
Flervariabelkalkyl MAA152, MDH

Hania Uscka-Wehlou, Pouya Ashraf

I detta dokument finns föreläsningssanteckningar till kursen [MAA152 Flervariabelkalkyl](#). Anteckningarna baserades på Pouya Ashrafs L^AT_EX kod från 2013, till föreläsningar av Thomas Önskog vid Uppsala universitet (UU). Pouyas anteckningar gjordes om av Hania Uscka-Wehlou under läsåret 2018/2019 för att passa för kurserna som Hania gav vid UU. I mars 2020 (Corona-tid) gjordes de om (av Hania) till MDH:s behov. Arbetet med den nya versionen påbörjades den 19 mars 2020 då det blev tydligt att vi måste gå över, förhoppningsvis temporärt, till distansundervisning.

Samtliga figurer ritade av Pouya gjordes med vektorgrafik direkt i L^AT_EX, så om något inte syns tydligt nog är det bara att zooma in utan att det blir grynigt (fantastiskt, eller hur?). Alla bilder ritade av Hania är gjorda med KeyNote eller tikz. Extra exempel lades till, tagna från andra föreläsare från UU, framförallt från Maksim Maydanskiy, Ryszard Rubinsztein och Bo Styf. Travis Kowalski har också fått sin plats här. Nu är hans filmer viktigare än någonsin.

Med "Kursboken" menas Adams Calculus 8e eller 9e utgåvan.

Mycket nöje och lycka till!

Uppskattar du att all info för kursen finns i detta dokument, så att du (kanske) slipper köpa kurslitteraturen? Känner du att du vill öka min (Pouyas) livskvalitet litegrann som tack för arbetet jag lagt ner? Swisha valfri summa (typ 20–30kr) till 070-422 40 81

Innehåll

Om kursen: planering mm.	1
Föreläsning 1: Introduktion; rummet $\mathbb{R}^3$	5
Koordinatgeometri i flera variabler	5
Cylindriska och sfäriska (rymdpolära) koordinater	6
Topologiska begrepp	8
Andragsytor	11
Kvadratiske former	13
Föreläsning 2: Vektorvärda funktioner: parametriska kurvor	14
Båglängd av en kurva	19
Föreläsning 3: Funktioner av flera variabler, gränsvärde och kontinuitet	22
Funktioner av flera variabler	22
Gränsvärden och kontinuitet	24
Gränsvärde och kontinuitet för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$	25
Partiella derivator	29
Föreläsning 4: Partiella derivator; tangentplan; kedjeregeln	31
Partiella derivator; tangentplan till grafytan $z = f(x, y)$	31
Högre ordningens derivator	35
Jacobianen och gradienten: första introduktion	37
Kedjeregeln	37
Föreläsning 5: Deriverbarhet, linjärisering	47
Föreläsning 6: Gradient, riktningsderivator	54
Föreläsning 7: Implicita funktionssatsen mm	60
Jacobianen	60
En mycket teoretisk text om ämnet (överkurs)	61
En mycket praktisk text om ämnet (ingår i kursen)	64
Taylorapproximationer, kvadratiske former	72
Föreläsning 8: Extremvärden för flervariabelfunktioner	74
Extremvärden	74
Extremvärden; klassificering av kritiska punkter	81
Extremvärden på kompakta områden	88
Lagranges metod variant 1	91
Lagranges metod variant 2	96
Lagranges metod variant 3	98
Föreläsning 9: Dubbelintegraler	99
Dubbelintegraler	99
Fubinis sats på x - och y -enkla områden	103
Variabelsubstitution i dubbelintegraler	106
Trigonometriska formler för flervariabelanalys	110
Föreläsning 10: Generaliserade integraler; Trippelintegraler	112

Generaliserade dubbelintegraler	112
Trippelintegraler	116
Föreläsning 11: Trippelintegraler; variabelbyte	120
Variabelbyte i trippelintegraler	120
Tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler	123
Föreläsning 12: Vektorfält, konservativa vektorfält	128
Vektorfält	128
Konservativa vektorfält	130
Föreläsning 13: Linjeintegraler (kurvintegraler)	134
Kurvintegraler av funktioner	134
Kurvintegraler av vektorfält	135
Föreläsning 14: Ytintegraler	141
Ytintegraler	141
Flödesintegraler	145
Föreläsning 15: Gradient, divergens och rotation; Greens sats	149
Divergens och rotation	149
Greens formel	154
Föreläsning 16: Gauss' sats (divergenssatsen)	160
Föreläsning 17: Stokes' sats	169
Föreläsning 18: Tentaförberedande; repetition på hela kursen	181
Alla våra integraler	181
Alla våra huvudsatser	184
Lösta repetitionsuppgifter	185
Appendix: Bilder till Föreläsning 1 och Huvudsatser	199

Om kursen: planering mm.

Generellt om ämnet

I kursen Envariabelkalkyl studeras funktioner av en variabel. Dessa typer av funktioner är lätta att askådliggöra eftersom vi kan rita grafen till dem. Det finns många fysikaliska problem som kan beskrivas med hjälp av funktioner av en variabel, men för att beskriva fenomen i vår tredimensionella värld behöver vi i allmänhet funktioner av fler än en variabel.

Exempel

- Densiteten hos ett tredimensionellt föremål ges av en funktion $\rho(x, y, z)$ där x , y och z är de tre rumsvariablerna. Hur ska man gå tillväga för att bestämma föremålets massa, masscentrum eller tröghetsmoment?
- Om vi öppnar ytterdörren till en föreläsningssal kommer temperaturen i en punkt (x, y, z) i rummet att förändras över tiden. Temperaturen är därmed en funktion av fyra variabler $T(x, y, z, t)$. Hur ska man gå tillväga för att bestämma var temperaturen är maximal/minimal eller i vilken riktning som temperaturen förändras snabbast?
- I varje punkt på jordytan vid en fix tid blåser det längs en viss vektor (vars längd och riktning förändras). Vinden kan beskrivas med ett vektorfält, dvs. en funktion som till varje punkt (x, y) på jordytan ordnar en vektor $\vec{v}(x, y)$. Hur ska man gå tillväga för att bestämma hur stort arbete som krävs för att flytta ett föremål längs en kurva på jordytan?

Som synes finns det gott om fenomen som är naturliga att beskriva med funktioner av fler än en variabel, och under kursen kommer vi att ta fram ett antal matematiska metoder för denna typ av funktioner. Vi kommer att lära oss om följande sorters funktioner under kursens gång:

- **Envariabelfunktioner** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (kända från Envariabelkalkyl)
- **Vektorvärda funktioner** $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$: plana kurvor; $n = 3$: rymdkurvor)
- **Flervariabelfunktioner** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (framförallt för $n = 2$ och $n = 3$)
- **Variabelbyten** $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ eller $n = 3$)
- **Vektorfält** $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ eller $n = 3$).

Relevanta kapitel i kursboken:

Dessa tas upp på TEN1:

- 10-11: Vektorer och vektorvärda funktioner, kurvor, topologi
- 12: Funktioner av flera variabler, partiella derivator, kedjeregeln, gradient
- 13: Extremvärden, optimering
- 14: Dubbelintegraler (14.1, 14.2, 14.4)

Sedan följer:

- 14: (14.3, 14.5–7) Integraler, där integrationsintervallet är en yta eller volym
- 15: Integraler, där integrationsintervallet är en kurva
- 16: Vektoranalys med fysikaliska tillämpningar.

Preliminär planering

Här kommer en tidsplan för vad vi ska göra på de olika föreläsningar. Den är preliminär och kan ändras beroende på vad som hinns med på föreläsningar och lektioner. (En dubbel skiljelinje markerar undervisningsveckor.) Tredje kolumn i tabellerna med planering anger vilken topic i playlist *Calculus 3* (**Travis Kowalski**) man kan titta på:

https://youtu.be/e_oI9X7SL-I

Nr	Kapitel Adams	Travis topic	Begrepp/innehåll	Uppgifter (8:e och 9:e upplagan)
F1	10.1, 10.5, 10.6	1–5	Lite topologi i $\mathbb{R}^n$, funktioner i flera variabler, objekt i $\mathbb{R}^3$, kvadratiske ytor, sfäriska och cylindriska koordinater.	10.1: 11, 12, 13, 17, 33. 10.5: 1, 3, 5 10.6: 1, 3, 5. Extra uppgifter: 10.1: 18, 22, 35.
F2	11.1, 11.3	6–8	Vektorvärda funktioner, kurvor, parametrisering.	11.1: 3, 7, 15, 27. 11.3: 1, 7, 13. Extra uppgifter: 11.1: 28, 31. 11.3: 27.
F3	12.1, 12.2, 12.3	9–10	Reellvärda funktioner i flera variabler, gränsvärden och kontinuitet, partiella derivator.	12.1: 1, 3, 5, 11, 15, 19, 23, 27. 12.2: 1, 3, 7, 9, 13. 12.3: 3, 5, 9, 11. Extra uppgifter: 12.1: 37, 38. 12.2: 15, 23. 12.3: 36, 37.
F4	12.3 (forts), 12.4, 12.5	11–12, 14	Tangentplan, högre ordningens derivator, kedjeregeln.	12.3: 15, 17, 19. 12.4: 2, 5, 9, 15. 12.5: 1, 3, 7, 9, 15, 24. Extra uppgifter: 12.4: 21. 12.5: 11, 16.
F5	12.6	12–13	Linjär approximation, differentierbarhet, linjärisering.	12.6: 1, 3. Extra uppgifter: 12.6: 11.
F6	12.7	12–13	Gradient, riktningsderivator.	12.7: 1, 5, 7, 17, 19. Extra uppgifter: 12.7: 18, 31.
F7	12.8, 12.9	—	Implicita funktioner, Jacobiandeterminant, Taylors formel.	12.8: 1, 3, 7, 13, 15, 16, 17. 12.9: 1, 5, 7. Extra uppgifter: 12.8: 19. 12.9: 3, 9, 15.
F8	13.1, 13.2, 13.3	15–16	Extremvärden, optimering, optimering med villkor.	13.1: 1, 5, 9, 19, 26. 13.2: 1, 3, 5, 9, 17. 13.3: 1, 3, 5, 9. Extra upp.: 13.1: 13, 25, 29. 13.2: 6, 10, 11, 13. 13.3: 6, 11.
F9	14.1, 14.2, 14.4	17–18	Dubbelintegraler, substitution i dubbelintegraler.	14.1: 1, 13, 17. 14.2: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 19. 14.4: 1, 3, 5, 17, 21. Extra uppgifter: 14.1: 5. 14.2: 13, 21, 29. 14.4: 18.
TEN1			Föreläsning 1–9	

