

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

och så säger vi att f är integrerbar på D om $\hat{f}$ är integrerbar på R och vi definierar⁸

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R \hat{f}(x, y) dx dy.$$

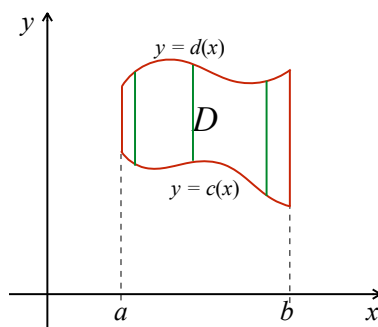
Men även om f är kontinuerlig på D så kommer bara $\hat{f}$ att vara kontinuerlig om $f(x, y) \rightarrow 0$ då (x, y) närmar sig randen ∂D . Funktionen $\hat{f}$ kommer dock ändå att vara integrerbar om randen är en så kallad nollmängd, dvs. en mängd som vi kan täcka med ändligt många rektanglar med total area ε . Man kan visa att grafen till en kontinuerlig funktion är en nollmängd (även detta bevis utnyttjar likformig kontinuitet) och därmed gäller följande, mycket användbar sats.

Sats 18. (Fubini) Om f är kontinuerlig på mängden

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

(ett **y -enkelt område**) för två kontinuerliga funktioner c och d , så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



Figur 39: Föreläsning 14: ett y -enkelt område D . (Bild: Hania, med KeyNote.)

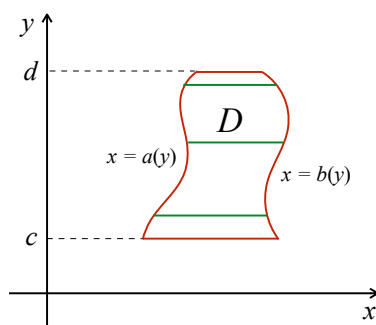
⁸På mängden D är ju båda funktioner lika varandra, och utanför D har $\hat{f}$ värdet noll. Det är därför rimligt att volymen (med tecken) mellan deras grafer och xy -planet är lika varandra.

På samma sätt gäller att om det finns två kontinuerliga funktioner a och b , sådana att

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \leq x \leq b(y), \quad c \leq y \leq d\}$$

(ett x -enkelt område; se bilden) så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



Figur 40: Föreläsning 14: ett x -enkelt område D . (Bild: Hania, med KeyNote.)

För bra illustrativa förklaringar för satsen ovan se Travis Topic 18. Se också extra filen

F14_TRAVIS_Topic18_Exempel_Fubini_x_y_enkla

De flesta områden kan skrivas som en ändlig union av ovanstående två typer av områden, x -enkla och y -enkla. Notera också att om $D = D_1 \cup D_2$ där $D_1 \cap D_2$ är en nollmängd så gäller

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Vi inleder med två räkneexempel med dubbelintegraler över icke-rektangulära områden i planet.

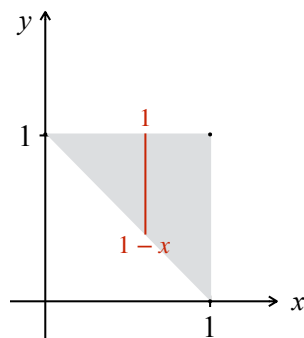
Exempel 65. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0, 1)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. Se bilden med integreringsområdet.

Området begränsas i y -led av $1 - x \leq y \leq 1$ och i x -led av $0 \leq x \leq 1$, så om vi först integrerar med avseende på y och sedan med avseende på x , så får vi:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{(1-x)^3}{3} + x^3 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{(1-x)^4}{12} + \frac{x^4}{4} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



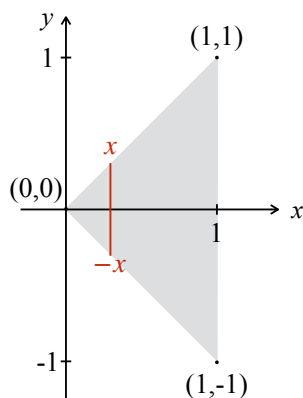
Figur 41: Föreläsning 14: Integreringsområde D , Exempel 65. (Bild: Hania, med KeyNote.)

I exemplet ovan hade vi kunnat använda $1 - y \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och istället först integrerat över x och sedan över y . Räkningarna hade dock blivit identiska fast med y utbytt mot x och vice versa. Som synes i nästa exempel kan det dock vara omöjligt att beräkna vissa integraler om vi börjar med fel variabel.

Exempel 66. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{x^2} dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(1,-1)$. Se bilden med integreringsområdet.



Figur 42: Föreläsning 14: Integreringsområde D , Exempel 66. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Primitiv funktion till $f(x) = e^{x^2}$ kan inte beräknas med metoder som vi behärskar, så vi måste börja med att integrera med avseende på y .

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x}^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[ye^{x^2} \right]_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^1 2xe^{x^2} dx \\ &= \left[e^{x^2} \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1. \end{aligned}$$

Variabelsubstitution (polära koordinater)

Precis som i envariabelfallet kan beräkning av dubbelintegraler ibland förenklas avsevärt om vi gör ett variabelbyte från (x, y) till ett annat par av variabler, exempelvis polära koordinater (r, θ) . Då kan man ofta omvandla knepiga integreringsområden i axelparallella rektanglar i variablerna r och θ . En fantastisk motivering av nyttan med detta koordinatbyte finns hos Travis Topic 18. Se också **skräckexemplet** på sista sidan i extra filen

F14_TRAVIS_Topic18_Exempel_Fubini_x_y_enkla

För att ta fram formeln för variabelbyte i dubbelintegraler måste vi dock först undersöka Riemannsummor. Låt f vara en funktion som är definierad på en mängd D . En Riemannsumma till f är en summa

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) (\text{Areal av } D_k) \quad \text{där } (x_k, y_k) \in D_k.$$

Man kan visa (återigen med likformig kontinuitet) att om f är kontinuerlig så konvergerar Riemannsumman till f mot

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

när största $\text{diam}(D_k) \rightarrow 0$ (dvs största avståndet mellan två punkter i D_k).

Låt nu $x = x(u, v)$ och $y = y(u, v)$ vara en bijektiv avbildning mellan området E i uv -planet och området D i xy -planet. Varje uppdelning av D i småbitar D_k motsvarar en uppdelning av E i småbitar E_k . Vi undersöker hur arean av D_k och E_k är relaterade.

När vi studerade Jacobimatrisen (Föreläsning 6) såg vi att areaförstoringen vid en avbildning var lika med determinanten av Jacobimatrisen (Jacobianen). Alltså gäller:

$$(\text{Areal av } D_k) = (\text{Areal av } E_k) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}_{\neq 0 \text{ för bijektiva avbildningar}}, \quad \text{där} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

(absolutbelopp kring Jacobideterminanten: arean kan ju inte vara negativt!) Från areaförstoringsformeln får vi följande relation mellan Riemannsummor uttryckta i (x, y) och (u, v) :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) (\text{areal av } D_k)}_{\iint_D f(x, y) dx dy} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^n f(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k)) (\text{areal av } E_k) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}_{\iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv}$$

Sats 19. Om $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ är en bijektiv funktion med kontinuerliga partiella derivator och om $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \quad \forall (u, v) \in E$ utom på en nollmängd, så är:

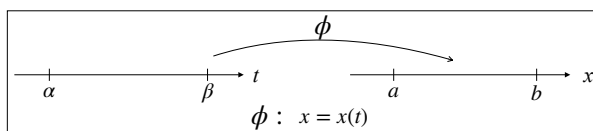
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

för alla integrerbara funktioner f .

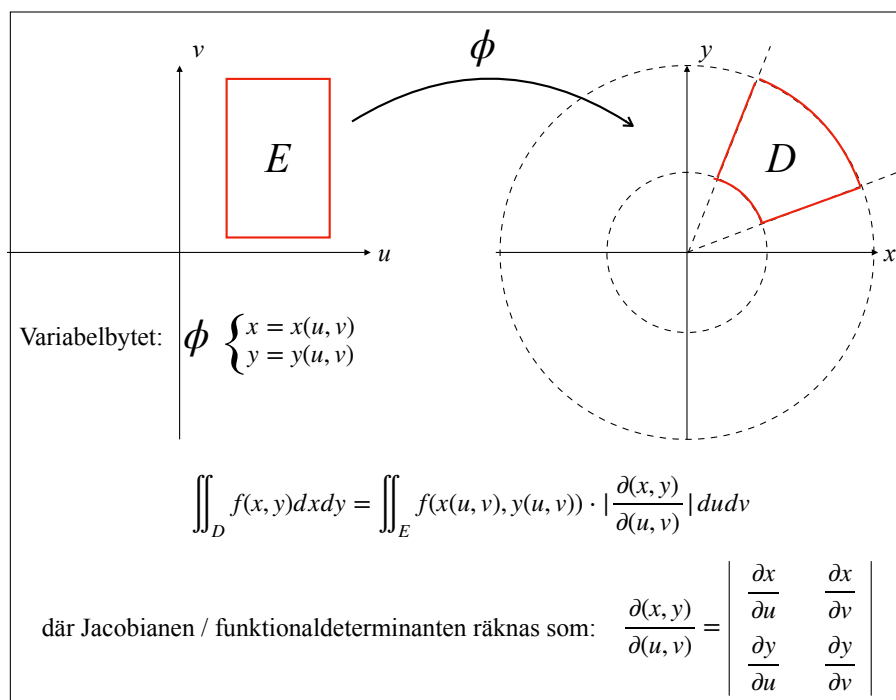
Jämför den endimensionella motsvarigheten

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \underbrace{x'(t)}_{\frac{dx}{dt}} dt$$

för $x = x(t)$ och $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.



Figur 43: Föreläsning 14: Variabelbyte (*invers substitution*) i enkelintegraler. (Bild: Hania, med KeyNote.)



Figur 44: Föreläsning 14: Variabelbyte (*invers substitution*) i dubbelintegraler. Allt som ska uttryckas m.h.a. de nya variablerna: 1. området, 2. funktionen, 3. area-elementet $dx dy$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vi tar två exempel på variabelbyte för dubbelintegraler.

Exempel 67. Beräkna integralen

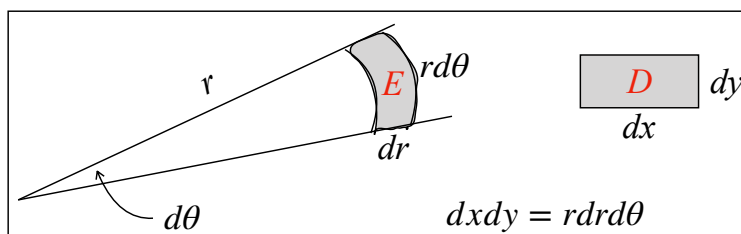
$$\iint_D \frac{x^2 e^{x^2+y^2}}{x^2 + y^2} dx dy$$

över den halva cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

Vi byter till polära koordinater $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. Jacobianen blir då

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) - (-r \sin^2(\theta)) = r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r$$

Man kan alltså skriva areaelementet som $dxdy = r dr d\theta$ och det finns en mycket bra geometrisk tolkning för detta:



Figur 45: Föreläsning 14: Areaelementet vid polärt koordinatbytet; geometrisk tolkning. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Integrationsområdet begränsas i polära koordinater av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, så

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2 e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy &= \int_0^\pi \int_0^1 \frac{r^2 \cos^2(\theta) e^{r^2}}{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 \cos^2(\theta) e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 r e^{r^2} dr \right) \end{aligned}$$

När integranden i en dubbelintegral är en produkt av en funktion av den ena variabeln och en funktion av den andra variabeln på en **axelparallell rektangel**, så kan dubbelintegralen skrivas som en produkt av två integraler. Vidare gäller

$$\int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta = \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 r e^{r^2} dr = \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2},$$

så dubbelintegralen är $\frac{\pi(e-1)}{4}$.

I beräkningen ovan använde vi följande sats, som kommer att vara mycket nyttig ända till slutet av denna kurs:

Sats 20. Om $D = [a, b] \times [c, d]$ är en axelparallell rektangel och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig tvåvariabelfunktion s.a. $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ där g och h är kontinuerliga funktioner, så är:

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy.$$

Varför är det så? Detta följer från Fubinis sats och från integralens linjäritet, alltså att man kan bryta ut en konstant framför integralecknet:

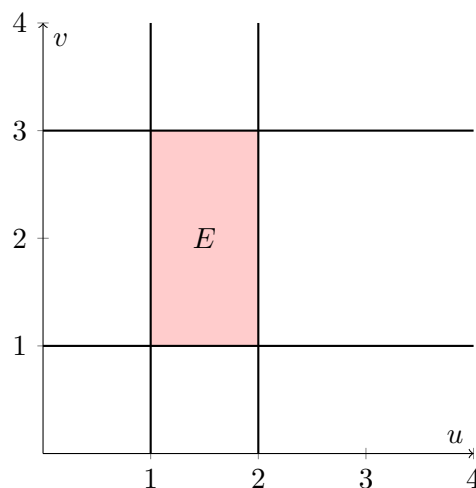
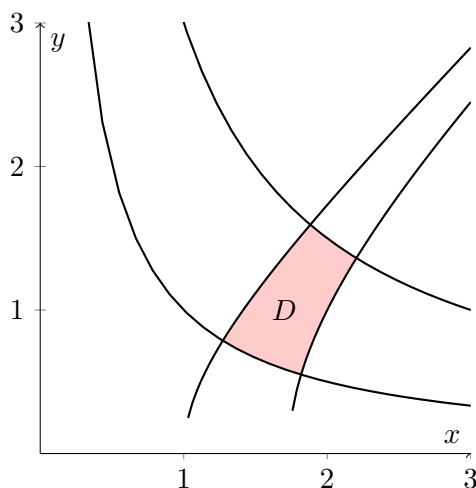
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d g(x) \cdot h(y) dy \right) dx \stackrel{g(x) \text{ är konst. m.a.p. } y}{=} \int_a^b g(x) \cdot \left(\int_c^d h(y) dy \right) dx \\ &\stackrel{\text{int. från } c \text{ till } d \text{ är ett tal!}}{=} \int_c^d h(y) dy \cdot \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Observera att satsen gäller enbart om vi integrerar över en **axelparallell rektangel** och om integranden är produkt av två funktioner av en variabel (en av x och en av y).