Nr	Kapitel Adams	Travis topic	Begrepp/innehåll	Uppgifter (8:e och 9:e upplagan)
F10	14.3, 14.5	19–20	Generaliserade integraler, trippelintegraler.	14.3: 1, 7, 23. 14.5: 1, 3, 5, 15. Extra upp: 14.5: 8, 14.
F11	14.6, 14.7	19–20	Variabelsubstitution, sfäriska och cylindriska koordinater, tillämpningar av multipelinte- graler.	14.6: 1, 3, 5, 9. 14.7: 1, 3, 9, 13. Extra uppgifter: 14.6: 15, 19.
F/L 12	15.1, 15.2	22	Vektorfält, konservativa fält, potential.	15.1: 1, 3, 7. 15.2: 1, 3, 4, 21.
F13	15.3, 15.4	21–23	Linjeintegraler.	15.3: 1, 3, 5, 9. 15.4: 1, 5, 9, 11, 15, 17. Extra uppgifter: 15.3: 15, 17. 15.4: 22, 23, 24.
F14	15.5, 15.6	—	Ytintegraler, flödesintegraler.	15.5: 3, 5, 7, 13. 15.6: 1, 3, 7, 11, 13.
F/L 15	16.1, 16.2, 16.3	T 24	Gradient, divergens, rotation; Greens formel.	16.1: 1, 3, 5, 7, 13. 16.2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9. 16.3: 1, 3, 5, 7. Extra uppgifter: 16.2: 13, 14, 15.
F/L 16	16.4	—	Divergenssatsen.	16.4: 1, 3, 5, 7, 11. Extra uppgifter: 16.4. 24, 25, 28.
F/L 17	16.5	—	Stokes' sats.	16.5: 1, 3, 7. Extra uppgif- ter: 16.5: 5, 11, 13.
F18	allt	—	Repetition.	Rester.
TEN2			Föreläsning 10–18 och kan även innehålla inslag från tid- igare föreläsningar.	

Att komplettera undervisning

- Undervisningen består av 18 föreläsningar / lektioner om 3 timmar vardera.
- Under föreläsningarna går vi igenom teori och räknar belysande exempel.
- Lektionerna är främst avsedda för problemlösning, där ni kan få hjälp av lektionsledarna till de uppgifter ni inte kunnat lösa hemma. Se alltså till att ha försökt lösa de rekommenderade uppgifterna innan ni kommer till lektionen, så att ni kan ställa frågor till läraren och på detta sätt använda lektionstiden optimalt.
- Som en viktig komplettering till vår distansundervisning föreslår jag följande kurs från högskolan i Gävle med läraren **Mikael Forsberg**: <http://www.flervariabelanalys.se/>
- Jag rekommenderar varmt att ni tittar på följande filmer, som komplettering till föreläsningarna, lektionerna och kurslitteraturen:
 - **Travis Kowalski**: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLE7F8F33E161D1425>
 - **Jonas Månsson**: <http://www.matematikblogg.se/flerdim2015.html>
 - Khan Academy: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus>
- En annan fantastisk källa är hemsidan till KTH:s **Armin Halilovic**:
http://ingforum.haninge.kth.se/armin/AR_12_13/SF1626/dirfler12_13.html
Nere på sidan finns det **EXTRA ÖVNINGAR** som är väldigt bra att gå igenom för att få en känsla för detta vad man har lärt sig under föreläsningarna.

Anteckningarna

I början av varje föreläsning anges kapitel från kurslitteraturen Adams *Calculus* som ska läsas. På slutet av varje föreläsning finns rekommenderade uppgifter som helst ska räknas direkt efter föreläsningen.

Särskilt viktiga satser och formler markeras med **blått**.

Nya termer sätts i **blått** och i fetstil för er som läser i svart-och-vitt, med eventuella engelska benämningar i **rosa** och i kursiv stil; bara om de väsentligt skiljer sig från de svenska benämningarna, inte när de låter likadant.

Överkursmaterial markeras med **grönt**.

Tack!

Ett stort tack till Christer Kiselman och Martin Wehlou som korrekturläste delar av dessa anteckningar.

Föreläsning 1: Introduktion; rummet $\mathbb{R}^3$

Adams 10.1, 10.5, 10.6

Koordinatgeometri i flera variabler

Vi såg i exemplen att vi kommer studera funktioner av flera variabler. Om vi låter antalet variabler vara n , så kommer definitionsområdet till våra funktioner att vara (en del av) mängden av alla n -tupler $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, av alla reella tal $x_1, x_2, \dots, x_n$. Denna mängd betecknas $\mathbb{R}^n$.

Exempel 1. $\mathbb{R}^1$ (skrivs normalt bara $\mathbb{R}$) motsvarar tallinjen, $\mathbb{R}^2$ ett plan, $\mathbb{R}^3$ det tredimensionella rummet, medan $\mathbb{R}^n$, för $n > 3$, är svårare att åskådliggöra sig geometriskt. I $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ använder vi ofta beteckningarna (x, y) respektive (x, y, z) i stället för (x_1, x_2) respektive (x_1, x_2, x_3) .

Elementen i mängden $\mathbb{R}^n$ är vektorer, och precis som för vektorer kan vi definiera **vektoraddition**, **multiplikation med skalär** (**skalning**) och **skalärprodukt**.

Definition 1.

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \vec{x} &= \lambda(x_1, \dots, x_n) &&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) &&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n\end{aligned}$$

Ibland kan det vara praktiskt att tolka elementen i $\mathbb{R}^n$ som matriser. Om vi använder konventionen att $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ är en kolonnmatris så kan vi skriva $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$, där elementen i högerledet ska tolkas som matriser.

Definition 2. **Längden** av en vektor $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ betecknas med $|\vec{x}|$ eller $\|\vec{x}\|$ och ges av

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Definition 3. **Avståndet** mellan två punkter $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ges av

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Definition 4. **Vinkeln** mellan två vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ definieras som den vinkel $\theta \in [0, \pi]$, som uppfyller

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$$

Sats 1 (Cauchy-Schwarz olikhet). För $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, så gäller $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$ med likhet precis då $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är parallella (dvs. då $\vec{x} = t\vec{y}$, $t \in \mathbb{R}$).¹

¹För $n = 2$ och $n = 3$ är satsen självklar från följande formeln för skalärprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta$ där θ är vinkeln mellan vektorerna. Cauchy-Schwarz olikhet följer då omedelbart från detta att $|\cos \theta| \leq 1$ för alla θ . Likheten inträffar då $|\cos \theta| = 1$, alltså då $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$, vilket betyder att vektorerna är parallella.

Bevis. Vi antar att $\vec{x} \neq \vec{0}$ (trivial lösning). Skalarprodukten av en vektor med sig själv kan aldrig vara negativ. Låt $t \in \mathbb{R}$ som vi snart ska specificera. Då gäller:

$$0 \leq (t\vec{x} + \vec{y}) \cdot (t\vec{x} + \vec{y}) = t^2|\vec{x}|^2 + 2t\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2$$

Kvadratkomplettering och ansättning $t = -\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2}$ ger:

$$0 \leq |\vec{x}|^2 \left(t + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} \right)^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{x}|^2} + |\vec{y}|^2 = |\vec{y}|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{x}|^2} \iff |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

Likhet inträffar precis då $t\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, dvs. då $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är parallella. $\square$

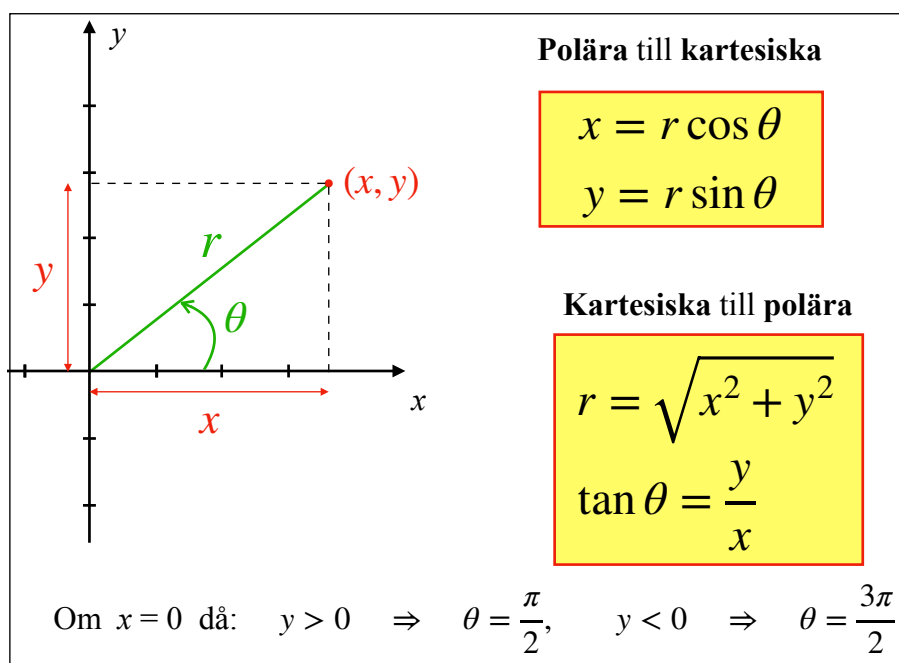
Det är relativt enkelt att visa att även **triangelolikheten** $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ gäller för $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (utveckla $|\vec{x} + \vec{y}|^2$ och använd Cauchy-Schwarz olikhet).

Man kan mäta avstånd i $\mathbb{R}^n$ på andra sätt än den Euklidiska normen $|\vec{x}|$ ovan. Två andra definitioner som bibehåller vissa grundläggande egenskaper (Δ -olikheten, $|\vec{x}| \geq 0$ med likhet för $\vec{x} = \vec{0}$, samt $|\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$) är normerna $|\vec{x}|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ respektive $|\vec{x}|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{N}^+$. Man kan visa att normerna är ekvivalenta med den Euklidiska, dvs. $A|\vec{x}|_p \leq |\vec{x}| \leq B|\vec{x}|_p$.

Cylindriska och sfäriska (rymdpolära) koordinater

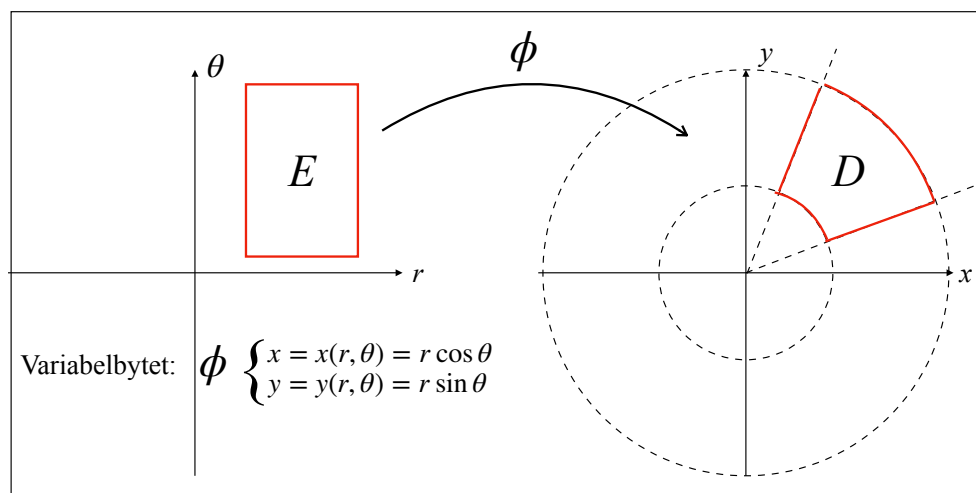
Vi kommer att beskriva läget för punkter i planet $\mathbb{R}^2$ på följande två sätt:

- m.h.a. **kartesiska / rektangulära** koordinater (x, y) ,
- m.h.a. **polära** koordinater $[r, \theta]$.



Figur 1: Polära koordinater i $\mathbb{R}^2$, omräkningsformler. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vid koordinatbytet från kartesiska till polära koordinater omvandlas cirkulära områden som D i bilden nedan i **APR** (axelparallella rektanglar) som E i bilden nedan; detta används vid variabelbyte i dubbelintegraler.



Figur 2: Cirkulära områden under polärt koordinatbyte. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Cirkelskivan med mittpunkten i origo och radien 2 beskrivs i polära koordinater som följande APR (axelparallell rektangel):

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Vi kommer att beskriva läget för punkter i rummet $\mathbb{R}^3$ på tre sätt:

- m.h.a. **kartesiska** / **rektangulära** koordinater (x, y, z) ,
- m.h.a. **cylindriska** koordinater $[r, \theta, z]$,
- m.h.a. **sfäriska** / **rymdpolära** koordinater $[R, \phi, \theta]$.

Kvadratiske ekvationer i $\mathbb{R}^3$ kan ge upphov till cylindrar och sfärer. Om ett problem i $\mathbb{R}^3$ har en sådan geometri är det, som vi ska se, ofta praktiskt att byta koordinatsystem från de vanliga kartesiska koordinaterna till cylindriska eller sfäriska koordinater.

Cylindriska koordinater fås genom att x - och y -koordinaterna byts mot **polära koordinater**, medan z -koordinaten är oförändrad. Relationen mellan (x, y, z) och $[r, \theta, z]$ blir:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

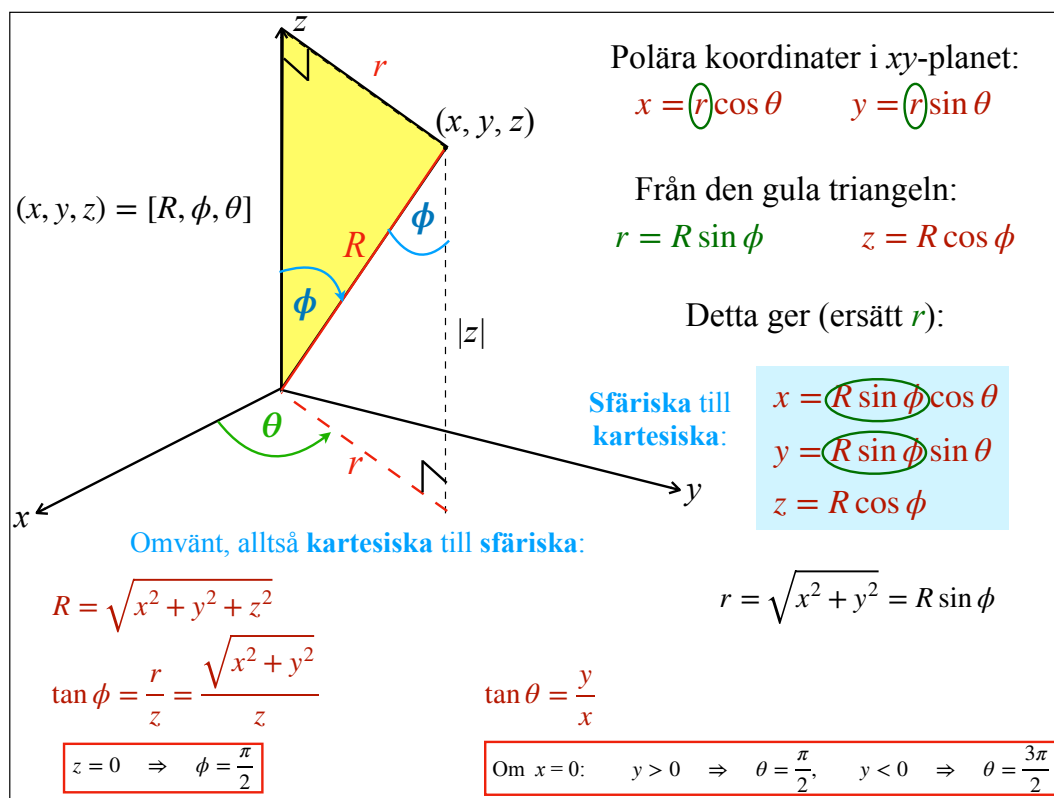
Cylindriska koordinater lämpas väl till problem som har axiell symmetri. Notera att r är avståndet från punkten P till z -axeln, och inte till origo.

Vid radiell symmetri är **sfäriska** (**rymdpolära**) koordinater att föredra. Variabeln R motsvarar avståndet till origo ($R \geq 0$), variabeln θ är vinkeln mellan den positiva x -axeln och projektionen av punkten till xy -planet ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), och variabeln ϕ är vinkeln mot positiva z -axeln (**OBS: $0 \leq \phi \leq \pi$**). Relationen mellan kartesiska och sfäriska koordinater ges av:

$$x = R \sin \phi \cos \theta, \quad y = R \sin \phi \sin \theta, \quad z = R \cos \phi.$$

Klotet med mittpunkten i origo och radien 2 beskrivs i sfäriska koordinater som följande **APR** (**axelparallellt rätblock**):

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} = \{(R, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq R \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$



Figur 3: Rympolära / sfäriska koordinater i $\mathbb{R}^3$, omräkningsformler. (Bild: Hania, med Key-Note.)

Vi kommer att ha mycket nytta av det vid beräkning av trippelintegraler över *runda* områden.

I kartesiska koordinater motsvarar ekvationerna $x = a$, $y = b$, $z = c$ plan i rummet. I cylindriska koordinater motsvarar $r = a$ ett cylindriskt skal med radie a som är parallellt med z -axeln och $\theta = b$ motsvarar ett halvt plan som är ortogonalt med xy -planet. I sfäriska koordinater motsvarar $R = a$ en sfär med radie a , $\phi = b$ motsvarar en cirkulär kon kring z -axeln och $\theta = c$ har samma tolkning som för cylindriska koordinater.

Liknande koordinatbyten kan göras även för $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, men är förstas svårare att visualisera sig. Låt exempelvis $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ och låt $[R', \phi', \theta']$ vara de sfäriska koordinaterna för tre dimensioner. Då gäller $w = R \cos \phi$, $R' = R \sin \phi$, och relationen mellan kartesiska och sfäriska (fyrdimensionella) koordinater blir:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \phi \sin \phi' \cos \theta', & y &= R \sin \phi \sin \phi' \sin \theta', \\ z &= R \sin \phi \cos \phi', & w &= R \cos \phi. \end{aligned}$$

Topologiska begrepp

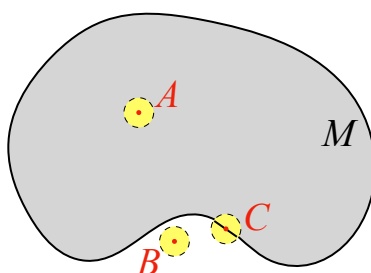
För att kunna definiera gränsvärden (och i förlängningen kontinuitet och derivata) hos funktioner av flera variabler, behöver vi generalisera begreppen öppna/slutna intervall och ändpunkter/inre punkter hos intervall i $\mathbb{R}^n$. Vi börjar med att definiera en omgivning till en punkt.

Definition 5. En **omgivning** (*neighbourhood*) till en punkt $\vec{a}$ består av alla punkter som ligger inom ett visst avstånd från $\vec{a}$.

För ett tal $\delta > 0$, så är mängden $N(\vec{a}, \delta) = \{\vec{x} : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta\}$ en δ -omgivning till $\vec{a}$. I $\mathbb{R}^1$ blir en δ -omgivning till $\vec{a}$ ett **intervall** på tallinjen, i $\mathbb{R}^2$ blir det en **cirkelskiva** (*disk*) kring $\vec{a}$ med radie δ , och i $\mathbb{R}^3$ blir det ett **klot** (*ball*) kring $\vec{a}$ med radie δ , alla ovannämnda utan sina randpunkter.

Definition 6. Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. En punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ är:

1. **inre punkt** (*interior point*) till M om det finns en omgivning A till $\vec{a}$ som helt ligger i M ($A \subset M$).
2. **yttre punkt** (*exterior point*) till M om det finns en omgivning B till $\vec{a}$ som helt ligger utanför M ($B \cap M = \emptyset$).
3. **randpunkt** (*boundary point*) till M om $\vec{a}$ varken är inre eller yttre punkt, dvs om alla omgivningar till $\vec{a}$ innehåller både punkter som tillhör M och punkter som inte tillhör M .



Figur 4: En *inre* punkt till M med en omgivning $A \subset M$, en *yttre* punkt till M med en omgivning B s.a. $B \cap M = \emptyset$ och en *randpunkt* till M med en omgivning C som har icke-tomt snitt med både M och M 's komplement. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Mängden av alla inre punkter kallas det **inre** av M och betecknas M° eller $\text{Int}(M)$. Mängden av alla randpunkter kallas **randen** (*boundary*) till M och betecknas ∂M . En randpunkt kan tillhöra mängden, men behöver inte göra det.