Exempel 68. (Överkurs på 5hp-kursen: direkt substitution) Beräkna integralen

$$\iint_D (x^4 - y^4) dx dy$$

där D är det område i xy -planet som begränsas av de fyra kurvorna $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2$, $xy = 1$ och $xy = 3$. Om vi byter till koordinaterna $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$ så kan integrationsområdet uttryckas som $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 3$.



Jacobianen blir (man använder här den Inversa Funktionssatsen som inte ingår i den 5hp-kursen):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}^{-1} = (2x^2 + 2y^2)^{-1} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

vilket slutligen ger oss:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^4 - y^4) dx dy &= \iint_D (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) dx dy = \iint_E (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_E u du dv = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 u du \right) \left(\int_1^3 dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 [v]_1^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) (3 - 1) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Trigonometriska formler för flervariabelanalys

Beräkning av multipelintegraler (och kurvintegraler) kräver ofta grundläggande kunskaper i trigonometri, eftersom sinus och cosinus förekommer i både polär och rymdspolär koordinatbyte, och så använder man ofta trigonometriska funktioner vid parametrisering av kurvor.

Här kommer några riktigt viktiga formler som används väldigt ofta vid beräkning av trigonometriska integraler. Memorera dem, eftersom det inte kommer något formelblad på tentan:

- Trigettan

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

- Cosinus av dubbelvinkel

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.$$

- De två senaste formler ger väldigt viktiga formler som hjälper hitta primitiv funktion till $f(x) = \sin^2 x$ och $g(x) = \cos^2 x$:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2}.$$

- Här kommer användningen av formlerna ovan:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{\cos(2x) + 1}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

- Om man ska bestämma primitiva funktioner till $\sin^{2n+1} x$ eller $\cos^{2n+1} x$, använder man trigettan för att senare kunna tillämpa variabelsubstitution, som i exemplet nedan:

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx \underset{\text{trigettan}}{=} \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = *$$

Substitution: $\cos x = t$, $-\sin x \, dx = dt$ ger vidare:

$$* = - \int (1 - t^2) \, dt = \int (t^2 - 1) \, dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

På samma sätt hittar man primitiv funktion till $f(x) = \cos^3 x$ genom att skriva $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$ och tillämpa variabelbyte $\sin x = t$.

- Det mest typiska exemplet från området av dubbelintegraler är när man ska köra polär koordinatbyte och integranden innehåller $x^2 + y^2$. Trigettan tillämpat till $x = r \cos \theta$ och $y = r \sin \theta$ ger $x^2 + y^2 = r^2$ och därför (Jacobianen $dx dy = r dr d\theta$) får vi t.ex.:

$$\iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r \, d\theta dr = 2\pi \cdot \int_0^1 r^3 \, dr = 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

- Den första formeln för cosinus av dubbelvinkel hjälper att beräkna dubbelintegraler med $x^2 - y^2$ i integranden. Efter polärt koordinatbyte: $x^2 - y^2 = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos(2\theta)$. Låt oss nu integrera över D : åttondelen av cirkelskivan:

$$\iint_D (x^2 - y^2) \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^2 \cos(2\theta) \cdot r \, d\theta dr = \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/4} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Föreläsning 15: Generaliserade integraler; Medelvärdessatsen

Vi har hittills studerat dubbelintegraler av begränsade funktioner över slutna, begränsade områden i planet. Precis som för enkelintegraler kan vi utvidga integralbegreppet till att omfatta även obegränsade integrander och obegränsade integrationsområden.

Definition 25. Låt f vara en funktion av två variabler som är definierad på en, möjligen obegränsad, mängd D i planet och antag att $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in D$. Låt $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D$ vara en följd av mängder med följande egenskaper:

- $\cup_{i=1}^{\infty} D_i = D$
- D_i är begränsad för alla i .
- f är begränsad på D_i för alla i .

(Sådan följd heter *uttömmande följd*.) Den generaliserade integralen av f på området D definieras av

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$

om gränsvärdet existerar.

Exempel 69. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy$$

där D är första kvadranten i xy -planet. Funktionen är begränsad på hela mängden D , men mängden D är obegränsad. Vi kan låta $D_i = [0, i] \times [0, i]$ och får då:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^i \int_0^i \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_0^i \frac{dx}{1+x^2} \right) \left(\int_0^i \frac{dy}{1+y^2} \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_0^i [\arctan(y)]_0^i = \lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{(\arctan(i) - \arctan(0))}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} \underbrace{(\arctan(i) - \arctan(0))}_{\rightarrow 0}^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

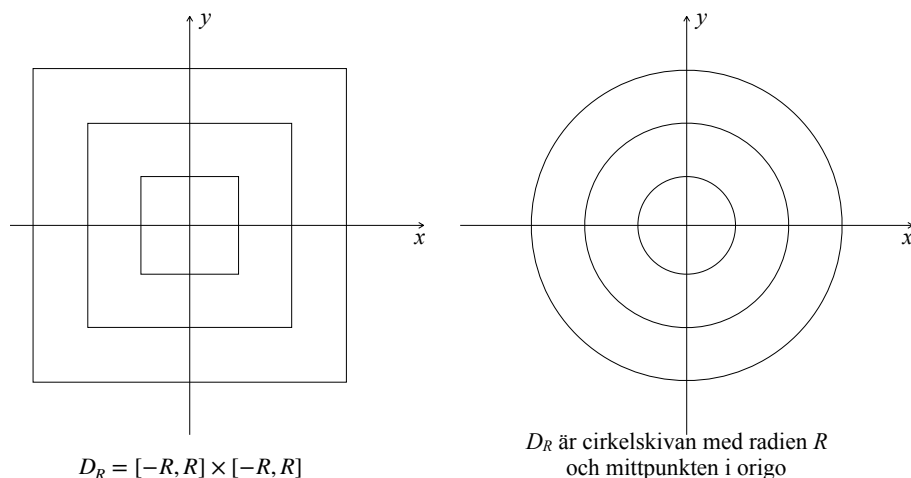
Den generaliserade dubbelintegralen var konvergent med värdet $\frac{\pi^2}{4}$.

Precis som för vanliga dubbelintegraler har vi ofta användning av variabelbyten när vi ska beräkna generaliserade dubbelintegraler. Vi illustrerar med ett mycket viktigt exempel med otaliga tillämpningar.

Exempel 70. Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Vi kan inte beräkna någon primitiv funktion, men genom att gå omvägen via en dubbelintegral kan vi ändå beräkna den bestämda integralen.



Figur 46: Föreläsning 15: Två olika exempel av uttömmande följder som approximerar R^2 ; vi använder den första i nedanstående beräkningen till vänster och den andra i beräkningen till höger. Teorin (överkurs) säger att värdet på den generaliserade integralen av en positiv integrand är samma oavsett vilka uttömmande följd vi väljer. Exempel 70. (Bild: Hania, med KeyNote.)

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
 &\stackrel{\text{polära koordinater}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R d\theta \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) 2\pi \\
 &= \frac{1}{2} (1 - 0) 2\pi = \pi.
 \end{aligned}$$

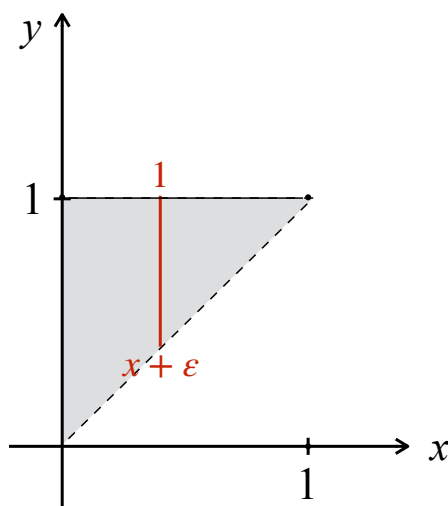
I ovanstående exempel beräknade vi generaliserade dubbelintegraler med hjälp av itererade enkelintegraler.

Om en generaliserad dubbelintegral med positiv integrand är konvergent, så spelar det ingen roll i vilken ordning vi integrerar enkelintegralerna. Om integranden har olika tecken kan värdet dock bero på ordningen. Vi tar ett exempel där integranden är obegränsad.

Exempel 71. Avgör om integralen

$$\iint_D \frac{1}{y-x}$$

är divergent för $D = \{(x, y) : 0 < x < y < 1\}$. Se bilden med integreringsområdet.



Figur 47: Föreläsning 15: Integreringsområde D , Exempel 71. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Integranden är obegränsad nära linjen $y = x$, så

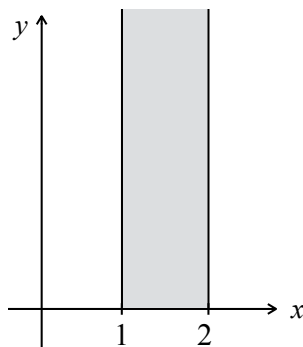
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{y-x} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{1}{y-x} dy dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 [\ln |y-x|]_{y=x+\varepsilon}^1 dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 (\ln |1-x| - \ln(\varepsilon)) dx = \infty \quad \text{eftersom integranden är } \infty \text{ för alla } x. \end{aligned}$$

Vi tar ett till exempel på variabelbyte i generaliserade dubbelintegraler:

Exempel 72. (Överkurs på den 5hp-kursen) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D xye^{-xy} dx dy$$

där D är remsan $1 \leq x \leq 2$, $y \geq 0$. Se bilden med integreringsområdet.



Figur 48: Föreläsning 15: Integreringsområde D , Exempel 72. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vägleda av formen på integranden sätter vi $u = xy$, $v = x$. Remsan D kan då skrivas $u \geq 0$,

$1 \leq v \leq 2$. Jacobianen blir:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x = -v$$

så (direkt substitution igen, alltså den Inversa Funktionssatsen som vänder på Jacobianen; dessutom så tar man absolutbeloppet, alltså försvinner minustecknet vid v):

$$\begin{aligned} \iint_D xy e^{-xy} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_1^2 u e^{-u} \frac{1}{v} dv du = \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R u e^{-u} du \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{v} dv \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left([-u e^{-u}]_0^R - \int_0^R -e^{-u} du \right) [\ln(v)]_1^2 \\ &= \ln(2) \lim_{R \rightarrow \infty} (-R e^{-R} - e^{-R} + 1) = \ln(2). \end{aligned}$$

För integrander med varierande tecken kunde vi inte dra säkra slutsatser från itererade enkeltintegraler. Dock gäller det att

$$\iint_D f(x, y) dx dy \text{ är konvergent} \iff \iint_D |f(x, y)| dx dy \text{ är konvergent.}$$

Så om vi vill avgöra om en generaliserad dubbelintegral vars integrand f har varierande tecken är konvergent, så behöver vi bara undersöka motsvarande integral av $|f|$. Om vi inte kan hitta primitiva funktioner kan vi använda ett jämförelsekriterium för att avgöra konvergens. För att visa att

$$\iint_D \frac{1 + 2 \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \text{ är konvergent på } x^2 + y^2 \geq 1, \text{ så kan vi undersöka}$$

$$\iint_D \left| \frac{1 + 2 \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| dx dy \leq \iint_D \frac{3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{3r}{(r^2)^{3/2}} dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{3}{r} \right]_1^\infty = 6\pi,$$

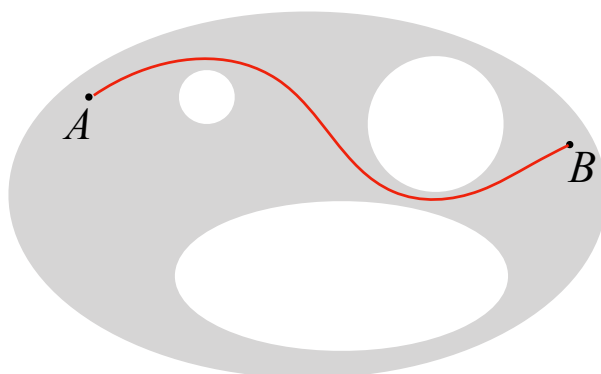
och eftersom integralen av $|f|$ är mindre än en konvergent integral, så måste integralen av $|f|$, och därmed även av f , vara konvergent.

Vi avslutar detta kapitel med att härleda den flerdimensionella motsvarigheten av **integralkalkylens medelvärdessats**. Låt f vara en kontinuerlig funktion av två variabler definierad på ett kompakt område D . Då har f ett största och ett minsta värde M respektive m på D , och alltså gäller $m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in D$. Integration över D ger:

$$\begin{aligned} m(\text{arean av } D) &= \iint_D m dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D M dx dy = M(\text{arean av } D) \\ \Rightarrow m &\leq \underbrace{\frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x, y) dx dy}_{=C} \leq M \end{aligned}$$

Om D är **bågvis sammanhängande**, så finns det en kurva $(x(t), y(t))$ som uppfyller

$$f(x(0), y(0)) = m \quad \text{och} \quad f(x(1), y(1)) = M.$$



Figur 49: Föreläsning 15: En mängd (den gråa delen i bilden; de vita delarna illustrerar hål, alltså tillhör inte mängden) kallas *bågvis sammanhängande* om det för varje par punkter A och B som tillhör mängden finns det en glatt (C^1) kurva (liggande fullständigt i mängden; den röda kurvan i bilden) som förenar punkterna. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Eftersom både f och kurvan är kontinuerliga, så är sammansättningen $g(t) = f(x(t), y(t))$ en kontinuerlig funktion av en variabel med egenskaperna $g(0) = m$ och $g(1) = M$. Enligt satsen om mellanliggande värden (från envariabelanalys) så finns det ett $t \in [0, 1]$, sådant att $g(t) = f(x(t), y(t)) = C$. Det finns alltså en punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att:

$$f(x_0, y_0) = C = \frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Högerledet kan tolkas som **medelvärde** av funktionen f på området D . Om D_r är en cirkel med radie r och centrum i (a, b) så gäller:

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y) dr d\theta \rightarrow f(a, b) \quad \text{då } r \rightarrow 0.$$

För harmoniska funktioner är ovanstående integral lika med $f(a, b) \quad \forall r > 0$.