Definition 7. Låt $M \subset \mathbb{R}^n$. M är **öppen** om $M = M^\circ$ och **sluten** om **komplementet** M^c (alltså $\mathbb{R}^n \setminus M$; mängden av alla punkter som **inte** tillhör M) är en öppen mängd.

Alternativt kan M sägas vara **öppen** om $\partial M \cap M = \emptyset$ (M innehåller **inga** randpunkter) och **sluten** om $\partial M \subset M$ (M innehåller **alla** sina randpunkter).

OBS: En mängd är **varken öppen eller sluten** om den innehåller några av sina randpunkter (alltså är inte öppen), dock ej alla (alltså är inte sluten).

Exempel 2. Mängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ består av en elliptisk skiva. Randen består av ellipsen med ekvation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. För varje punkt i mängden finns en omgivning som är helt innehållen i mängden, och består således bara av inre punkter. Mängden är således öppen.

Exempel 3. Mängden $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ består av enhetssfären i $\mathbb{R}^3$. Alla omgivningar till punkter på sfären innehåller både punkter på sfären och i dess komplement, så alla punkter på sfären är randpunkter till mängden. Därmed $\partial M \subset M$ och mängden är sluten.

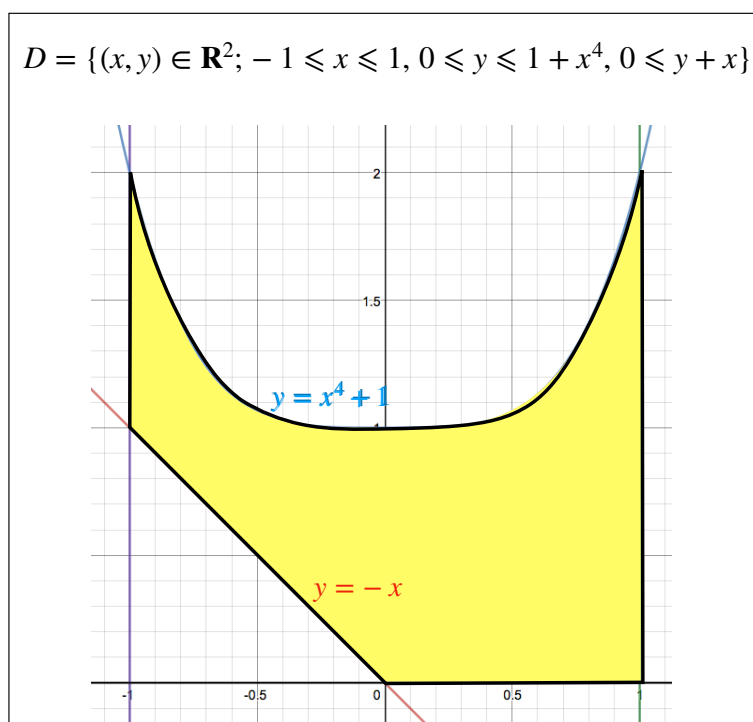
Definition 8. Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. Det **slutna höljet** (*closure*) av M ges av $\bar{M} = M \cup \partial M$.

Från ovanstående definitioner gäller M sluten $\iff \partial M \subset M \iff M = \bar{M}$, så en mängd M är sluten om den uppfyller $\bar{M} = M$.

Man kan också visa att $\bar{M}$ alltid är en sluten mängd. Komplementet till $\bar{M}$ är de yttre punkterna till M och de utgör per definition en öppen mängd.

Definition 9. En mängd M i $\mathbb{R}^n$ kallas **begränsad** (*bounded*) om $M \subset N(\vec{0}, r)$ för något $r > 0$.

Punkterna i en begränsad mängd ligger på ändligt avstånd från origo. En mängd som är både sluten och begränsad kallas för **kompakt**. Enhetssfären är ett exempel på en kompakt mängd. Vi återkommer till de topologiska begreppen när vi har infört gränsvärden i $\mathbb{R}^n$ om några kapitel.



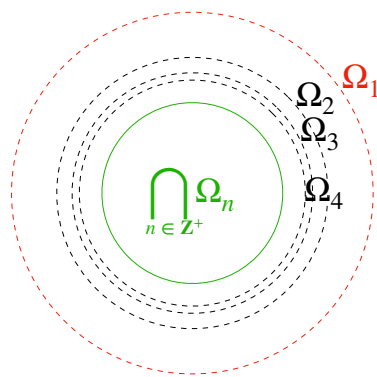
Figur 5: En kompakt mängd, alltså sluten och begränsad. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vi avslutar med ett resultat om unioner och snitt av öppna mängder.

Sats 2. *Antag att $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ är öppna för alla $i \in I$ (indexmängd). Då är $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ öppen.*

En oändlig union av öppna mängder är öppen, men ett oändligt snitt av öppna mängder behöver inte vara öppen.

Exempel 4. Låt $\Omega_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < (1 + \frac{1}{n})^2\}$, för något $n \in \mathbb{Z}^+$. Unionen av Ω_n uppfyller $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \Omega_n = \Omega_1$,



Figur 6: Mängder Ω_n för några n och deras snitt. (Bild: Hania, med KeyNote.)

eftersom mängderna blir allt mindre. Snittet av Ω_n uppfyller

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \Omega_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

som är en sluten mängd.

Slutna mängder definieras m.h.a. $\geq$, $\leq$ eller $=$, öppna med $>$ eller $<$.

Resten av detta kapitel kommer ägnas åt att studera vilka ytor i $\mathbb{R}^3$ som olika linjära och kvadratiske ekvationer i x , y , och z ger upphov till. En linjär ekvation i x , y , och z kan skrivas $ax + by + cz = d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ och är, som bekant, ekvationen för ett plan.

Planet $z = 0$ kallas xy -planet, planet $y = 0$ kallas xz -planet, och planet $x = 0$ kallas yz -planet. Om någon av variablerna x , y eller z saknas, kommer den motsvarande ytan att vara parallell med axeln som motsvarar den frånvarande variabeln.

Exempel 5. Ekvationen $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ motsvaras i $\mathbb{R}^2$ av en cirkel med centrum i $(-2, 1)$ och radie 1. I $\mathbb{R}^3$ motsvaras ekvationen av en cylinder som är parallell med z -axeln.

Skärningspunkten mellan två tvådimensionella ytor i $\mathbb{R}^3$ utgör i allmänhet en endimensionell kurva i $\mathbb{R}^3$ (vi återkommer till kurvor i kapitel 11 i kursboken).

Exempel 6. Vilka punkter (x, y, z) löser ekvationssystemet $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$? Ekvationen $x^2 + y^2 = 4$ motsvarar en cylinder, och ekvationen $z = 2$ ett plan. Snittet av dessa mängder är en cirkel med radien 2 och med mittpunkten i $(0, 0, 2)$, i planet $z = 2$.

Andragsytor

En allmän andragsytkvation i variablerna x och y kan skrivas

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

I undantagsfall kan detta uttryck faktoriseras till produkten

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

varvid lösningarna ges av två räta linjer: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ och $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (om $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$ och $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$). I alla andra fall får vi en så kallad **kvadratisk kurva** eller

kägelsnitt som kommer att vara krökt; det finns fyra olika typer av andragradskurvor. En irreducibel andragradsekvation i variablerna x och y motsvarar någon av följande fyra typer av kurvor: **cirkel**, **ellips**, **hyperbel** och **parabel** (egentligen så är det tre typer, eftersom varje cirkel är en ellips). Se bilderna i Appendix på slutet av dessa anteckningar.

En allmän andragradsekvation i variablerna x , y och z kan skrivas

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

I undantagsfall kan detta uttryck faktoriseras till produkten

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

varvid lösningarna ges av två plan: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ och $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (om $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ och $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$). I alla andra fall får vi en så kallad *kvadratisk yta* som kommer att vara krökt. Det finns sex olika typer av kvadratiske ytor. En irreducibel andragradsekvation i variablerna x , y och z motsvarar någon av följande sex typer (**sfär** är ett specialfall av en ellipsoid med $a^2 = b^2 = c^2 = r^2$) av krökta ytor:

1. **Ellipsoid**. Ekvationen för en ellipsoid med centrum i punkten (x_0, y_0, z_0) och halvvaxlarna a , b och c är

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Jämför med cirkelns ekvation och avståndsformeln i $\mathbb{R}^3$ om $a^2 = b^2 = c^2 = r^2$.

2. **Cylinder**. Ekvationen för en cylinder parallell med z -axeln ges av

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Analogt är $(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ en cylinder som är parallell med y -axeln osv. Ovanstående cylindrar är cirkulära eftersom tvärsnittet är en cirkel. Men en cylinder kan också vara elliptisk, parabolisk eller hyperbolisk om tvärsnittet är en ellips, parabel eller hyperbel. Exempelvis är cylindern $y = x^2/2$ parabolisk och parallell med z -axeln.

3. **Kon**. Punkterna (x, y, z) på en kon parallell med z -axeln uppfyller att z -koordinaten är proportionell mot radien $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dvs. $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ eller med andra ord

$$z^2 = c^2(x^2 + y^2).$$

Konstanten c ger ett mått på hur snäv konen är. Ovanstående kon är cirkulär, men precis som cylindrar kan koner även vara elliptiska. Motsvarande ekvation för en elliptisk kon är

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Om minustecknet placeras framför någon av de andra variablerna får vi en kon parallell med motsvarande axel.

4. **Paraboloid**. En elliptisk paraboloid kring z -axeln har ekvationen

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

och en hyperbolisk paraboloid kring z -axeln har ekvationen

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

5. **Hyperboloid (2 typer).** En hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

är antingen **en- eller tvåmantlad** och har ett elliptiskt tvärsnitt i ett koordinatplan och ett hyperboliskt tvärsnitt i ett annat koordinatplan.

Se bilderna på slutet av dessa anteckningar. De kommer att vara mycket nyttiga som stöd till Lektion 1.

Kvadratiska former

Ett kvadratisk uttryck i x , y och z kan alltid kvadratkompletteras så att det inte innehåller några förstgradstermer. Vi ska nu studera det kvarvarande uttrycket mer i detalj.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Uttrycket i högerledet kallas **den kvadratiska formen** för matrisen $\mathcal{A}$. Vi inför följande begrepp:

Definition 10. $\mathcal{A}$ är **positivt definit** om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x} > 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, **negativt definit**² om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x} < 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ och **indefinit** om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x}$ antar både positiva och negativa värden.

Förutom att kvadratiska former kan relateras till olika ytor i rummet, så kommer de också vara viktiga vid klassificering av extrempunkter av funktioner av flera variabler. För att avgöra om en matris är positivt definit kan vi kvadratkomplettera motsvarande kvadratiska form.

Exempel 7. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ är positivt definit. Kvadratkomplettering av motsvarande kvadratiska form ger:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy + 4xz + 6yz &= (x + y + 2z)^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz + 2y^2 + 6z^2 + 6yz \\ &= (x + y + 2z)^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz = (x + y + 2z)^2 + (y + z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Den kvadratiska formen är positiv för alla nollskilda val av (x, y, z) , så matrisen är positivt definit.

I linjär algebra visas att en matris är positivt definit om alla dess egenvärden (dvs. tal λ som uppfyller $\mathcal{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}$ för något $\vec{x}$) är positiva. Man kan även relatera detta till tecknet på vissa determinanter (Sats 8, Kap. 10.7 i kursboken).

Rekommenderade uppgifter efter F1

10.1: 11, 12, 13, 17, 33. **10.5:** 1, 3, 5 **10.6:** 1, 3, 5. **Extra uppgifter:** **10.1:** 18, 22, 35.

²**Positivt semidefinit** och **negativt semidefinit** vid icke-stränga olikheter, alltså $\geq$ respektive $\leq$.

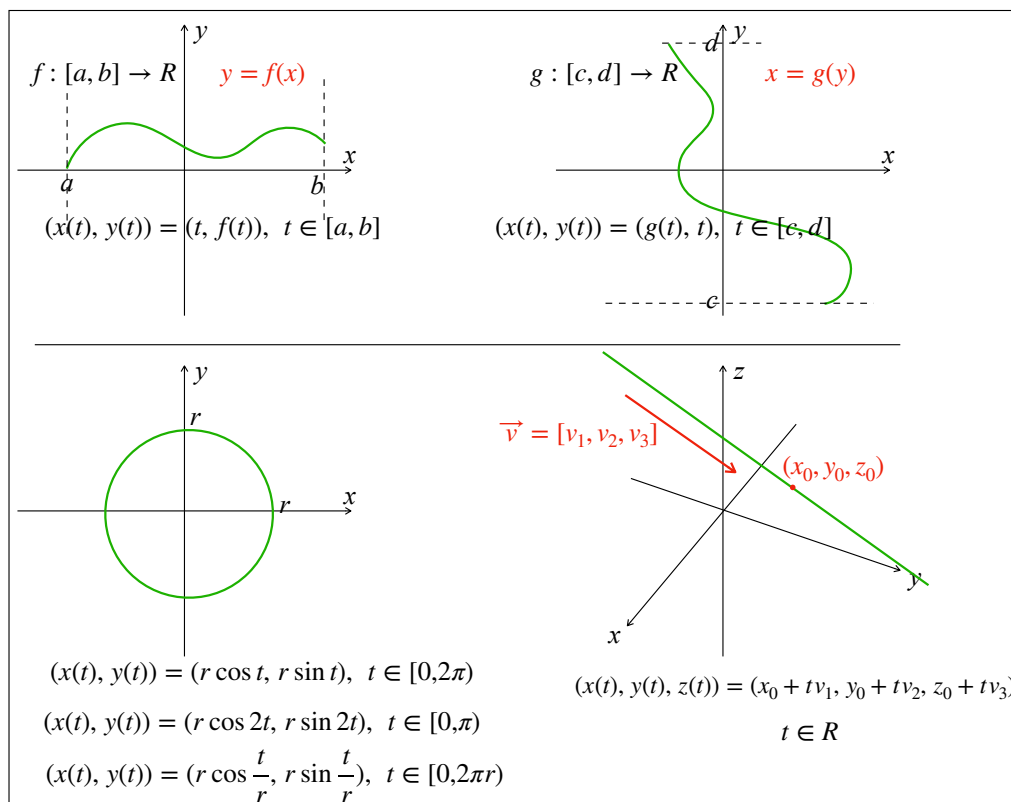
Föreläsning 2: Vektorvärda funktioner: parametriska kurvor

Adams 11.1, 11.3

En vektorvärd funktion av en variabel med värden i $\mathbb{R}^n$, dvs en funktion på formen

$$t \rightarrow \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

kallas för en **n -dimensionell kurva** i $\mathbb{R}^n$. För $n = 2$ talar man om en **plan kurva**, och för $n = 3$ om en **rymdkurva**. Variabeln t kallas **parameter**, och dess definitionsmängd är vanligen ett intervall på den reella axeln. Funktionerna $x_1(t), \dots, x_n(t)$ kallas **komponentsfunktioner**.



Figur 7: Några exempel på parametriska kurvor. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Parametern ger upphov till en riktning i vilken kurvan genomlöps. Som nästa exempel visar, kan en och samma kurva uttryckas med flera olika parameterframställningar (val av funktion och definitionsmängd).

Exempel 8. Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i planet har parameterframställningen $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ för $\theta \in [0, 2\pi)$ eftersom det då gäller att:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{b^2} \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

Om $a = b = r$ får vi en cirkel. På samma sätt inses att cirkeln $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ har parameterframställningen $x = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$, $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ för $\theta \in [0, 2\pi)$.

Exempel 9. Avgör vilken kurva som har parameterframställningen

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad y = \frac{t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi eliminerar parametern t . Division av ekvationerna för y och x ger:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t \Rightarrow t = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \\ \Rightarrow \quad x &= 0 \quad \vee \quad x^2+y^2=x \Rightarrow x^2-x+y^2=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Detta är samma kurva som i exemplet innan, alltså cirkeln med mittpunkten i $(\frac{1}{2}, 0)$ och radien $r = \frac{1}{2}$. Observera dock att origo inte kommer med om vi använder den andra parametriseringen. Positiva värden på t ger övre halvan av kurvan och negativa värden på t ger undre halvan av kurvan.

De plana kurvorna ovan kunde beskrivas med en ekvation i x och y . För att beskriva en rymd-kurva i parameterfri form krävs ett ekvationssystem med två ekvationer i x , y och z (varje ekvation motsvarar en yta i rummet).

Exempel 10. Parametrisera skärningskurvan mellan ytorna

$$z + \sqrt{1-x^2-y^2} = 0 \quad \text{och} \quad x+y=1.$$

Ytan $z + \sqrt{1-x^2-y^2} = 0$ är undre halvan av enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$ (den del som ligger under xy -planet). Ekvationen $x+y=1$ motsvarar ett plan. Vi sätter $x=t$ ($y=t$ skulle fungera lika bra) och får:

$$\begin{aligned} y &= 1-x = 1-t, \quad z = -\sqrt{1-x^2-y^2} = -\sqrt{1-t^2-(1-t)^2} \\ &= -\sqrt{1-t^2-(1-2t+t^2)} = -\sqrt{2t-2t^2} \end{aligned}$$

Rotuttrycket är definierat då $2t(1-t) \geq 0$, vilket inträffar då både t och $(1-t)$ är positiva (de kan inte båda vara negativa eftersom deras summa är 1), d.v.s. då $t \in [0, 1]$. En parameterframställning är alltså $\vec{x}(t) = (t, 1-t, -\sqrt{2t(1-t)})$, $t \in [0, 1]$.

Följande metod hjälper en ofta hitta en parametrisering av skärningskurvan (γ) mellan två ytor. Metoden fungerar fint om en yta är plan och en kvadratisk som t.ex. i upp. Adams 11.3-9 eller som i exemplet nedan. Metoden innehåller följande steg, vilket vi sedan illustrerar på ett konkret exempel:

1. **Eliminera** variabeln z i en av ekvationerna (ibland blir det bättre att eliminera en annan variabel). Då reducerar man problemet till två variabler. Ekvationen i variablerna x och y beskriver **projektion** av kurvan γ på xy -planet. Kalla projektionen γ_p .
2. **Parametrisera** den platta kurvan γ_p , alltså hitta funktioner $x(t)$ och $y(t)$ sådana att punkterna $(x(t), y(t))$ genomlöper hela kurvan γ_p för $t_0 \leq t \leq t_1$.
3. **Uttryck** z som en funktion av $x(t)$ och $y(t)$ m.h.a. de givna ekvationerna. På det sättet får vi $z = z(t)$ och följande:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

ger oss en parametrisering av kurvan γ .

Exempel 11. Tillämpa steg för steg metoden ovan för att parametrisera skärningskurvan mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $x + z = 2$.

1. **Eliminera** z : $z = 2 - x$ från planets ekvation. Insättning i paraboloidens ekvation ger $2 - x = x^2 + y^2$. Kvadratkoppletteringen låter oss identifiera kurvan:

$$2 - x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 = \frac{8}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

Vi känner igen kurvan γ_p som cirkeln med mittpunkten i $(-\frac{1}{2}, 0)$ och radien $\frac{3}{2}$.

2. **Parametrisera** den platta kurvan γ_p : Den vanligaste parametriseringen för γ_p är

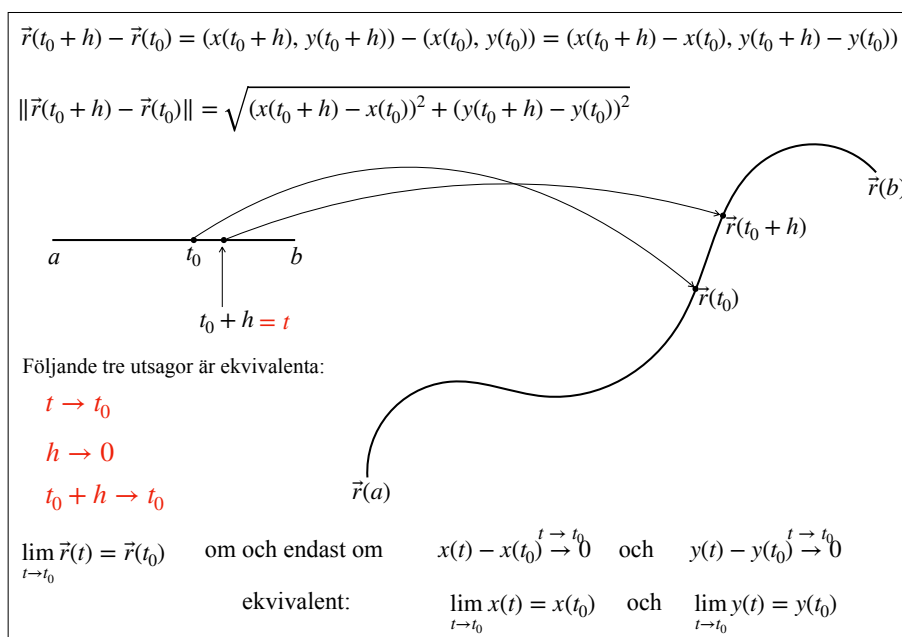
$$x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos t, \quad y(t) = \frac{3}{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. **Uttryck** z som en funktion av $x(t)$ och $y(t)$ m.h.a. de givna ekvationerna:

$$z(t) = 2 - x(t) = 2 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos t\right) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos t.$$