Föreläsning 16: Trippelintegraler; variabelbyte i trippelintegraler

Trippelintegraler

På precis samma sätt som vi definierade dubbelintegraler över rektanglar i planet, kan vi definiera trippelintegraler över rätblock R i rummet genom att dela in rätblocket i del-rätblock. Genom att approximera den funktion f som man vill integrera med en trappstegsfunktion som är konstant på varje del-rätblock så får man en Riemannsumma med $c_{ijk} = f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad \text{som konvergerar mot} \quad \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Vi kan också definiera trippelintegraler över kroppar K i rummet som inte är rätblock genom att låta integranden vara noll utanför K och integrera över ett rätblock som innehåller K .

På samma sätt som vi beräknade dubbelintegraler m.h.a. *integration by inspection* på s. 77 (se bilden där), kan vi göra samma sak med trippelintegraler. Här har vi dock så många som **tre** olika fall som omedelbart (utan att räkna) ger

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = 0 :$$

- Integranden är **udda** m.a.p. x (d.v.s. $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$ för alla $(x, y, z) \in K$) och K är **symmetrisk** enligt yz -planet (planet $x = 0$).
- Integranden är **udda** m.a.p. y (d.v.s. $f(x, -y, z) = -f(x, y, z)$ för alla $(x, y, z) \in K$) och K är **symmetrisk** enligt xz -planet (planet $y = 0$).
- Integranden är **udda** m.a.p. z (d.v.s. $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ för alla $(x, y, z) \in K$) och K är **symmetrisk** enligt xy -planet (planet $z = 0$).

I varje av dessa fallen finns det lika många volymelement $\Delta x \Delta y \Delta z$ i integreringsområdet K på båda sidor av symmetriplanet, och varje av dem har sin motsvarighet på andra sidan planet, med funktionens värde som är det motsatta talet (integranden är ju udda!), så att dessa element tar ut varandra i Riemannsumman:

$$c \Delta x \Delta y \Delta z - c \Delta x \Delta y \Delta z = 0.$$

Trippel- och multipelintegraler har ingen geometrisk tolkning, men många fysikaliska tolkningar. Om exempelvis $\rho(x, y, z)$ är densiteten i punkten (x, y, z) så ges massan m och volymen V av en kropp K av

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad V = \iiint_K dx dy dz.$$

Vi kan beräkna trippelintegraler med hjälp av itererad integration eller genom att utnyttja symmetrier och variabelbyten. Om integrationskroppen K kan skrivas som

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \quad p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$$

(alltså är ett z -**enkelt område**) så kan en trippelintegral över K beräknas

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Härifrån kan vi ta tre vägar, beroende på hur mängden D ser ut:

1. Om området D är y -enkelt:

$$\iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

2. Om området D är x -enkelt:

$$\iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy$$

3. Om området D är r -enkelt (radiellt): beräkna dubbelintegralen $dx dy$ m.h.a. polär koordinatbyte.

Om vi på ett enkelt sätt kan bestämma tvärsnitten av kroppen vinkelräta mot någon av koordinataxlarna, så kan trippelintegralen beräknas

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_p^q \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

där D_z är tvärsnittet av kroppen vinkelrät mot z -axeln.

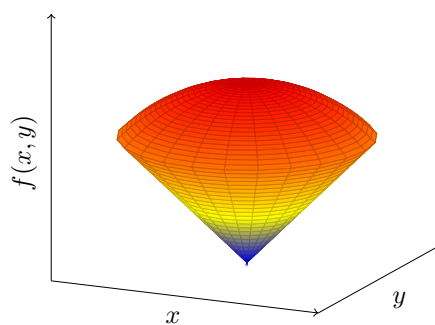
Exempel 73. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K z dx dy dz$$

där kroppen K definieras av de tre olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$

Den första olikheten motsvarar innandömet av en cirkulär kon med spetsen i origo och de båda andra olikheterna övre halvan av enhetssfären.



Kroppen K har formen av en 'glasstrut'⁹. Vi beräknar trippelintegralen med den tredje metoden ovan och tar fram projektionen av området i xy -planet. Projektionen av skärningskurvan har ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

⁹Titta gärna på Travis Topic 20, helt på slutet: där beräknar Travis volymen på glasstruten.

Så $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$.

Vidare är $p(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $q(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, så

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx dy = \iint_D \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (1 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (1 - 2x^2 - 2y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 2r^2) r \, dr d\theta = \frac{1}{2} 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Variabelbyte i trippelintegraler

I exemplet ovan så utförde vi ett variabelbyte i den anslutande dubbelintegralen. Vi kan också utföra variabelbyte direkt i trippelintegralen. Om vi byter variabler från (x, y, z) till (u, v, w) så måste vi ta hänsyn till hur volymelement skalas vid avbildningen. Precis som för dubbelintegraler så bestäms detta av absolutbeloppet av Jacobianen, så trippelintegralen kan skrivas:

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw,$$

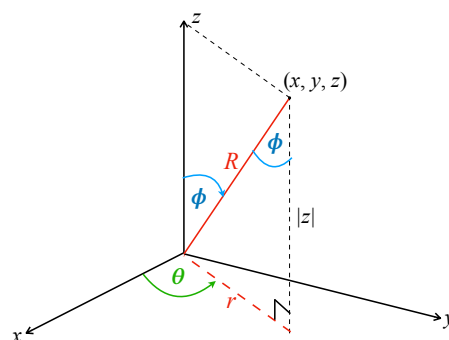
där E är kroppen K uttryckt i variablerna u, v och w . Vi tillämpar formeln på ett exempel.

Exempel 74. Beräkna

$$\iiint_K z \, dx dy dz$$

där kroppen K är 'glasstruten' i föregående exempel.

Vi kan byta till **sfäriska (rymdspolära)** koordinater. Som vi har sett i början av kursen,



Figur 50: Rymdspolära / sfäriska koordinater i $\mathbb{R}^3$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

motsvarar variabeln R avståndet till origo ($R \geq 0$), variabeln θ är vinkeln mellan den positiva

x -axeln och projektionen av punkten på xy -planet ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), och variabeln ϕ är vinkeln mot positiva z -axeln ($0 \leq \phi \leq \pi$). Relationen mellan kartesiska och sfäriska koordinater ges av:

$$x = R \sin(\phi) \cos(\theta), \quad y = R \sin(\phi) \sin(\theta), \quad z = R \cos(\phi).$$

Jacobiandeterminanten för koordinatbytet är (glöm inte hur man räknar med determinanter: man får bryta en gemensam faktor från hela raden eller kolonnen, och så kan man utveckla enligt rader eller kolonner; glöm inte att vid radutvecklingen multiplicera med $(-1)^{i+j}$ där i och j beskriver positionen av elementen i determinanten! Vi utvecklar enligt den sista raden och använder också triggettan, flera gånger!):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & R \cos \phi \cos \theta & -R \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & R \cos \phi \sin \theta & R \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -R \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot \left((-1)^{3+1} \cos \phi \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-\sin \phi) \cdot \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \right) = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot \left(\cos^2 \phi \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} + \sin^2 \phi \cdot \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \right) = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot (\cos^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \phi \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = R^2 \sin(\phi). \end{aligned}$$

Detta är något att memorera: volymelementet vid sfärisk koordinatbyte är:

$$dx dy dz = R^2 \sin(\phi) dR d\phi d\theta.$$

I sfäriska koordinater kan kroppen ('glasstruten') uttryckas med olikheterna

$$0 \leq R \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

vilket innebär att kroppen är ett **axelparallellt rätblock** i dessa koordinater. Jacobiandeterminanten för detta variabelbyte är (OBS: absolutbelopp behövs ej, eftersom $R \geq 0$ och $\sin \phi \geq 0$, eftersom $0 \leq \phi \leq \pi$):

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \phi, \theta)} \right| = R^2 \sin(\phi)$$

och, eftersom $z = R \cos(\phi)$, så får vi:

$$\begin{aligned} \iiint_K z \, dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} R \cos(\phi) R^2 \sin(\phi) \, d\theta d\phi dR = \int_0^1 R^3 \, dR \int_0^{\pi/4} \sin(\phi) \cos(\phi) \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2\phi)}{2} d\phi \right) 2\pi = \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos(2\phi)}{4} \right]_0^{\pi/4} 2\pi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Nu kan vi också beräkna volymen på ett klot med radien a :

Exempel 75.

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

Under det sfäriska koordinatbytet $x = R \sin(\phi) \cos(\theta)$, $y = R \sin(\phi) \sin(\theta)$, $z = R \cos(\phi)$ omvandlas K i följande axelparallellt rätblock (APR) E :

$$E = \{(R, \phi, \theta) : 0 \leq R \leq a, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$\text{Vol}(K) = \iiint_K 1 dx dy dz = \iiint_E R^2 \sin \phi dR d\phi d\theta = \int_0^a \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} R^2 \sin \phi d\theta \right) d\phi \right) dR =$$

Eftersom E är ett APR och integranden är en produkt av envariabelfunktioner (en motsvarighet av Sats 20 från s. 84 gäller även för trippelintegraler på APR där variablerna i integranden kan separeras), kan vi använda formeln med produkt av enkelintegraler:

$$= \int_0^a R^2 dR \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \left[\frac{R^3}{3} \right]_0^a \cdot 2\pi \cdot [-\cos \phi]_0^\pi = \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi \cdot (-(-1) - (-1)) = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Om integrationsområdet har axiell symmetri kan vi dra nytta av cylindriska koordinater. Vi tar ett exempel även på detta.

Exempel 76. Beräkna

$$\iiint_K z dx dy dz$$

där K ges av olikheterna $z^2 \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

I cylindriska koordinater ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$) kan området uttryckas med olikheterna $0 \leq r \leq z$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Jacobianen blir:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

precis som för polära koordinater. Så

$$\begin{aligned} \iiint_K z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z z r dr dz d\theta = 2\pi \int_0^1 \int_0^z z r dr dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[z \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=z} dz = 2\pi \int_0^1 \frac{z^3}{2} dz = 2\pi \left[\frac{z^4}{8} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Många gånger kan beräkningar av trippelintegraler förenklas avsevärt om man tar eventuella symmetrier hos integranden i beaktande. Exempelvis är, av symmetriskäl

$$\iiint_K x dx dy dz = \iiint_K y dx dy dz = 0$$

både om K är konen i föregående exempel och 'glasstruten' i exemplet innan det (jämför med enkelintegralen av en udda funktion över ett symmetriskt intervall $[-a, a]$). Hur svår en trippelintegral är att beräkna kan också påverkas av i vilken ordning vi väljer att beräkna de tre enkelintegralerna. I trippelintegralen

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_0^y f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^y f(x, y, z) \, dx$$

ges området av olikheterna $0 \leq z \leq 1$, $z \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y$. Om vi istället först vill integrera över z och sedan över y och sist över x , så måste vi skriva om området som $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq y$, och får trippelintegralen

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^y f(x, y, z) dz$$

Tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler

Som vi nämnde i förra kapitlet så ges volymen av en kropp K av

$$\iiint_K dx dy dz = \iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} dz \right) dx dy = \iint_D (q(x, y) - p(x, y)) dx dy$$

där de två sista formlerna gäller i specialfallet då K har formen

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}.$$

Vi tar ett exempel som visar hur vi kan beräkna volymen av en implicit definierad kropp (där vi inte kan göra ovanstående omskrivning till en dubbelintegral).

Exempel 77. Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq y\}$

Eftersom vänsterledet i olikheten är ickenegativt, så vet vi att $y \geq 0$. På grund av termen $x^2 + y^2 + z^2$ så väljer vi att studera kroppen K uttryckt i sfäriska koordinater. $y \geq 0$ motsvarar då $0 \leq \theta \leq \pi$. Olikheten $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq y$ innebär då att

$$(R^2)^2 \leq R \sin(\phi) \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad R^3 \leq \sin(\phi) \sin(\theta)$$

och eftersom Jacobianen i sfäriska koordinater är $R^2 \sin(\phi)$, så får vi:

$$\begin{aligned} \iiint_K dx dy dz &= \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^{\sqrt[3]{\sin(\phi) \sin(\theta)}} R^2 \sin(\phi) \, dR = \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \sin(\phi) \, d\phi \left[\frac{R^3}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{\sin(\phi) \sin(\theta)}} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \sin(\phi) \sin(\phi) \sin(\theta) d\phi = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\phi)}{2} d\phi \\ &= \frac{1}{3} [-\cos(\theta)]_0^\pi \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} (-(-1) - (-1)) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Alternativt hade vi kunnat göra omskrivningen $x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{y}$ och därefter $x^2 + z^2 \leq \sqrt{y} - y^2$ och använt att projektionen av kroppen på xz -planet är cirklar med radie $\sqrt{\sqrt{y} - y^2}$ och centrum i $x = z = 0$. Tvärsnitt av kroppen med fixt y har alltså arean $A(y) = \pi(\sqrt{y} - y^2)$ och enligt envariabelanalysen så gäller

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \pi \int_0^1 (\sqrt{y} - y^2) dy = \pi \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Vi ska härnäst undersöka problemet att bestämma arean av en yta i rummet. Vi visade i envariabelanalysen att om ytan fås genom rotation av en funktion $y = f(x)$ kring x -axeln så ges arean av

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Vi ska nu studera det mer generella fallet då arean är grafen till en funktion av två variabler. Relationen mellan arean dS av ett ytelement på grafen och arean dA av projektionen av ytelementet på xy -planet är, eftersom båda är approximativt plana,

$$dA = dS \cos(\alpha),$$

där α är vinkeln mellan grafens normalvektor och z -axeln. Normalvektorn till grafen av en funktion av två variabler är $(f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1)$, eller dess uppåtriktade motsvarighet $(-f'_1(x, y), -f'_2(x, y), 1)$. Med $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, så får vi då:

$$dA = dS \cos(\alpha) = dS \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{n}| |\vec{e}_3|} = \frac{dS}{|\vec{n}|} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dxdy.$$

Hela grafens yta ges av integralen

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dxdy,$$

där D är funktionens definitionsmängd. Notera likheten med formeln för båglängden av en funktionsgraf $y = f(x)$, som lyder

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Man kan ganska enkelt härleda formeln för arean av en rotationskropp från formeln för arean av en funktionsgraf.

Exempel 78. Bestäm arean av övre halvan av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Vi vill bestämma arean av grafen till funktionen $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ vars partiella derivator ges av:

$$f'_1(x, y) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$f'_2(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Eftersom funktionens definitionsmängd är $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ så får vi:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr \\ &= 2\pi \left[-R\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Vi ägnar resten av kapitlet åt massrelaterade beräkningar. Vi har redan sett att massan av en kropp K vars densitet i punkten (x, y, z) ges av funktionen $\rho(x, y, z)$ kan beräknas med trippelintegralen

$$\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för en kropp K i rummet är den punkt kring vilken kroppen är i momentjämvikt med avseende på en konstant, parallell gravitationskraft riktad åt ett godtyckligt håll. Antag först att gravitationen är riktad i z -riktning. Vridmomentet för ett masselement $\rho(x, y, z) dx dy dz$ kring en axel som är parallell med x -axeln är

$$\underbrace{\rho(x, y, z) dx dy dz}_m \underbrace{g(y - y_T)}_r \quad \text{och hela kroppens vridmoment}$$

$$\iiint_K g(y - y_T) \rho(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad \text{eftersom vi har momentjämvikt i } (x_T, y_T, z_T)$$

om vi nu låter massan m vara trippelintegralen av funktionen $\rho(x, y, z)$ över kroppen K så får vi ekvationen:

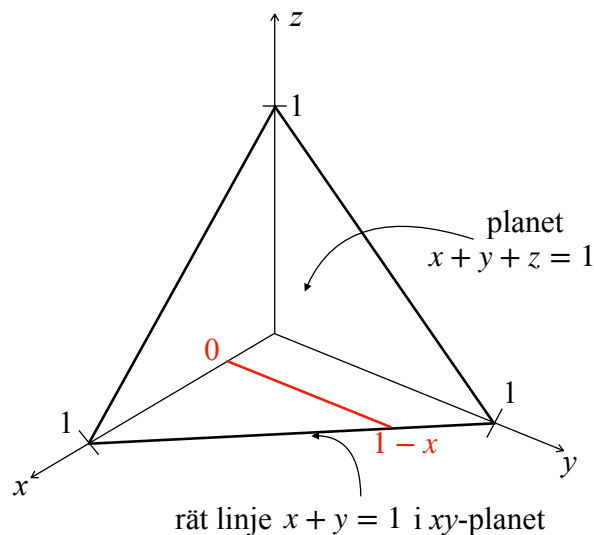
$$\iiint_K y \rho(x, y, z) dx dy dz = m y_T \quad \Rightarrow \quad y_T = \frac{1}{m} \iiint_K y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

och motsvarande ekvationer gäller även av symmetriskäl för x_T och y_T .

Exempel 79. Bestäm tyngdpunkten till kroppen K som begränsas av $x + y + z \leq 1$ i första oktanten. Se bilden med integreringsområdet.

Av symmetriskäl $(x_T, y_T, z_T) = k(1, 1, 1)$, så vi behöver bara beräkna en av x_T, y_T, z_T . Kroppen begränsas av

$$0 \leq z \leq 1 - x - y, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$



Figur 51: Föreläsning 16: bilden till Exempel 79. (Bild: Hania, med KeyNote.)

så vi får integralen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
 &= \int_0^1 x \left(0 + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

Samtidigt gäller

$$\begin{aligned}
 m &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2x+x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

vilket slutligen ger oss att

$$x_T = \frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad (x_T, y_T, z_T) = \frac{1}{4}(1, 1, 1).$$

Föreläsning 17: Vektorfält (v.f.) och skalärfält; konservativa v.f.

Vektorfält

Under återstoden av kursen ska vi arbeta med vektorfält. Ett vektorfält är en funktion vars definitions- och värdemängder är delmängder av $\mathbb{R}^3$. Till varje punkt (x, y, z) i rummet ordnar vektorfältet $\vec{F}$ en vektor $\vec{F}(x, y, z)$ som kan skrivas¹⁰

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

där *komponentfunktionerna* $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är trevariabelfunktioner. Många fysikaliska fenomen kan beskrivas med hjälp av vektorfält, exempelvis gravitationskraften kring en massa, det elektriska kraftfältet kring en laddning, eller hastighetsfältet i ett materiaflöde. För att kunna ta fram en fysikalisk teori för dessa fenomen behöver vi utveckla matematiska metoder för vektorfält.

Föreläsningens viktigaste begrepp:

- Vektorfält / Konservativa vektorfält
- Skalärfält / Potential
- Fältlinje
 - linjer som i varje punkt har samma riktning (flöde) som fältet
 - ett generellt begrepp, för alla sorters kontinuerliga vektorfält
- Nivåkurva (*ekvipotentialkurva*) / nivåyta
 - nivåkurvor / ytor för fältets potentialfunktion
 - linjer som i varje punkt är vinkelräta mot fältet
 - ett begrepp som begränsas till de konservativa fält, eftersom bara sådana har en potentialfunktion.
- Gradienttestet: ett nödvändigt villkor för ett fält att vara konservativt.

Om $R(x, y, z) \equiv 0$ och P, Q är oberoende av z , talar man om ett planärt vektorfält.

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Planära vektorfält kan bland annat beskriva magnetfältet kring en lång, rak ledare genomfluten av en konstant elektrisk ström.

¹⁰Ibland betecknas komponentfunktionerna med F_1, F_2, F_3 i.s.f. med P, Q, R , vilket vi undviker, eftersom det kan förvirras med första ordningens partiella derivatorna m.a.p. x, y och z .

Exempel 80. En punktmassa m_0 i punkten $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ger upphov till ett vektorfält för gravitationskraften. En massa m i $\vec{r} = (x, y, z)$ påverkas av kraften

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= -\frac{km_0m}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ &= -km_0m \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}\end{aligned}$$

med belopp

$$|\vec{F}| = \frac{km_0m}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$

Så kraften avtar, som bekant, med kvadraten på avståndet $|\vec{r} - \vec{r}_0|$.

En massa m_0 som placeras i gravitationsfältet till en punktmassa kommer, om $m_0 \ll m$, att röra sig längs en rät linje mot punkten (x_0, y_0, z_0) . Dessa rätta linjer är så kallade *fältlinjer* för kraftfältet. En fältlinje är en kurva vars tangent i varje punkt är parallell med kraftfältet.

Vi ska ta fram en metod för att bestämma fältlinjer till ett vektorfält $\vec{F}$ och antar att fältlinjerna har parametreringen $\vec{r}(t)$. Per definition gäller

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda(t)\vec{F}(\vec{r}(t))$$

för någon funktion $\lambda(t)$. Det är inte alltid som detta system av differentialekvationer kan lösas, men vi tar ett exempel när så är fallet. Uppgifter hos Adams som handlar om fältlinjer: 15.1. I dessa uppgifter kommer vi alltid att få en **separabel** ODE som är möjlig för oss att lösa.

Exempel 81. Bestäm en ekvation för den fältlinje till det planära vektorfältet $F(x, y) = (1, \sin(x))$, som går genom origo.

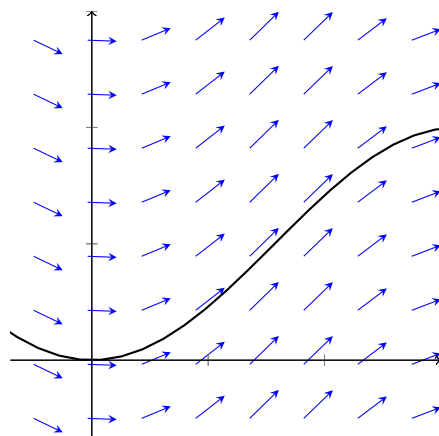
Fältlinjerna $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ uppfyller ekvationerna:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda(t) \cdot 1, & \frac{dy}{dt} &= \lambda(t) \sin(x) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\lambda(t) \sin(x)}{\lambda(t) \cdot 1} = \sin(x) \\ \Rightarrow y(x) &= \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C.\end{aligned}$$

Insättning av villkoret $y(0) = 0$ ger därefter

$$0 = -\cos(0) + C \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

så fältlinjen genom origo har ekvationen $y = 1 - \cos(x)$, och oscillerar därmed mellan y -värdena 0 och 2.



Konservativa vektorfält

Funktioner $\Phi(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kallas ibland för *skalärfält*. Gradienten $\nabla\Phi(x, y, z)$ av ett godtyckligt skalärfält är ett vektorfält. Däremot gäller det inte i allmänhet att ett godtyckligt vektorfält $\vec{F}$ kan skrivas som gradienten av ett skalärfält.

Definition 26. Vektorfältet $\vec{F}(x, y, z)$ sägs vara *konservativt* i det öppna området D om det finns ett C^2 (två gånger kontinuerligt deriverbart) skalärfält $\Phi(x, y, z)$ sådant att $\vec{F}(x, y, z) = \nabla\Phi(x, y, z)$. Funktionen Φ kallas för *potentialen* till $\vec{F}$ (definitionen är analog i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^n$).

Potentialen till ett konservativt vektorfält är inte entydigt bestämd. Om Φ är en potential till $\vec{F}$, så är också $\Phi + C$ en potential för varje konstant C eftersom $\nabla(\Phi + C) = \nabla\Phi + \nabla C = \vec{F} + \vec{0} = \vec{F}$. Två potentialer Φ_1, Φ_2 till ett och samma vektorfält uppfyller dock alltid $\Phi_1 = \Phi_2 + C$, för någon konstant C , så alla potentialer till ett vektorfält är identiska, så när som på en konstant (precis som primitiva funktioner till en funktion).

En potential till gravitationskraftfältet kring en punktmassa m i punkten $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ges av

$$\Phi(x, y, z) = \frac{km}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Undersök på egen hand att $\nabla\Phi(x, y, z)$ blir vektorfältet från förra kapitlet.

För att visa att ett vektorfält är konservativt kan man försöka hitta en potential till det. Vi tar ett exempel.

Exempel 82. Visa att vektorfältet $\vec{F} = (3x^2y^2z + 2xy, 2x^3yz + x^2 + 1, x^3y^2)$ är konservativt och bestäm en potential till det.

En eventuell potential Φ uppfyller $\nabla\Phi = \vec{F}$, dvs

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2xy \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^3yz + x^2 + 1 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = x^3y^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Den sista ekvationen ger } \Phi(x, y, z) = x^3y^2z + f(x, y). \text{ Partiell} \\ \text{derivering med avseende på } x \text{ ger sedan} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2y^2z + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \text{och efter jämförelse med första ekvationen inser vi att} \\ f'_x = 2xy, \text{ vilket implicerar att } f(x, y) = x^2y + g(y). \end{array}$$

Partiell derivering av $\Phi(x, y, z) = x^3y^2z + x^2y + g(y)$ med avseende på y ger slutligen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^3yz + x^2 + g'(y) \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = y + C$$

Så vektorfältet är konservativt med potentialen $\Phi(x, y, z) = x^3y^2z + x^2y + y + C$.

Att bestämma potentialen till ett vektorfält kan leda till ganska komplicerade räkningar. Som tur är finns det ett enkelt villkor som måste vara uppfyllt för att ett vektorfält ska vara konservativt (villkoret är lokalt och inte tillräckligt för att visa att fältet ska vara konservativt). (dvs. fältet är konservativt $\Rightarrow$ villkoret är uppfyllt, men villkoret är uppfyllt $\nRightarrow$ fältet är konservativt).

Om ett planärt vektorfält $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ är konservativt så gäller, för varje potential $\Phi(x, y)$ till $\vec{F}$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

eftersom blandade partiella derivator är lika (Schwarz sats 5). Ett planärt vektorfält kan alltså bara vara konservativt på D om villkoret $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ är uppfyllt i alla punkter $(x, y) \in D$. För vektorfält $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ i rummet ges motsvarande nödvändiga villkor för att $\vec{F}$ ska vara konservativt av de tre ekvationerna

$$\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}}_{\text{Tänk } \nabla \times \vec{F}}$$

som alla måste vara uppfyllda för att $\vec{F}$ ska vara konservativt.

$\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

$P, Q, R : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$

$\Phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ är fältets (skalär)potential om: $P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ och $Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ och $R = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$

Schwarz sats ger då följande nödvändigt villkor för fältet att vara konservativt (att ha en potential):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Det är så, eftersom potentialens Hessian är symmetrisk (Schwarz!) och den är lik med fältets Jacobian:

$$\mathcal{H}(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} = D\vec{F}$$

Figur 52: Motivering för de nödvändiga villkoren för ett 3D-vektorfält att vara konservativt; för 2D-vektorfält är motiveringen samma, men respektive matriserna är 2×2 -matriser. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Föreläsning 18: Kurvintegraler av vektorfält; Huvudsatsen

Betrakta en partikel som rör sig längs en kurva γ i ett kraftfält som påverkar partikeln med kraften $\vec{F}(\vec{r})$ där $\vec{r}$ är partikelns läge. Vi vill beräkna det arbete som fältet uträttar vid partikelns förflyttning längs γ . Vi parametriserar kurvan γ så att $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ längs kurvan. Välj sedan en partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ av parameterintervallet och betrakta delintervallet $[t_{k-1}, t_k]$. Om intervallet är kort, så kan vi betrakta kraften $\vec{F}(\vec{r}(t))$ som konstant för $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Under delintervallet $[t_{k-1}, t_k]$ utför fältet arbetet

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})) \approx \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \Delta t_k.$$

Det totala arbetet blir Riemannsumman

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \Delta t_k$$

som konvergerar mot integralen

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

när vi låter längden av delintervallen i partitionen gå mot noll.

För ett infinitesimalt tidsintervall dt , så blir $\vec{r}'(t)dt$ en infinitesimal sträcka längs kurvan som vi skulle kunna beteckna $d\vec{r}$. Man använder därför beteckningen

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad \text{för en parametrisering } \vec{r}(t) \text{ av } \gamma.$$

Eftersom

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)), & d\vec{r} &= (dx, dy, dz) \\ \vec{F}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \end{aligned}$$

så kan kurvintegralen av ett vektorfält också skrivas

$$\underbrace{\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Differentialform}} = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

vilket motiverar en annan beteckning för kurvintegralen:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

Senaste formeln (i 2D-variant) använd med fördel till uppgifter som Adams 15.4 uppgift 8:

Exempel 83. (Adams 15.4 uppgift 8) Evaluera

$$\oint_{\gamma} x^2 y^2 dx + x^3 y dy$$

där γ är kvadraten med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ orienterade moturs.