Vår parametrisering av kurvan γ är alltså följande:

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos t, \frac{3}{2} \sin t, \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos t\right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



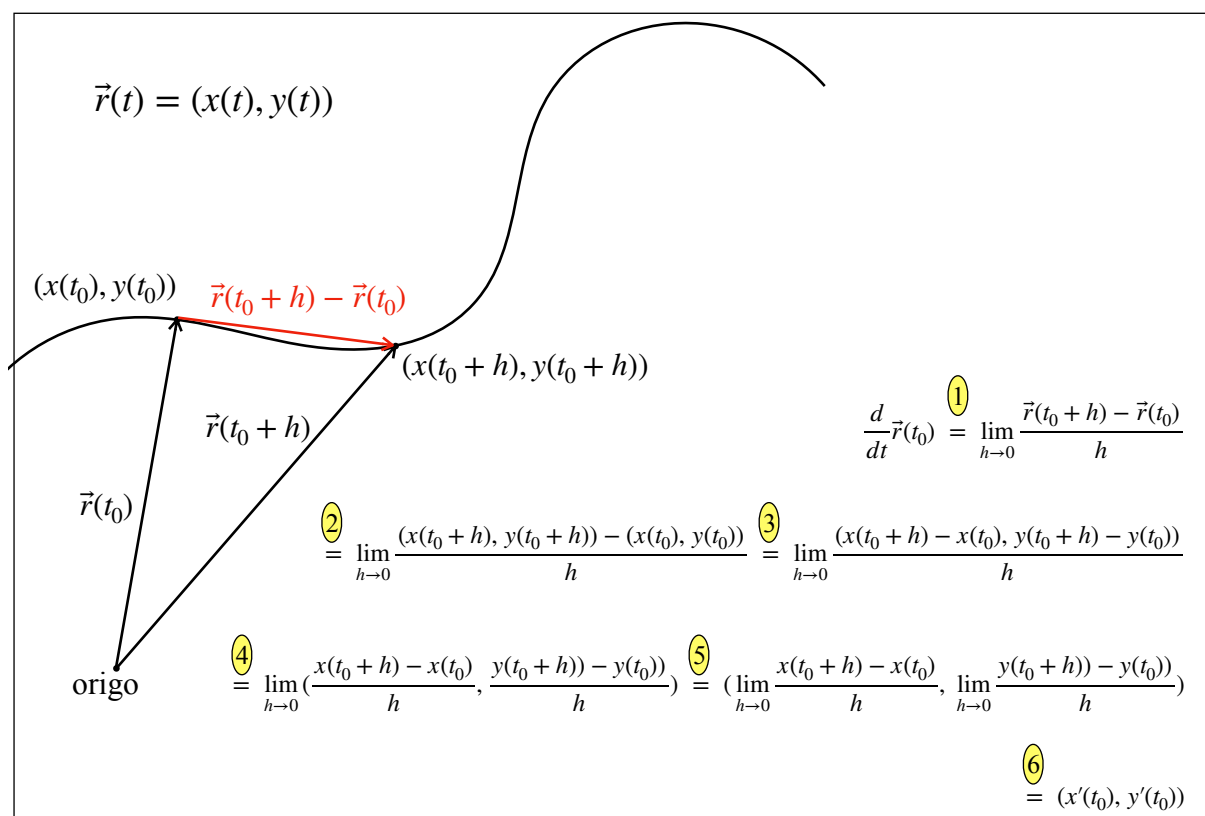
Figur 8: En förklaring varför gränsvärde och kontinuitet för vektorvärda funktioner undersöks komponentsvis. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Om parametern t får beteckna tiden, så kan $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tolkas som **läget** (*position*) hos en partikel vid tiden t . Gränsvärde och kontinuitet för vektorvärda funktioner är komponentsvis. Se mer förklaring i bilden.

Om komponentsfunktionerna $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ alla är deriverbara så kan vi definiera vektorn

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Vi kallar $\vec{r}'(t)$ **tangentvektorn** till kurvan i punkten $\vec{r}(t)$. Om $\vec{r}(t)$ tolkas som partikelns läge så kan $\vec{r}'(t)$ tolkas som partikelns **hastighet** och $|\vec{r}'(t)|$ som dess *fart* vid tiden t . Vidare kan $\vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ tolkas som partikelns **acceleration** vid tiden t . Se mer förklaring i bilderna som följer.

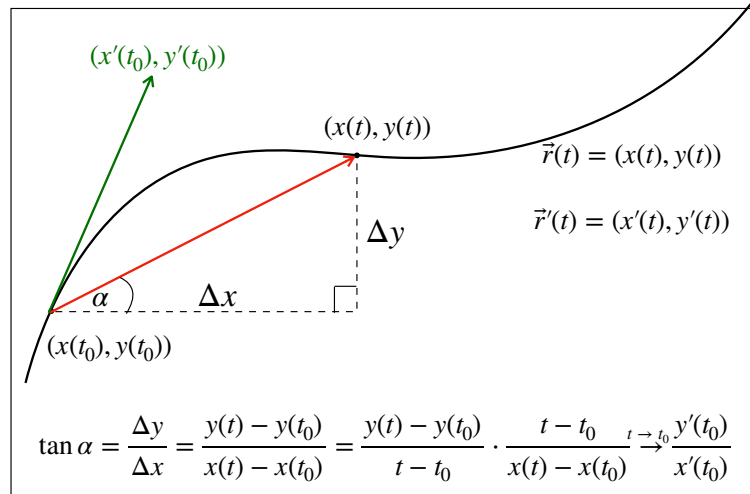


Figur 9: En förklaring varför derivering av vektorvärda funktioner sker komponentsvis: 1. definition av derivatan $\vec{r}'(t)$, 2. insättning av komponentsfunktioner $x(t)$ och $y(t)$, 3. vektor-addition / -subtraktion sker komponentsvis, 4. skalning av vektorer sker komponentsvis, 5. gränsvärdet räknas komponentsvis, 6. derivatans definition för funktioner $x(t)$ och $y(t)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Precis som för vektorer kan vi definiera skalär- och vektorprodukt för vektorvärda funktioner. Följande sats, som är en enkel följd av räkneregler för derivatan av skalärvärda funktioner av en variabel, ger en produktregel för skalär- och vektorprodukter samt för en (variabel) skalning. Observera att alla tre produktregler har identisk konstruktion.

Sats 3 (Adams Sats 11.1-1). Låt $\vec{u}(t)$ och $\vec{v}(t)$ vara två vektorvärda funktioner i en variabel och låt $\lambda(t)$ vara en skalärvärd funktion. Då gäller:

1. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$ (derivatan av en summa är summan av derivator)



Figur 10: En förklaring varför hastighetsvektorn $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ är tangent till kurvan i punkten $(x(t_0), y(t_0))$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

2. $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{u}(t)) = \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t)$ (produktregeln 1: för en variabel skalning)
3. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$ (produktregeln 2: för skalärprodukt)
4. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$ (produktregeln 3: för kryssprodukt)
5. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\vec{u}'(\lambda(t))$ (kedjeregeln; tänk här på $\lambda(t)$ som ett variabelbyte).

Observera att sista formeln visar att tangentvektorns riktning är oberoende av val av parameterframställning. (Satsen bevisas m.h.a. respektive regler för envariabelfunktioner, med egenskaper av operationer på vektorer, och allt görs komponentsvis.)

Exempel 12. Låt $\vec{r}(t)$ vara läget på en partikel vid tiden t . Visa att om kraften på partikeln är parallell med $\vec{r}(t)$, så är $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ konstant.

Enligt Newtons andra lag så gäller sambandet $\vec{F}(t) = m\vec{r}''(t)$ mellan en kropps acceleration $\vec{r}''(t)$ och kraften $\vec{F}(t)$ som verkar på kroppen. I detta fall gäller därmed

$$\vec{r}''(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(t) = \frac{k}{m}\vec{r}(t)$$

för någon konstant k . Vi undersöker derivatan av $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)) = \vec{r}''(t) \times \vec{r}(t) + \underbrace{\vec{r}'(t) \times \vec{r}'(t)}_{=\vec{0}} = \frac{k}{m} \underbrace{\vec{r}(t) \times \vec{r}(t)}_{=\vec{0}} = \vec{0}.$$

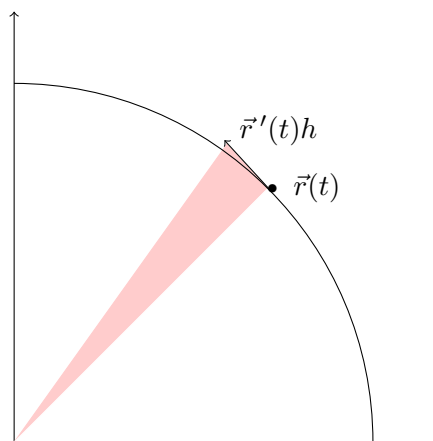
Derivatan av $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är alltså noll, vilket implicerar att funktionen $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ måste vara konstant.