Vi delar upp kurvan γ i fyra kurvor: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ som i bilden. (T.ex. på kurvan γ_1 har vi: $dy = 0$ eftersom kurvan är horisontell, vilket betyder ingen förändring i y -ledet, dessutom $y = 0$ på hela kurvan, och x varierar mellan 0 och 1; likadant resonemang på de övriga kurvbitarna.) Sedan räknar vi kurvintegralerna på varje del-kurva och summerar resultaten:

$$\gamma_1 : y = 0, dy = 0, 0 \leq x \leq 1, \text{ alltså } \int_{\gamma_1} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = \int_0^1 x^2 \cdot 0 dx = 0.$$

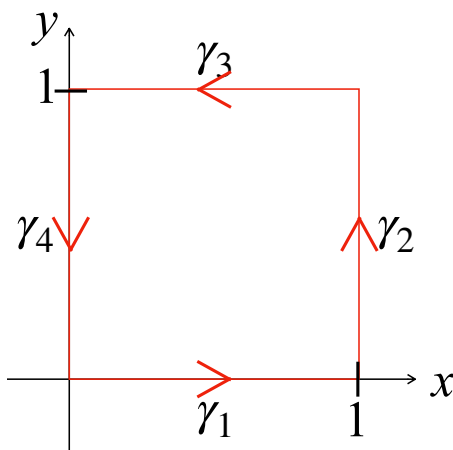
$$\gamma_2 : x = 1, dx = 0, 0 \leq y \leq 1, \text{ alltså } \int_{\gamma_2} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\gamma_3 : y = 1, dy = 0, x \text{ varierar från 1 till 0, alltså } \int_{\gamma_3} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = \int_1^0 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^0 = -\frac{1}{3}.$$

$$\gamma_4 : x = 0, dx = 0, y \text{ varierar från 1 till 0, alltså } \int_{\gamma_4} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = \int_1^0 0 \cdot y dy = 0.$$

Sammanfattningsvis:

$$\oint_{\gamma} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{6}.$$



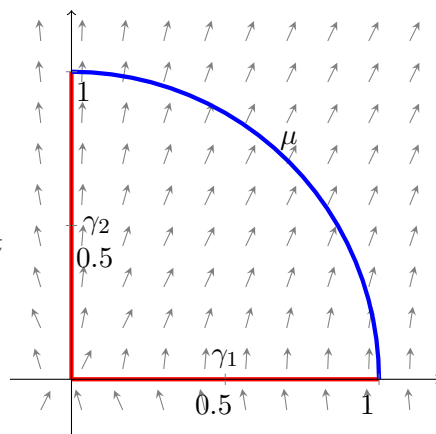
Figur 53: Föreläsning 19: Exempel 83, kurvan γ . (Bild: Hania, med KeyNote.)

Kurvintegraler längs två olika kurvor mellan ett par punkter har i allmänhet olika värden som vi ser i nästa exempel.

Exempel 84. Beräkna kurvintegralen av differentialformen $xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$ från $(1, 0)$ till $(0, 1)$ längs kurvan μ respektive kurvan $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (se bilden).

För μ väljer vi parametriseringen $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi/2]$ och får enligt definitionen

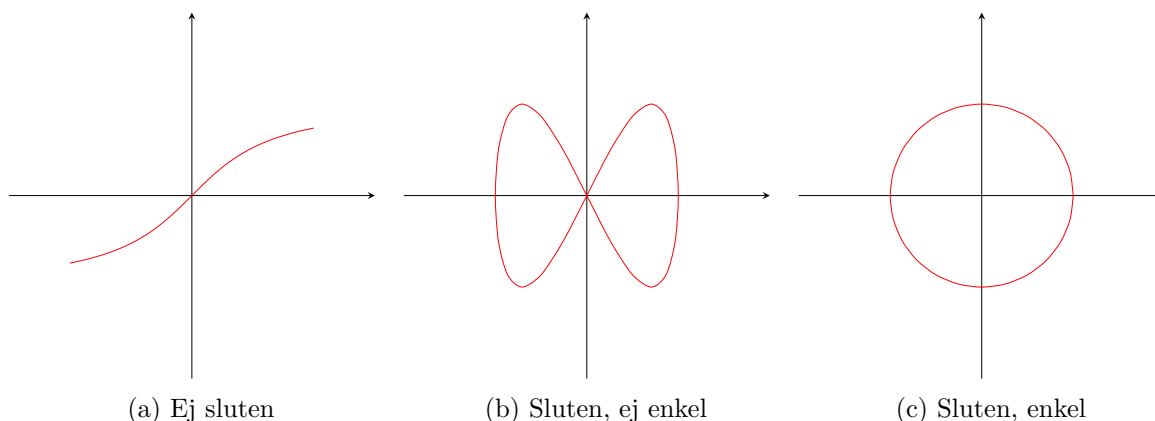
$$\begin{aligned} \int_{\mu} xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy &= \int_0^{\pi/2} (-\sin^2(t) \cos(t) + \cos(t)) \, dt \\ &= \left[-\frac{1}{3} \sin^3(t) + \sin(t) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



För γ_1 respektive γ_2 tar vi parametriseringarna¹¹ $(x, y) = (1 - t, 0)$, $t \in [0, 1]$ respektive $(x, y) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$. Vi får

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy &= \int_0^1 \underbrace{((1-t) \cdot 0 \cdot (-1))}_0 + \underbrace{((1-t)^2 + 0^2) \cdot 0}_0 \, dt + \int_0^1 \underbrace{0 \cdot t \cdot 0}_0 + \underbrace{(0^2 + t^2) \cdot 1}_{t^2} \, dt \\ &= 0 + \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Innan vi går vidare behöver vi ett par definitioner. En kurva vars start- och slutpunkt sammanfaller kallas en *sluten kurva*. Kurvan $\gamma_1 + \gamma_2 - \mu$ i exemplet ovan är således sluten. Om en sluten kurva inte skär sig själv i någon ytterligare punkt kallas den *enkel*, så kurvan i exemplet ovan är också enkel.



Vi ska nu visa att för konservativa vektorfält så är kurvintegralen mellan två punkter **oberoende** av vilken kurva mellan dessa båda punkter man väljer och att beräkning av kurvintegraler enkelt kan göras med hjälp av vektorfältets potential.

¹¹OBS: I stället för att parametrisera, kan man tillämpa samma metod som i föregående exempel, eftersom kurvbitarna är horisontella eller vertikala!

Sats 21. Låt $\vec{F}$ vara ett konservativt vektorfält i D med potential Φ . För varje kurva $\gamma \in D$ mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$, så gäller:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}).$$

Notera likheten med analysens fundamentalsats. Potentialen är motsvarigheten till den primitiva funktionen. Satsen implicerar att kurvintegralen mellan två punkter är oberoende av val av kurva. För slutna kurvor γ kallas kurvintegralen av $\vec{F}$ längs γ för *cirkulationen* av $\vec{F}$ längs γ och betecknas

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Om fältet är konservativt gäller alltså att ovanstående integral är lika med noll (då ändpunkterna sammanfaller med varandra).

Bevis. (Formuleras här för 3D-fält, men beviset är identiskt för alla dimensioner!) Låt $\vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ vara en parametrisering av kurvan γ från $\vec{a} = \vec{r}(\alpha)$ till $\vec{b} = \vec{r}(\beta)$. Enligt **kedjeregeln** för sammansättningen av $\Phi = \Phi(x, y, z)$ med $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ gäller

$$\frac{d}{dt}\Phi(\vec{r}(t)) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\vec{r}(t))x'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\vec{r}(t))y'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\vec{r}(t))z'(t) = \nabla\Phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

Insättning av detta samband i kurvintegralen av $\vec{F}$ ger då (enligt Analysens Huvudsats):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla\Phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\Phi(\vec{r}(t)) dt \\ &= \Phi(\vec{r}(\beta)) - \Phi(\vec{r}(\alpha)) = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}) \end{aligned}$$

□

Det är bara för konservativa vektorfält som kurvintegraler är vägoberoende. Låt $\vec{F}$ vara ett vektorfält definierat på ett bågvis sammanhängande (se bilden på s. 91) område D . Antag att kurvintegralen mellan två punkter är vägoberoende. Fixera punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och definiera, för varje $(x, y, z) \in D$ funktionen

$$\Phi(x, y, z) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där γ är en godtycklig kurva i D mellan (x_0, y_0, z_0) och (x, y, z) . Välj $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, där γ_1 går mellan (x_0, y_0, z_0) och (x_0, y, z) och γ_2 är en rät linje mellan (x_0, y, z) och (x, y, z) . γ_1 är oberoende av x , så

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt = P(x, y, z).$$

Analogt inses att $\Phi'_y = Q$ och $\Phi'_z = R$, så $\nabla\Phi = \vec{F}$. Vi har alltså visat att **om kurvintegralen av $\vec{F}$ är vägoberoende på D så måste $\vec{F}$ vara konservativt på D .** (Se också Sats 1 i Adams 15.4: *Path independence*.)

Sats 22. $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ är vägoberoende på $D \iff \vec{F}$ är konservativt på D .

Exempel 85. Beräkna

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

om γ är halvcirkeln $\vec{r}(t) = (2 + \cos(t), 1 + \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$ och $\vec{F}(x, y) = (y + 2x, x)$.

Eftersom $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, så misstänker vi att fältet är konservativt och vi vill därför hitta en potential Φ .

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = y + 2x \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{Andra ekvationen ger } \Phi(x, y) = xy + f(x), \text{ vilket efter} \\ \text{insättning i första ekvationen ger} \\ \Phi'_x = y + f'(x) = y + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow \\ f(x) = x^2 + C. \end{array} \end{array}$$

Vi har alltså $\Phi(x, y) = xy + x^2 + C$. Kurvans startpunkt är $(3, 1)$ och dess slutpunkt är $(1, 1)$, och eftersom $\vec{F}$ är konservativt på $\mathbb{R}^2$, så gäller:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(1, 1) - \Phi(3, 1) = 1 \cdot 1 + 1^2 - (3 \cdot 1 + 3^2) = -10.$$

Sammanfattning: Idag har vi lärt oss tre metoder för att beräkna kurvintegraler av vektorfält, och dessa metoder tillämpas i olika situationer (fast ibland kan flera metoder passa samma uppgift!):

- Direkt från definitionen, m.h.a. parametrisering av kurvan och skalärprodukt, som i Exempel 84. Metoden fungerar teoretiskt alltid vid integrering över kurvor med känd parametrisering, men i praktiken måste fältets komponentsfunktioner vara någorlunda enkla, annars får vi en riktigt hemsk enkel integral att lösa, vilket kan vara problematiskt. Fältet kan vara 2D eller 3D, behöver inte vara konservativt.
- Enligt formeln $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$: fungerar bäst om kurvan består av flera vertikala och horisontella bitar som i Exempel 83, där vi kan reducera problemet till flera envariabel-problem. Fungerar för alla sorters 2D-vektorfält.
- Med användning av Huvudsatsen som i Exempel 85. Metoden fungerar **enbart för konservativa fält**, både i 2D och 3D. När ska man börja misstänka att det är metoden som ska användas? Om det är tydligt från uppgiftens text att värdet på integralen inte beror på den konkreta vägen, utan enbart på start- och ändpunkten, alltså när man bara nämner var kurvan börjar och var den slutar, eller om det står *längs en godtycklig kurva mellan punkterna...* eller om man bara ritar en krumelur som i Travis Topic 23, minuterna 16:27–21:28. Innan du börjar tillämpa metoden, försäkra dig dock att fältet verkligen är konservativt! Annars kan man ju inte hitta någon potential, vilket behövs till beräkningen.

Under nästa föreläsning kommer vi att lära oss en till metod för att beräkna kurvintegraler av vektorfält. Villkoren för användning av *Greens sats* är listade på sista sidan av F19.

Föreläsning 19: Kurvintegraler: Greens sats i planet

Vi ska nu visa ett samband mellan kurvintegraler för slutna kurvor i planet och dubbelintegraler över området som innesluts av kurvan i fråga.

Definition 27. För ett kompakt område D i planet, så sägs γ vara den *positivt orienterade* randen till D om γ är en kurva som genomlöper hela ∂D och för vilken D alltid ligger till vänster om γ .

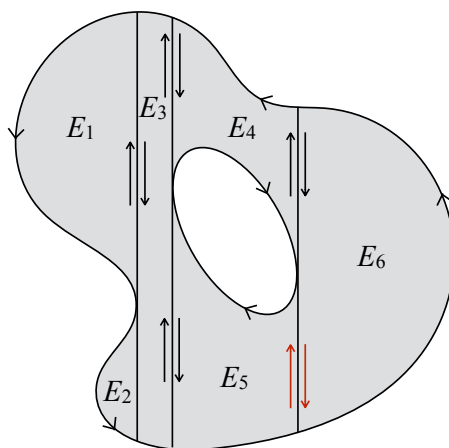
Sats 23. *Greens Formel.* Låt $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ vara ett planärt vektorfält definierat på en öppen mängd Ω i planet och låt $D \subset \Omega$ vara ett kompakt, regelbundet område vars rand ∂D är en positivt orienterad, styckvis glatt (C^1), sluten kurva. Om $\vec{F}$ har kontinuerliga partiella derivator på **hela** D , då gäller:

$$\oint_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Bevis. Ett område är **regelbundet** om det kan delas upp i ett ändligt antal x -enkla och ett ändligt antal y -enkla delområden. För att bevisa "P-delen" av satsen, delar vi upp området D i ändligt många delområden på formen

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

alltså y -enkla områden (se bilden).



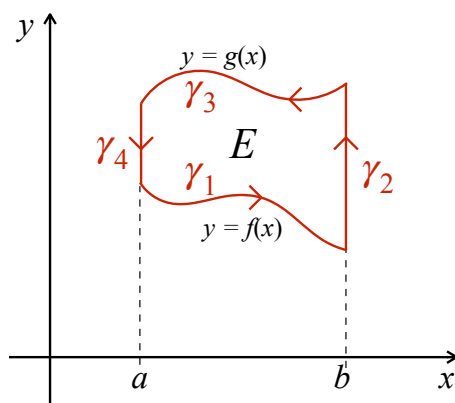
Figur 55: Föreläsning 19: beviset för Greens formel. Område D är en ändlig union av y -enkla områden E_i . (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vi börjar med att på valfritt delområde E visa "P-delen" av satsen, dvs.

$$\oint_{\gamma_E} P(x, y) dx = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \quad (*)$$

Vi beräknar dubbelintegralen i högerledet:

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (-P(x, g(x)) + P(x, f(x))) dx.$$



Figur 56: Föreläsning 19: beviset för Greens formel. Område E är y -enkelt. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Å andra sidan kan kurvan γ_1 parametreras som $\vec{r}(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$ och kurvan $-\gamma_3$ kan parametreras som $\vec{r}(t) = (t, g(t))$, $t \in [a, b]$, så

$$\int_{\gamma_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt, \quad \int_{\gamma_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(t, g(t)) dt.$$

Eftersom integralerna över kurvorna γ_4 (med ekvationen $x = a$) och γ_2 (med ekvationen $x = b$) båda är lika med noll (ty $dx = 0$), så har vi visat (*) för varje delområde E .

"P-delen" av satsen gäller på hela D eftersom dubbelintegralerna adderas och kurvintegralerna över de linjer som tillhör randen av två delområden men inte randen av D tar ut varandra, så summan av integralerna över de interna linjerna är lika med noll och vad som är kvar är kurvintegralen över randen.

För att visa "Q-delen" av satsen delar man upp D i ändligt många delområden på formen

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(y) \leq x \leq g(y), \quad c \leq y \leq d\},$$

alltså x -enkla områden. Man utför samma beräkningar som nyss för "P-delen" av satsen.

□

Observera att man kan använda Greens sats även om områdets rand är negativt orienterad, alltså medurs. Man beräknar då fältets arbete vid förflyttning av partikeln längs samma kurva, men åt andra hållet, och detta ger ju samma resultat till absolutbelopp, men med det motsatta tecknet. Det ser man också från definitionen av kurvintegralen av ett vektorfält. Om kurvan är negativt orienterad, tillämpa alltså Greens sats, men sätt ett minustecken framför resultatet. Sådan situation har vi t.ex. i uppgiften Adams 16.3-4.

Ibland händer det också att man använder Greens sats för en kurva som inte är sluten, som t.ex. integrering längs halvcirkelbågen: $x^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$. Man kan då *stänga* området med sträckan: $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$ och tillämpa Greens sats på hela slutna kurvan. Då måste man beräkna separat kurvintegralen över sträckan (tillämpa beräkningssätt som i exemplet 83 i F18), vilket inte är så svårt. Sedan använder man sig av detta att kurvintegralen över en summa av kurvor är lika med summan av kurvintegralerna på varje kurva för sig.

Exempel 86. Bestäm arean under cykloiden

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Eftersom vi inte kan lösa ut y som en funktion av x så fungerar inte tidigare metoder. Greens formel (**Se Example 1 i Adams 16.3! Använd sedan den tredje formeln till rekommenderade uppgiften Adams 16.3-5.**) ger dock att

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} y \, dx &= \iint_D -1 \, dx \, dy = -(\text{Arean av } D). \quad \text{Så arean är:} \\ A &= - \int_{\gamma} y \, dx = - \int_{2\pi}^0 \underbrace{(1 - \cos(t))}_y \underbrace{(1 - \cos(t))}_{dx} dt + \int_0^{2\pi} \underbrace{0}_y \underbrace{(-1)}_{dx} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} - 2\cos(t) \right) dt \\ &= \left[\frac{3t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} - 2\sin(t) \right]_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

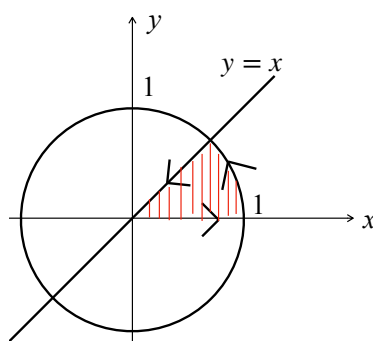
Vi tar nu ett exempel på hur beräkning av kurvintegraler kan förenklas med hjälp av Greens formel.

Exempel 87. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} -y^3 \, dx + x^3 \, dy,$$

där γ är den positivt orienterade randen till cirkelsektorn $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq x$. Se bilden.

Problemet kan lösas genom att parametrisera de tre randstyckena, men med Greens formel blir räkningarna mycket enklare.



Figur 57: Föreläsning 19: Greens formel, Exempel 87. (Bild: Hania, med KeyNote.)

$$\int_{\gamma} \underbrace{-y^3}_{P} \, dx + \underbrace{x^3}_{Q} \, dy = \iint_D \underbrace{3x^2}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} - \underbrace{(-3y^2)}_{\frac{\partial P}{\partial y}} \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 3r^2 r \, dr = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{16}.$$

OBS: uppgiften skulle räknas på ett identiskt sätt om $P(x, y) = -y^3 + f(x)$ och $Q(x, y) = x^3 + g(y)$, där f och g är godtyckliga C^1 -funktioner av en variabel i hela området inom kurvan γ , t.ex. $f(x) = \cos x + x^4 - e^{5x} - 25$ och $g(y) = \sin y + e^{3y+5} - 46$. Sådant *skräp* i formlerna för P och Q försvinner ju vid partiell integrering! Skräpets närvaro gör det också tydligt att man inte ska lösa uppgiften direkt från definitionen av kurvintegraler, alltså m.h.a. parametrisering av kurvan. Det skulle bli hemska beräkningar efter insättningen!

Vi har tidigare sett att om ett planärt vektorfält är konservativt i D , så gäller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i alla punkter i D (Greens formel ger då $\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$).

Definition 28. En öppen mängd D är *enkelt sammanhängande* om den är *bågvis sammanhängande* och om varje enkel sluten kurva $\gamma \in D$ avgränsar ett område som helt ligger i D (med andra ord om D "saknar hål").

Sats 24. Om det planära vektorfältet $\vec{F}$ uppfyller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i en enkelt sammanhängande mängd D , så är $\vec{F}$ konservativt i D .

Bevis. Tag en godtycklig kurva γ i D . Eftersom D är enkelt sammanhängande så är mängden Ω , som innesluts av γ , en delmängd av D . Alltså gäller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i alla punkter i Ω och Greens formel ger:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Kurvintegralen är vägoberoende} \\ \vec{F} \text{ är konservativt i } D. \end{array}$$

□

Vi avslutar med att undersöka det planära **magnetfältet** kring en oändligt lång ledare genomfluten av en konstant ström. Bortsett från en konstant ges fältet av

$$\vec{B}(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

utanför origo gäller:

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial B_1}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

så $\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{\partial B_1}{\partial y}$ utanför origo. På en kompakt, enkelt sammanhängande mängd som inte innehåller origo, så är $\vec{B}$ alltså konservativt och integralen över randen av denna mängd är således lika med noll.

På en cirkel med radie R och centrum i origo gäller, eftersom cirkeln har parametriseringen

$$(x, y) = (R \cos(t), R \sin(t))$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{B} \cdot d\vec{r} &= - \int_0^{2\pi} \frac{(-R \sin(t), R \cos(t))}{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} \cdot (-R \sin(t), R \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

oberoende av cirkelns radie R . Detta betyder att kurvintegraler av fältet inte är vägoberoende och därmed (sats 22 på sidan 109 och sats 1 hos Adams 15.4) vet vi att fältet inte är konservativt på hela planet. Detta exempel visar att villkoret för fältet att vara konservativt inte är tillräckligt, utan enbart nödvändigt.

Låt nu γ vara en godtyckligt enkel sluten kurva som går ett varv runt origo i positiv riktning (dvs. moturs). Kurvan omsluter då en cirkulär kurva σ kring origo. Greens formel ger:

$$\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right)}_{0 \text{ överallt i } D \text{ som ej innehåller origo}} dx dy - \int_{\sigma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{-\sigma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Observera att samma beräkning för det **elektrostatiska fältet**

$$\vec{E}(x, y) = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

ger ett annat resultat vid integrering längs samma cirkel som ovan:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos(t), R \sin(t))}{R^2 \cos^2(t) + R^2 \sin^2(t)} \cdot (-R \sin(t), R \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-R^2 \cos(t) \sin(t) + R^2 \cos(t) \sin(t)}{R^2} dt = 0 \end{aligned}$$

oberoende av cirkelns radie R . Kontrollera själv att fältet uppfyller det nödvändiga villkoret för att vara konservativt (utanför origo). Glöm inte att tillämpa både produkt- och kvotregeln och kedjeregeln! Vi beräknar en potential för fältet $\vec{E}$ (se också uppgift 4 i Adams 15.2):

$$\nabla \Phi = (P, Q) \Rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Det första villkoret ger (substitution! täljaren är nästan derivatan till nämnaren!):

$$\Phi(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \psi(y).$$

Insättning av detta i det andra villkoret ger:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \psi(y) \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \psi'(y)$$

vilket ger $\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = C$ och alla potentialfunktioner till $\vec{E}$ har formen:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Detta betyder i synnerhet att ekvipotentialkurvor för detta fält är cirklar med mittpunkten i origo. Dessutom, om γ är en kurva med startpunkten i $\vec{a} = (a_1, a_2)$ och slutpunkten i $\vec{b} = (b_1, b_2)$, ger Huvudsatsen att:

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \Phi(b_1, b_2) - \Phi(a_1, a_2) = \frac{1}{2} \ln(b_1^2 + b_2^2) - \frac{1}{2} \ln(a_1^2 + a_2^2).$$

Sammanfattningsvis: Greens sats kan tillämpas bara för 2D-fält, alltså $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Satsen omvandlar kurvintegralen av ett vektorfält över en sluten kurva till dubbelintegralen av fältets (2D)-rotation över (det platta) området D inom kurvan. **Antaganden** som ska kontrolleras för att veta om det är OK att använda satsen:

- **kurvan** som vi integrerar över är **sluten**. Om detta inte är fallet, “stänger” vi den och tillämpar Greens sats ändå på summan av kurvorna.
- **kurvan** är **positivt orienterad** (moturs omkring D ; medurs runt eventuella hål i D). Om orienteringen är negativ, tillämpar vi satsen ändå, men vi måste sätta minus framför dubbelintegralen (ty kurvintegralen i omvänd riktning är lika med minus kurvintegralen i den ursprungliga riktningen; tänk att kurvintegralen beskriver arbetet! Puttar man partikeln i den motsatta riktningen, blir även arbetets tecken motsatt.); kurvan måste också vara stycksvis C^1 , men det är alltid fallet i uppgifterna, så det måste man inte kontrollera.
- **området** D måste vara **regelbundet**, alltså sådant att vi *kan* räkna dubbelintegraler på det (alltså D är antingen en axelparallell rektangel, eller x -enkelt eller y -enkelt område; eller cirkulär, så att vi kan m.h.a. polärt variabelbyte omvandla det till en axelparallell rektangel; eller är D en union av sådana områden). Området måste också vara **slutet**, alltså innehålla hela sin rand ∂D , eftersom omvandlingsformeln gäller kurvintegralen över hela randen till D .
- **fältet** ska vara C^1 (alltså dess komponentfunktioner P och Q måste vara **kontinuerligt deriverbara**) inom **hela** området D ! Oftast är P och Q uppbyggda av polynomfunktioner, exponentialfunktioner, sinus och cosinus, och då är de t.o.m. oändligt många gånger deriverbara. Problemet uppstår oftast om man har division i formeln för P eller Q och uttrycket i nämnaren är noll någonstans i D (som i exemplet med **magnetfältet** ovan). Då “omsluter man singulariteter” och tillämpar Greens sats ändå på D utan cirkelskivorna som innehåller singulariteterna. Glöm inte att orienteringen på cirkelarna som omsluter singulariteterna måste vara *medurs*! (orientering positiv betyder ju att vi har området D till vänster om vi vandrar längs randen, vilket ger moturs på den yttre randen och medurs kring “hål” inom området D).

På slutet av anteckningarna finns det en illustration som visar på vilket sätt man kan se både Greens formel och Huvudsatsen för Konservativa Vektorfält som generaliseringar av Analysens Huvudsats från envariabelanalys. Båda bevisas också m.h.a. Analysens Huvudsats. Jämför med texten som står i början av delkapitlet 16.3 hos Adams.

Föreläsning 20: Tentaförberedande; repetition på hela kursen

I detta avslutande kapitel ska vi gå igenom några uppgifter från några tidigare tentor, och även tipsa om några saker som kan vara bra att tänka på inför tentamen.