Situationen i exemplet gäller för planeterna i solsystemet om vi väljer att låta solen ligga i origo. Betrakta nu ett kort tidsintervall h . Arean av den skuggade triangeln i figuren är, enligt den geometriska tolkningen av vektorprodukten, lika med

$$\frac{1}{2}|(\vec{r}'(t)h) \times \vec{r}(t)| = \frac{h}{2}|\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)|.$$

Vi visade i exemplet att vektorn $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är konstant. Arealen som översveps av en planet i solsystemet per tidsenhet är därför

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} |(\vec{r}'(t)h) \times \vec{r}(t)| &= \frac{1}{2} |\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)| \\ &= \text{konstant.} \end{aligned}$$



Detta är Keplers andra lag för planetbanorna i solsystemet. Den härleddes empiriskt från planetobservationer i början av 1600-talet. Vektorn $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är en konstant vektor som hela tiden är vinkelrät mot $\vec{r}(t)$. Detta innebär att $\vec{r}(t)$ måste ligga i ett och samma plan. Detta är också en följd av Keplers andra lag som säger att planetbanorna är elliptiska. Att elliptiska banor uppfyller villkoret i exemplet ovan ges av:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (a \cos(kt), b \sin(kt)), \quad \vec{r}'(t) = (-ak \sin(kt), bk \cos(kt)) \\ \vec{r}''(t) &= (-ak^2 \cos(kt), -bk^2 \sin(kt)) = -k^2 \vec{r}(t). \end{aligned}$$

Båglängd av en kurva

Låt nu $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, vara en två- eller tredimensionell kurva, vars komponenter är deriverbara funktioner. Vi ska bestämma längden av kurvan. Precis som när vi bestämde båglängden av en funktionsgraf, så delar vi in parameterintervallet i n stycken delintervall: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. På varje delintervall $[t_{i-1}, t_i]$ kan kurvan approximeras av $|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$, så kurvans längd är minst:

$$s_n = \sum_{i=1}^n |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

s_n är en Riemannsumma som under vissa villkor på kurvan konvergerar mot integralen $\int_a^b \left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| dt$.

Låt nu $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Då gäller

$$\left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| = |(x'(t), y'(t), z'(t))| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2},$$

Så **båglängden** av en kurva ges av

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Exempel 13. Bestäm längden av kurvan $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, \frac{2}{3}t^{3/2})$, $t \in [0, 2\pi]$. Kurvan är en spiral kring z -axeln som sträcks ut allt mer. Dess längd ges av:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + (t^{1/2})^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + t} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} (4 + t)^{3/2} \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{3} ((4 + 2\pi)^{3/2} - 8). \end{aligned}$$

Längden av en kurva mellan två punkter är oberoende av val av parametrisering. Ibland kan det vara praktiskt att välja båglängden som parameter för kurvan, dvs. $\vec{r}(s)$. Sådan parametrisering kallas **båglängdparametrisering**. För att byta parameter från den ursprungliga parametern t till båglängden s utnyttjar vi formeln för båglängden $s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau$, ur vilken vi kan lösa ut t som funktion av s och sätta $\vec{r}(t(s))$.

En fördel med att ha båglängden som parameter är att:

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|} \Rightarrow \frac{d}{ds} \vec{r}(t(s)) = \vec{r}'(t) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t(s))|}$$

vilket innebär att **tangentvektorn (vid båglängdparametrisering) alltid är en enhetsvektor** (är normerad).

Det enklaste exemplet som man inte behöver avancerade teorier för är följande parametrisering av enhetscirkeln med mittpunkten i origo och radien 1. Ett exempel på en **båglängdparametrisering** är

$$\vec{r}: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{s.a.} \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Längden för hela kurvan är lika med 2π och den är lika med längden för parametriseringsintervallet. Dessutom är båglängden mellan punkterna $\vec{r}(0) = (1, 0)$ och $\vec{r}(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ lika med α radianer. Dessutom är farten, alltså längden av hastighetsvektorn, i varje punkt lika med 1, vilket vi får när vi använder triggettan:

$$\|\vec{r}'(t)\| = \|(x'(t), y'(t))\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Parametriseringen $\vec{r}: [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ sådan att $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ är däremot **inte en båglängdparametrisering**. Tänk att man här genomlöper cirkeln två gånger snabbare än i förra exemplet. Farten är då lika med 2 i varje punkt (kedjeregeln!) och bågen mellan startpunkten och en godtycklig punkt på kurvan är två gånger längre än parametriseringsintervallet mellan 0 och parametern för slutpunkten på bågen.

Exempel 14. Kurvan γ kan på parameterform skrivas som

$$\vec{r}(t) = (\ln(1 + t^2), \ln(1 + t^{-2}), \sqrt{8} \arctan t), \quad t \in [1, T]$$

där T är en konstant som är större än 1. Båglängdparametrisera kurvan γ .

Lösning: vi behöver beräkna hastigheten och farten. Hastigheten fås genom att derivera komponent efter komponent:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \frac{d}{dt}(\ln(1+t^2), \ln(1+t^{-2}), \sqrt{8} \arctan t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, -\frac{2t^{-3}}{1+t^{-2}}, \frac{\sqrt{8}}{1+t^2} \right) \\ &= \left(\frac{2t}{1+t^2}, -\frac{2t^{-1}}{t^2+1}, \frac{\sqrt{8}}{1+t^2} \right)\end{aligned}$$

och farten är längden av hastighetsvektorn:

$$\|\vec{r}'(t)\|^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 + \left(-\frac{2t^{-1}}{t^2+1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8}}{1+t^2} \right)^2 = \frac{4t^2 + 4t^{-2} + 8}{(1+t^2)^2} = 4t^{-2} \cdot \frac{t^4 + 1 + 2t^2}{1 + 2t^2 + t^4} = 4t^{-2}.$$

Eftersom $t > 0$, får vi $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\|\vec{r}'(t)\|^2} = 2t^{-1}$ och därför $s(t) = \int_1^t 2\tau^{-1} d\tau = 2 \ln t$ så att $t = e^{s/2}$. Vidare, $t = 1$ motsvarar $s = 0$ och $t = T$ motsvarar $s = 2 \ln T$. Svaret är alltså att båglängdsparametriseringen för kurvan är

$$\vec{r}(s) = (\ln(1+e^s), \ln(1+e^{-s}), \sqrt{8} \arctan(e^{s/2})), \quad s \in [0, 2 \ln T].$$

Rekommenderade uppgifter efter F2

11.1: 3, 7, 15, 27. **11.3:** 1, 7, 13. **Extra uppgifter:** **11.1:** 28, 31. **11.3:** 27.

Föreläsning 3: Funktioner av flera variabler, gränsvärde och kontinuitet

Adams 12.1, 12.2, 12.3

Funktioner av flera variabler

Låt D vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. En funktion av n variabler tilldelar till varje element $(x_1, \dots, x_n) \in D$ en punkt $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Fallet $n = 1$ har vi studerat i kursen envariabelanalys. För $n = 1$ kan funktioner beskrivas geometriskt med grafer. För $n = 2$ och $n = 3$, som vi främst kommer behandla i denna kurs, finns ingen lika bra geometrisk beskrivning av funktioner.

Betrakta fallet $n = 2$, så att f är en funktion av de båda variablerna x och y . **Definitionsmängden** D ligger i xy -planet och **graf** till f är den tredimensionella punktmängden:

$$\Gamma = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Grafen till f bildar en yta i rummet uppspänd rakt *ovanför* (eller *under*, eller *delvis si och delvis så* om det finns nollställen) definitionsmängden D .

Om funktionen har en symmetri av något slag blir det enklare att rita grafen till denna. Ett exempel är radiell symmetri:

Exempel 15. Skissa grafen till funktionen

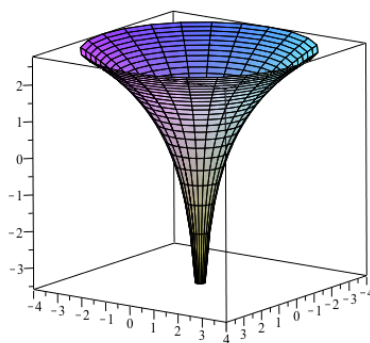
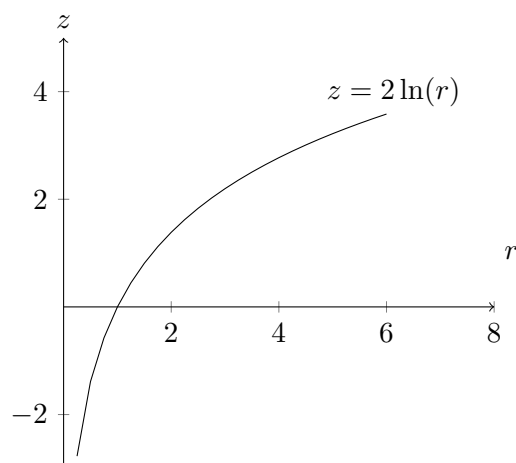
$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad 0 < x^2 + y^2 \leq 4.$$

I xy -planet ges avståndet r till origo av $r^2 = x^2 + y^2$, så funktionen kan skrivas

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2) \\ &= \ln(r^2) \\ &= 2 \ln(r), \quad r \in (0, 2]. \end{aligned}$$

Så vi får grafen till f genom att rotera grafen till $z = 2 \ln(r)$ kring z -axeln.

Resultatet blir en tratt-liknande yta som i bilden:



Figur 11: Grafen till $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ från Ex. 15

Det kan vara svårt att rita ytor i 3D på ett bra sätt. Ett alternativ kan då vara att rita de så kallade **nivåkurvorna**

$$N_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}$$

i xy -planet för olika värden på konstanten c .

Den resulterande figuren liknar en topografisk karta (höjdkurvor) över funktionen. Jämför även väderkartornas isotermer och isobarer.

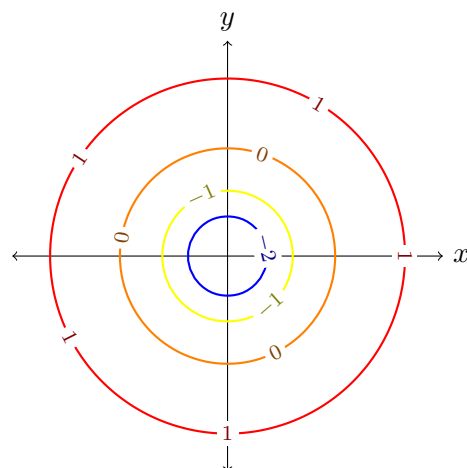
Exempel 16. Skissa nivåkurvorna till funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ för $c = \{-2, -1, 0, 1\}$.

Den radiella symmetrin gör att nivåkurvorna måste vara koncentriska cirklar. Nivåkurvan för $c = 0$ blir enhetscirkeln. $c = 1$ ger

$$\begin{aligned} 1 &= \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = e \\ &\Rightarrow \text{cirkel med radie } \sqrt{e} \approx 1.65 \end{aligned}$$

$c = -1$ och $c = -2$ ger slutligen

$$x^2 + y^2 = e^{-1} \text{ respektive } x^2 + y^2 = e^{-2}$$



Om avståndet mellan c -värdena är konstant, som i detta exempel, så betyder glesa nivåkurvor att funktionen förändras sakta och täta nivåkurvor att funktionen förändras snabbt, i analogi med höjdkurvor på en karta.