Här kommer några tips till tentaplugget. Läs Pouyas anteckningar, titta på filerna som jag lägger upp på SP, räkna gamla tentor och rekommenderade uppgifter. Har du det jobbigt: be om hjälp; glöm inte **Mattesupporten!** Räkna gärna Konstantinos *Practice exams* (1 och 2), eftersom de visar tydligt vad man ska kunna efter avslutad kurs. Det kommer 8 uppgifter (som kan ge max 5 poäng var) på tentan och innehållet kommer att vara följande¹²:

- Uppgifter från samma ämnesområde som *dugga*, alltså från **F 1–8**. Det kan alltså vara något om *kurvor* (parametrisering, hastighet, acceleration, båglängd) eller om *tvåvariabelfunktioner* (gränsvärde och kontinuitet, kontinuerliga utvidgningar, partiella derivator, tangentplan, linjära approximationer); *kedjeregeln*, ev. med tillämpningar till PDE. Tänk också på det att kedjeregeln kan behövas användas i vilken uppgift som helst där man räknar derivator (se t.ex. Exempel 44 på s. 50 i Pouyas anteckningar: utan kedjeregeln skulle man ju få fel gradient). Det kan också förekomma något mer grundläggande som *ytor och polära / sfäriska / cylindriska koordinater*.
- *Optimeringsproblem* på begränsade och obegränsade områden (alltså *Hessian-metoden* eller en av två *Lagranges metoder*; eller en blandning av dessa). Ni måste själva kunna bedöma vilken metod som passar vid vilken sorts optimeringsuppgift: när man ska analysera stationära punkter och Hessianen, och när man ska tillämpa Lagranges metoder, och när man ska blanda metoderna och hur precis. **F 9–12**.
- *Dubbel- och trippelintegraler* (**F 13–16**). Man ska absolut kunna *polärt och rymdspolärt koordinatbyte*. Det första kan även behövas till en uppgift *kurvintegraler* (om man behöver tillämpa Greens sats på ett cirkulärt område). Var säker att antingen kunna *Jacobianen* utantill eller att kunna räkna ut den (för polärt koordinatbyte finns beräkningen i F14, helt uppe på s. 84: bara en enda rad av beräkningar; för sfäriska / rymdspolära och cylindriska finns beräkningarna i F16 i exemplen 74 och 76; observera att Jacobianen för det cylindriska koordinatbytet är samma som för det polära koordinatbyte).
- *Vektorfält och kurvintegraler* (**F 17–19**). Läs **Trigonometriska formler för flervariabelanalys** i F14 (s. 86). Man måste lära sig bedöma vilka uppgifter löses helst med Greens sats, och när det är dags att använda Huvudsatsen för vektorfält. För den senaste är det mycket viktigt att kunna ta fram en *potentialfunktion* till ett *konserverativt vektorfält*. Glöm inte att man också måste kunna beräkna kurvintegraler direkt från definitionen: ibland går det inte att använda Greens sats direkt, utan man måste stänga kurvan först, och beräkna kurvintegralen på denna extra biten separat, direkt från definitionen. Det finns också uppgifter som inte lämpar sig för Greens sats alls, t.ex. om det inte går att omsluta singulariteterna, och då kan man vara tvungen räkna kurvintegralen från definitionen.

¹²Titta också på alla kursmål i kursdokumentet för att vara säker att du inte har missat något.

Exempel 88. Maksim Maydanskiy 2018-08-30, upp.1

Låt $f(x, y) = 2e^{2y} - 4e^x e^y + e^{4x}$. Bestäm och klassificera alla kritiska (stationära) punkter till f .

Metod 1:

Vi söker först eventuella kritiska punkter till f :

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -4e^x e^y + 4e^{4x} = 0 \\ f_y(x, y) = 4e^{2y} - 4e^x e^y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x+y} = e^{4x} \\ e^{2y} = e^{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4x \\ x + y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Andraderivator i $(0, 0)$: $f_{xx} = -4e^x e^y + 16e^{4x} = 12$, $f_{yy} = 8e^{2y} - 4e^x e^y = 4$, $f_{xy} = f_{yx} = -4e^x e^y = -4$, vilket ger Hessianmatrisen $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; den kvadratiska formen $12h^2 - 8hk + 4k^2 = 4(h^2 - 2hk + k^2) + 8h^2 = (h - k)^2 + 8h^2$ är positivt definit, vilket ger ett lokalt minimum i origo. (Eller: $D_1 = 12 > 0$, $D_2 = 48 - 16 > 0$.)

Svar: lokalt minimum i $(0, 0)$.

Metod 2:

Let $t = e^x, s = e^y$. Then $f(x, y) = 2s^2 - 4ts + t^4 = F(s, t)$.

The critical points of f correspond to critical points of F and are of the same type – but we must have $t, s > 0$. We have $F_s = 4s - 4t, F_t = -4s + 4t^3$. $F_s = F_t = 0$ translates to $s = t = t^3$. So as $t > 0$ we have $1 = t^2, t = 1$. So there is a unique critical point $s = t = 1$. There $F_{ss} = 4, F_{tt} = 12t^3 = 12, F_{ts} = F_{st} = -4$ so the the Hessian is $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; this has positive trace and determinant, so is positive definite, and we are at a local minimum. Recall that $t = 1$ means $e^x = 1, x = 0$. Similarly $s = 1$ means $y = 0$.

Answer: local minimum at $(0, 0)$.

Exempel 89. Maksim Maydanskiy 2018-08-30, upp.2

- (2 poäng) Låt $u(x, y) = xy$ och $v(x, y) = x/y$, och låt F vara en glatt (oändligt många gånger differentierbar) funktion (av två positiva variabler). Låt $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$. Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ uttryckt i $x, y, \frac{\partial F}{\partial u}$ och $\frac{\partial F}{\partial v}$.
- (3 poäng) Använd variabelsubstitutionen $u = xy$ och $v = x/y$ för att lösa PDE

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = xy$$

(D.v.s. hitta alla glatta $f(x, y)$ (av positiva variabler) som uppfyller ekvationen. Du får anta att f har formen $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$.)

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = yF_u + \frac{1}{y}F_v$$

and

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = xF_u - \frac{x}{y^2}F_v.$$

The equation $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = xy$ becomes $xyF_u + xyF_v = xy$ or $F_u = 1/2$, so $F(u, v) = u/2 + g(v)$ for any smooth function g , and so $f(x, y) = F(xy, x/y) = xy/2 + g(x/y)$.

Answer: $f(x, y) = F(xy, x/y) = xy/2 + g(x/y)$ for arbitrary smooth function g .

Exempel 90. Maksim Maydanskiy 2018-08-30, upp.3

1. (2 poäng) Bestäm ekvationen för tangentplanet till $(x^2 + z^2) + (y - 3)^3y^3 = 0$ i punkten $(2, 2, 2)$.
2. (1 poäng) Förklara varför en del av $(x^2 + z^2) + (y - 3)^3y^3 = 0$ som ligger i en omgivning av $(2, 2, 2)$ kan uttryckas som $z = f(x, y)$ för en glatt f .
3. (2 poäng) Beräkna partiell derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $(x_0, y_0) = (2, 2)$ (f definieras i delen just ovan).

Metod 1:

The surface is a level surface of $g(x, y, z) = (x^2 + z^2) + (y - 3)^3y^3$. Normal vector is given by

$$\nabla g = (2x, 3(y - 3)^2y^3 + (y - 3)^3y^2, 2z),$$

which at $(2, 2, 2)$ is equal to $(4, 12, 4)$. Thus the plane is $4(x - 2) + 12(y - 2) + 4(z - 2) = 0$ or $(x - 2) + 3(y - 2) + (z - 2) = 0$ or $x + 3y + z = 10$.

Answer: $x + 3y + z = 10$.

The tangent plane at $(2, 2, 2)$ is non-vertical, and so fact is a graph: we can see $z = 10 - x - 3y = L(x, y)$. By implicit function theorem, the same is true for the surface near $(2, 2, 2)$.

The partial derivative of $f(x, y)$ at $(2, 2)$ is the same as for $L(x, y)$, and so is -3 . Alternatively, the formula in implicit function theorem says

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{12}{4} = -3.$$

Answer: -3 .

Metod 2

We can solve for z via $z = \pm\sqrt{-(y - 3)^3y^3 - x^2}$ and since near $(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 2)$ we have $z > 0$ we pick plus, so that $z = \sqrt{-(y - 3)^3y^3 - x^2}$. This solves part b.

We can then find partial derivatives of $f(x, y) = \sqrt{-(y - 3)^3y^3 - x^2}$ at $(x_0, y_0) = (2, 2)$, to get (after some computation) $f_x(2, 2) = -1$, $f_y(2, 2) = -3$, which solves part 3, and also allows us to write the tangent plane equation

$$z = f(2, 2) + f_x(2, 2)(x - 2) + f_y(2, 2)(y - 2) = 2 - (x - 2) - 3(y - 2)$$

which is $x + 3y + z = 10$.

Note: If we asked instead whether it is possible to solve for $y = g(x, z)$ and what the $\frac{\partial g}{\partial x}$ and $\frac{\partial g}{\partial y}$ are, explicit solution along the lines of Method 2 would become much more complicated (and if the equation were, for example, $(x^2 + z^2) + (y^5 - 25y^3 + 60y) = 0$ it would be impossible, as proved by a version of advanced mathematical theory called Galois theory); however, solution along the lines of Method 1 using implicit function theory would still be fairly straightforward.

Exempel 91. Maksim Maydanskiy 2018-08-30, upp.4

Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C y^2 dx + x^2 dy,$$

där kurvan C är randkurvan av parallelltrapetsen med hörn i $(0, -1)$, $(1, -2)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$, orienterad moturs.

By Green's theorem

$$\oint_C y^2 dx + x^2 dy = \iint_S \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S (2x - 2y) dx dy$$

where S is the interior of the trapezoid.

We use vertical slices for the integral. The upper curve is the segment through $(1, 2)$ and $(0, 1)$, and is given by $y = x + 1$. The lower curve is the segment through $(1, -2)$ and $(0, -1)$, and is given by $y = -x - 1$ (minus of the top line). The x coordinate in the trapezoid ranges from 0 to 1.

The integral becomes

$$2 \int_0^1 \left(\int_{-1-x}^{1+x} (x - y) dy \right) dx.$$

Inner integral is equal to $xy - \frac{y^2}{2}$, and evaluates to $(x + x^2) - (-x - x^2) = 2(x + x^2)$ (the integral of y disappears because of $(x, y) \leftrightarrow (x, -y)$ symmetry, which we could've used earlier). The outer integral is

$$2 \int_0^1 2(x + x^2) dx = 2 \left[x^2 + \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{5}{3}.$$

Answer: $10/3$.

Alternatively, we can parametrize each of the 4 segments in turn, compute the integrals and add them up.

For the left vertical side one gets 0; for the right vertical side 4; for top slanted side $2 - \frac{2}{3}$; for the bottom slanted side -2 - for the sum of $-\frac{2}{3} + 4 = 10/3$.

Exempel 92. Maksim Maydanskiy 2018-08-30, upp.5

Beräkna trippelintegralen av $f(x, y, z) = zy^2x^2$ över den cylindriska kroppen som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$ och $z \leq 1$.

We use cylindrical coordinates. The bounds become $r \leq 1, z \geq 0, z \leq 1$. We have

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Recall $dx dy = r dr d\theta$. Substituting everything in, the integral becomes

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} z r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right) r dr \right) dz = \int_0^1 z dz \int_0^1 r^5 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta.$$

We have

$$\int_0^1 z dz = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 r^5 dr = \frac{1}{6}.$$

For the last one, $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, and so

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta.$$

We either remember from before that the average of $\sin^2 \theta$ is $1/2$, so that

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

or we use $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$ and integrate to get

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta = \pi + 0 = \pi.$$

Either way $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$.

All together, the answer is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{48}$.

Answer: $\frac{\pi}{48}$.

Exempel 93. Maksim Maydanskiy 2018-08-30, upp.6

Låt

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 e^{y^2} \cos(\pi z), 2x^3 y e^{y^2} \cos(\pi z), -\pi x^3 e^{y^2} \sin(\pi z) + 1).$$

1. (3 poäng) Bevisa att fältet $\vec{F}$ är konservativt och hitta en skalär potential för $\vec{F}$.
2. (2 poäng) Beräkna $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där γ är kurvan parametriserad med $\vec{r}(t) = (e^t, t, \cos(\pi t))$ för $t \in (0, 1)$.

Suppose the potential is $f(x, y, z)$. Then $f_x = P = 3x^2 e^{y^2} \cos(\pi z)$, so

$$f = \int 3x^2 e^{y^2} \cos(\pi z) dx = x^3 e^{y^2} \cos(\pi z) + \Phi(y, z).$$

Then we must also have

$$Q = f_y = x^3 2y e^{y^2} \cos(\pi z) + \Phi_y.$$

We conclude $\Phi_y = 0$ and $\Phi(y, z) = \Psi(z)$. Finally we get

$$R = f_z = -\pi x^3 e^{y^2} \sin(\pi z) + \Psi_z,$$

so $\Psi_z = 1$, $\Psi(z) = z + C$. All together

$$f(x, y, z) = x^3 e^{y^2} \cos(\pi z) + z + C$$

for any constant C works as a potential. The fact that $\vec{F}$ has a potential implies that it is conservative, so we are done.

For any conservative vector field we have $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\text{end}) - f(\text{start})$. The start point is

$$\vec{r}(0) = (e^0, 0, \cos(\pi \cdot 0)) = (1, 0, 1)$$

the end point is

$$\vec{r}(1) = (e^1, 1, \cos(\pi \cdot 1)) = (e, 1, -1).$$

Thus

$$f(\text{end}) = e^3 \cdot e^1 \cdot (-1) + (-1) = -e^4 - 1, \quad f(\text{start}) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

So the answer is $-1 - e^4$.

Answer: $-e^4 - 1$.

Exempel 94. 2011-12-12: 2. Lös den partiella differentialekvationen $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - 2xy = 0$ i området $x > 0$, $y > 0$ genom variabelbytet $u = xy$, $v = x/y$.

Kedjeregeln ger nu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

Insättning i PDE:n ger:

$$\begin{aligned} &x \left(y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + y \left(x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) - 2xy = 0 \\ \Rightarrow &2xy \frac{\partial f}{\partial u} - 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad 2xy \left(\frac{\partial f}{\partial u} - 1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 1 \\ \Rightarrow &f(u, v) = u + g(v) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = xy + g\left(\frac{x}{y}\right), \end{aligned}$$

för någon godtycklig funktion g .

Öva även på andra ordningens kedjeregeln. Exempelvis gäller i detta fall

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) = x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{x}{y^3} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Exempel 95. 2012-08-21: 3. Låt $f(x, y) = x + y + 4$ vara definierad på ellipsen $3x^2 + y^2 - 3 = 0$. Antar $f(x, y)$ största och/eller minsta värde på ellipsen? Bestäm i så fall dessa värden.

Eftersom f är kontinuerlig och ellipsen är en kompakt mängd, så antar största och minsta värde. Antingen kan problemet lösas genom att ellipsen parametriseras $\vec{r}(\theta) = (\cos(\theta), \sqrt{3}\sin(\theta))$ eller genom att använda Lagrangemultiplikatorer. Enligt den sistnämnda metoden gäller $\nabla f = \lambda \nabla g$, där $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 3$. Vi får:

$$\begin{cases} 1 = \lambda 6x \\ 1 = \lambda 2y \\ 3x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{6\lambda x}{2\lambda y} \Rightarrow y = 3x$$

Insättning i bivillkoret $3x^2 + y^2 - 3 = 0$ ger sedan

$$3x^2 + (3x)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

Extremvärdena antas i punkterna $\pm(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ och är $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 6$ (maximum) och $f(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) = 2$ (minimum).

Andra delar av första halvan av kursen som är viktiga att repetera:

- Bestämning av kritiska punkter och karaktärisering av dessa (kvadratiska former).
- Bestämning av största och minsta värde för $f(x, y)$ på ett kompakt område i planet (kritiska punkter på det inre, parametrisering av randen, glöm inte hörnen på områden som har dessa).
- Bestämning av tangentplan till funktioner.
- Gränsvärden (visa existens eller motbevisa existens genom att testa ett antal olika linjer).

Andra delar av andra halvan av kursen som är viktiga att repetera:

- Lagranges metoder.
- Dubbelintegraler, Variabel-substitution (polära och andra), bestämning av integrationsgränser för exempelvis trianglar.
- Bestämning av volymer av kroppar med hjälp av trippelintegraler (visualisering av andragsytor är viktigt för detta).
- Beräkning av kurvintegraler i planet med hjälp av Greens formel och på konservativa vektorfält med hjälp av potentialen.

Appendix: Bilder till Föreläsningar 2 och 19

The diagram shows a cone with a vertical axis and a circular base. Four different cross-sections are highlighted with colored labels:

- Circle** (red): A horizontal slice parallel to the base.
- Ellipse** (green): A diagonal slice parallel to the base.
- Parabola** (blue): A vertical slice parallel to the cone's side.
- Hyperbola** (orange): A vertical slice perpendicular to the cone's side.

Kägelsnitt:
hur känner man igen dem på deras ekvationer.

Cirkel

Cirkels ekvation – ett exempel
En cirkel har radien $r=4$ och medelpunkten $(3,-1)$.
Bestäm denna cirkels ekvation.

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$4^2 = (x-3)^2 + (y-(-1))^2$$

Cirkels ekvation är

$$16 = (x-3)^2 + (y+1)^2$$

Parabel

$$y = ax^2 + bx + c$$

eller:

$$x = ay^2 + by + c$$

Parabel

The diagram shows a cone with a vertical axis. A parabolic cross-section is highlighted in a shaded area, representing a slice parallel to the cone's side.

(bara en av variablerna är i kvadrat!)

Ellips

I det här exemplet:
Mittpunkters koordinater:
(1,2); den stora halvaxeln:
 $a=3$, den lilla halvaxeln: $b=2$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$$

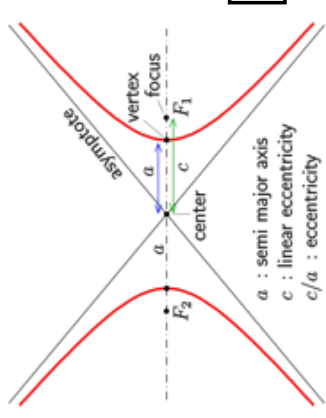
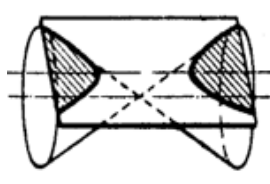
$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$$

$$4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y-2)^2 - 4] + 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$

Hyperbel



a : semi major axis
 c : linear eccentricity
 c/a : eccentricity

vertex
focus
center
asymptote

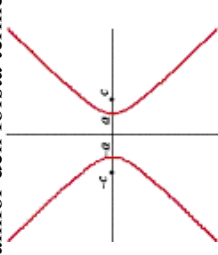
F_1
 F_2

a
 c

$x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

Om man vänder roller på x och y, kommer minuset framför den första termen i stället:

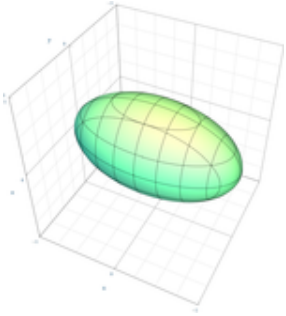
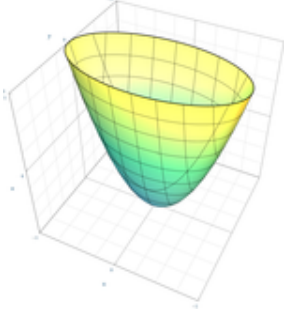
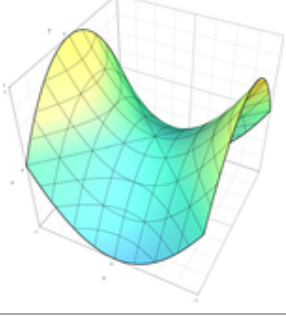
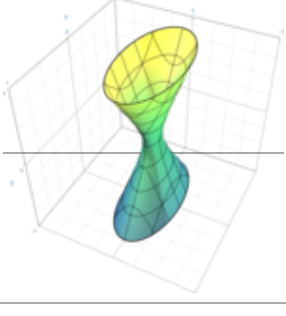
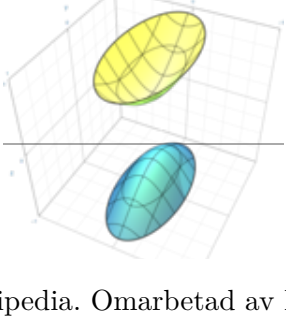


$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
 $b^2 = c^2 - a^2$

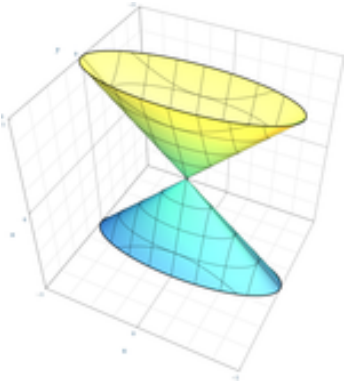
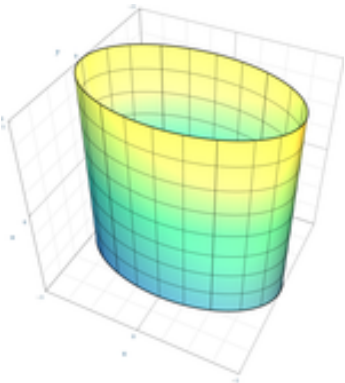
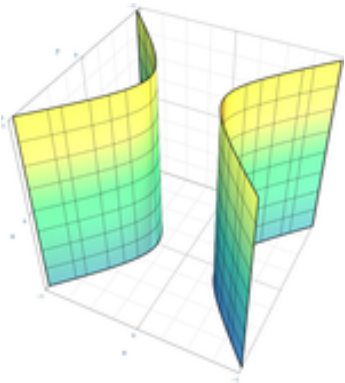
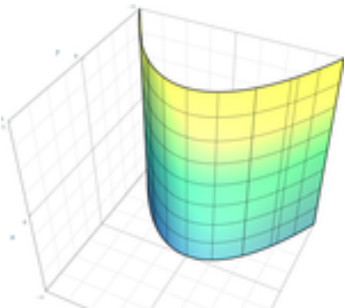
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
 $a^2 = c^2 - b^2$

(båda variablerna är i kvadrat, men med OLIKA tecken: en med plus och den andra med minus)

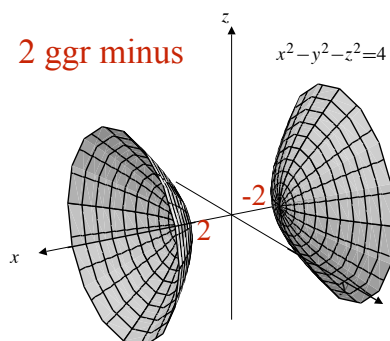
Figur 58: Föreläsning 2: Andragradskurvor. (Bilder: från nätet. Omarbetade av Hania.)

Non-degenerate real quadric surfaces		
Ellipsoid	Ellipsoid (bara PLUS) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Elliptic paraboloid	Elliptisk paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	
Hyperbolic paraboloid	Om en av variabler är UTAN kvadrat! Om det finns ett MINUS Hyperbolic paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	
Enmantlad hyperboloid	Om det finns ett MINUS Elliptic hyperboloid of one sheet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Enmantlad: ett MINUS	
Tvåmantlad hyperboloid	Elliptic hyperboloid of two sheets $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Tvåmantlad: två ggr MINUS	

Figur 59: Föreläsning 2: Andragradsytor, bild 1. (Bild: Wikipedia. Omarbetad av Hania.)

Degenerate real quadric surfaces		
Elliptisk kon (alla variabler i kvadrat och HL=0) Elliptic <u>cone</u>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	
Elliptisk cylinder Cylinder: om en variabel SAKNAS Elliptic <u>cylinder</u>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Hyperbolisk cylinder Om det finns ett MINUS Hyperbolic <u>cylinder</u>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Parabolisk cylinder Om en av variabler är UTAN kvadrat! Parabolic <u>cylinder</u>	$x^2 + 2ay = 0$	

Figur 60: Föreläsning 2: Andragradsytor, bild 2. (Bild: Wikipedia. Omarbetad av Hania.)



Skärningen mellan ytan och planet $z = c$ (för varje tal c) ger hyperbler $x^2 - y^2 = 4 + c^2$ och skärningen mellan ytan och planet $y = c$ ger hyperbler $x^2 - z^2 = 4 + c^2$. Därför namnet **hyperboloid**.

Ytan finns bara där $|x| \geq 2$

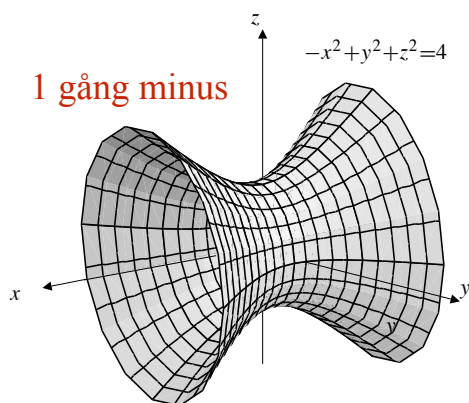
Fig. 10.5.7

På x -axeln gäller det: $y = 0$ och $z = 0$. Ytans ekvation blir därför där $x^2 = 4$, alltså skärningspunkter mellan ytan och x -axeln är $(2, 0, 0)$ och $(-2, 0, 0)$. Observera också att inga punkter (x, y, z) med $-2 < x < 2$ kan tillhöra ytan, eftersom då är $x^2 < 4$, medan $-y^2 - z^2 \leq 0$ och därför kan inte gälla $x^2 - y^2 - z^2 = 4$.

Därför består ytan av två disjunkta "kupor", alltså är hyperboloiden *tvåmantlad*.

Skärningskurvor mellan ytan och alla plan $x = c$ för sådana c att $|c| > 2$ är cirklar, ty där $y^2 + z^2 = c^2 - 4$.

Figur 61: Föreläsning 2: Tvåmantlad hyperboloid, uppgift 7 i Adams 10.5.



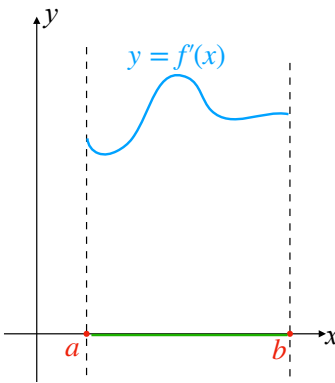
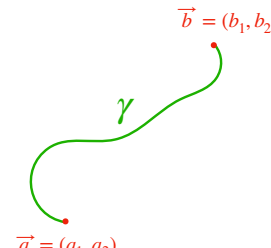
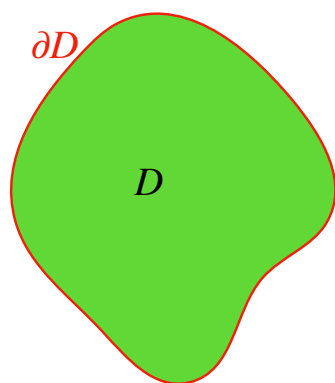
Skärningen mellan ytan och planet $z = c$, och skärningen mellan ytan och planet $y = c$ (för varje tal c sådant att $|c| \neq 2$) ger hyperbler. Därför namnet **hyperboloid**. Vad för hyperbler (alltså, hur de ligger i rummet och vad för ekvation de har): detta beror på om $|c| < 2$ eller $|c| > 2$, men detta behöver ni inte kunna. Vad händer om $|c| = 2$?

OBS: titta på **Travis Topic 9**, minuter 9—21. Travis ritar upp och förklarar samma exempel, fast roterat i rummet och med en smalare cirkel i mitten (ekvationen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$)

Fig. 10.5.8

På yz -planet gäller det: $x = 0$. Ytans ekvation blir därför där $y^2 + z^2 = 4$, alltså skärningspunkter mellan ytan och yz -planet formar en cirkel med radien 2. Skärningskurvor mellan ytan och alla plan $x = c$ (som är parallella med yz -planet) är ännu större cirklar, ty där $y^2 + z^2 = 4 + c^2$. Ytan formar alltså ett rör som är som smalast på yz -planet och blir bredare utåt åt båda håll, men formar ändå en hel bit. Därför är hyperboloiden *enmantlad*.

Figur 62: Föreläsning 2: Enmantlad hyperboloid, uppgift 8 i Adams 10.5.

Analysens Huvudsats	Huvudsatsen för konservativa vektorfält	Greens formel
 $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ Områdets rand: två punkter a och b	 $\int_{\gamma} \nabla \Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$ Områdets rand: kurvans ändpunkter	 $\iint_D \text{rot } \vec{F} dx dy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Områdets rand: kurvan kring D
I alla varianter av huvudsatsen uttrycks integralen av någon slags derivata (envariabel-derivatan, gradienten eller rotationen) över ett område—alltså summan av <u>lokala förändringar i funktionen</u> i hela området—m.h.a. funktionens värden på områdets rand. Randen består av två punkter i första två varianter, och av en hel kurva i den tredje. Det finns två till varianter: <i>Gauss sats</i> och <i>Stokes sats</i> (ingår i den 10hp-kursen och involverar <i>flödesintegraler</i> samt derivatorna: rotationen och divergensen.)		

Figur 63: Föreläsning 19: Tre olika huvudsatser. (Bild: Hania, med KeyNote.)