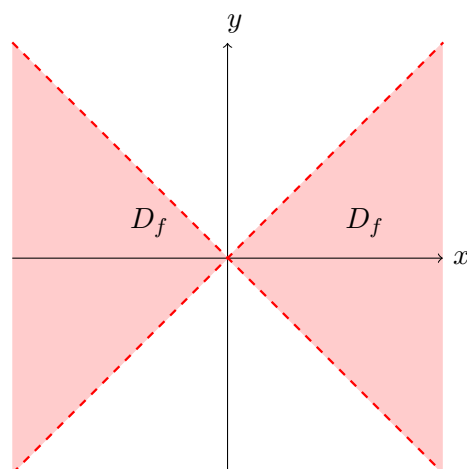
Om inget annat anges är definitionsmängden D till en funktion f av n variabler det största mängd i $\mathbb{R}^n$ för vilken $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är väldefinierat för alla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Exempel 17. Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x-y}$.

f är definierad då $\frac{x+y}{x-y} > 0$. Beroende på om $x - y > 0$ eller om $x - y < 0$ får vi två olika fall:

$$\begin{aligned} x - y > 0 : \quad & \frac{x+y}{x-y} > 0 \\ \Rightarrow x + y > 0 & \Rightarrow -x < y < x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y < 0 : \quad & \frac{x+y}{x-y} > 0 \\ \Rightarrow x + y < 0 & \Rightarrow x < y < -x \end{aligned}$$



Olikheten i första fallet är rimlig när $x > 0$ och olikheten i andra fallet är rimlig när $x < 0$. Definitionsmängden D_f är markerad med rosa i bilden.

Betrakta nu fallet $n = 3$. Grafen består då av en fyrdimensionell punktmängd som vi inte kan visualisera. Vi får i allmänhet nöja oss med att hitta eventuella symmetrier och skissa funktionens **nivåtor**

$$N_c = \{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = c\}$$

Exempel 18. Nivåytorna till funktionen $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ är koncentriska ellipsoider med centrum i origo.

Gränsvärden och kontinuitet

Vi ska nu definiera gränsvärden för vektorvärda funktioner och funktioner av flera variabler. Alla dessa funktioner kan generellt skrivas som en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ för några positiva heltal n och p .

Till varje punkt $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ ordnar funktionen $\vec{f}$ ett element $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^p$. Komponenterna hos $\vec{f}$ kan skrivas

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Om $n = 1$, $p > 1$ får vi en vektorvärd funktion av en variabel (kurva, yta). Om $n > 1$, $p = 1$ får vi en funktion av flera variabler. För att kunna ta fram en differential- och integralkalkyl för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ behöver vi en definition av gränsvärde.

Definition 11. Låt $\vec{f}$ vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ med definitionsområdet D och antag att $\vec{a}$ är en inre punkt eller randpunkt till D . Vi säger då att $\vec{f}$ har **gränsvärdet** $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$ om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{x} - \vec{a}| < \delta \\ \vec{x} \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon$$

Detta skrivs $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ eller $\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{b}$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$.

Man kan fråga sig hur gränsvärdena $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$ och $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x})$ är relaterade. Låt därför $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ och notera att $\vec{y}$ kan skrivas

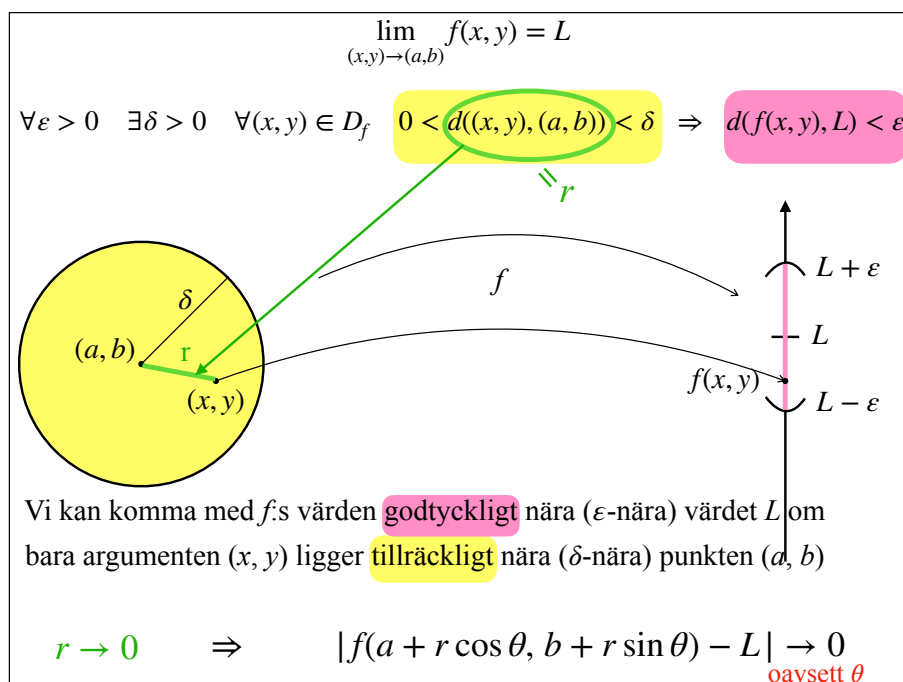
$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_p \vec{e}_p \quad \text{för} \quad \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_p = (0, \dots, 0, 1)$$

Triangelolikheten ger $|\vec{y}| = |y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_p \vec{e}_p| \leq |y_1 \vec{e}_1| + \dots + |y_p \vec{e}_p| = |y_1| + \dots + |y_p|$. Samtidigt gäller förstås $|\vec{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2} \geq \sqrt{y_j^2} = |y_j|$ för alla $j \in \{1, \dots, p\}$. Sammanfattningsvis får vi, om vi byter ut $\vec{y}$ mot $\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}$,

$$|f_j(\vec{x}) - b_j| \leq |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| \leq |f_1(\vec{x}) - b_1| + \dots + |f_p(\vec{x}) - b_p|.$$

Detta innebär att $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ precis då $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j$ för alla $j \in \{1, \dots, p\}$.

Gränsvärden för vektorvärda funktioner kan reduceras till gränsvärden av de reellvärda komponenterna. Detta var anledningen till att vi kunde definiera derivatan av en parametriserad kurva genom att derivata kurvans komponenter. Under återstoden av detta kapitel kommer vi därför att arbeta med funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$, alltså för $p = 1$.



Figur 12: Definition av gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$. Oftast $(a, b) = (0, 0)$. För trevariabelsfunktioner är definitionen samma, fast δ -omgivningar av (a, b, c) är öppna **klot**, inte öppna cirkelskivor. Man har alltså ännu fler vägar mot punkten, inte bara i planet, utan också i rummet från alla håll. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Gränsvärde och kontinuitet för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Man kan enkelt bevisa från definitionen att alla linjära funktioner $f(x, y) = ax + by + c$ är kontinuerliga. Dessutom uppfyller gränsvärden av funktioner av flera variabler samma räkneregler som för funktioner av en variabel, vilket leder till många nya kontinuerliga funktioner.³

Om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = L$ och $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = M$, så gäller:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = L + M, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})g(\vec{x}) = LM, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{L}{M} \quad (\text{om } M \neq 0)$$

Om vi dessutom har en envariabelsfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som är kontinuerlig i $t = L$, då:

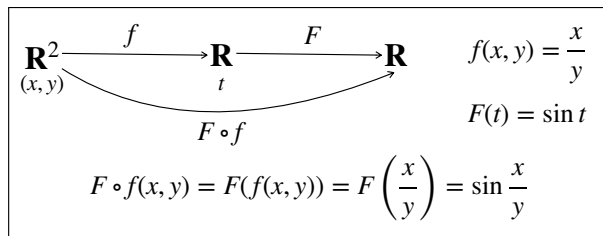
$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(f(\vec{x})) = F(L).$$

Den sista regeln ser kanske mindre självklart ut än de andra, men jag tror att de flesta skulle använda den intuitivt. Här kommer exempel på användning av reglerna ovan, med $f = f(x, y)$. Man kan förstås tillämpa dessa regler bara om uttrycket är bestämt, för bara i sådana fall kan man köra insättning:

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (4x + 2y + x^2) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2^2 = 8 + 6 + 4 = 18.$$

³M.h.a. reglerna 1–4 visar man enkelt att bl.a. polynomfunktioner, rationella funktioner och en hel del andra är kontinuerliga; man ska bara akta sig för obestämda uttryck, men vi lär oss strax hur man kan hantera dessa.

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (5,2)} x^2 y^3 = 5^2 \cdot 2^3 = 25 \cdot 8 = 200$.
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{x+2y}{x^2-y} = \frac{3+2 \cdot 2}{3^2-2} = \frac{7}{7} = 1$.
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,6)} \sin \frac{x}{y} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Här är $F(t) = \sin t$ och $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Funktionen F är definierad för alla reella tal, och funktionen f är definierad överallt utanför x -axeln, ty där $y = 0$. $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,6)} \frac{x}{y} = \frac{\pi}{6}$. Bilden illustrerar hur sammansättningen fungerar.



Figur 13: Ett exempel för regeln $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F(f(\vec{x})) = F(L)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

För funktioner av en variabel skilde vi på vänster- och högergränsvärden beroende på från vilket håll som vi närmade oss den punkt i vilken vi ville veta gränsvärdet. Om vänster- och högergränsvärdena sammanföll, så var de lika med gränsvärdet i punkten. För funktioner av flera variabler kan vi närma oss en viss punkt längs oändligt många kurvor. Vi kan rimligen inte bestämma gränsvärdet längs var och en av dessa kurvor och kan inte bestämma gränsvärden med denna metod. Vi inleder med ett par exempel:

För att visa att ett gränsvärde $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$ inte existerar räcker det att hitta två olika, väl valda kurvor som går mot $\vec{a}$ och för vilka $f(\vec{x})$ närmar sig olika värden.

Exempel 19. Visa att gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ inte existerar.

Vi provar med de båda räta linjerna $(x, y) = (t, 0)$ respektive $(x, y) = (t, t)$.

$$\text{Den första ger: } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0 \quad \text{och den andra ger } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$$

Gränsvärdena är olika, så gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ kan inte existera. Se illustrationen (på nästa sida) för ett likadant exempel, där $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, som diskuteras hos Travis (Playlist *Calculus 3*, Topic 10, minuterna 12:30–19:55).

Vi tar ett ännu knepigare exempel.

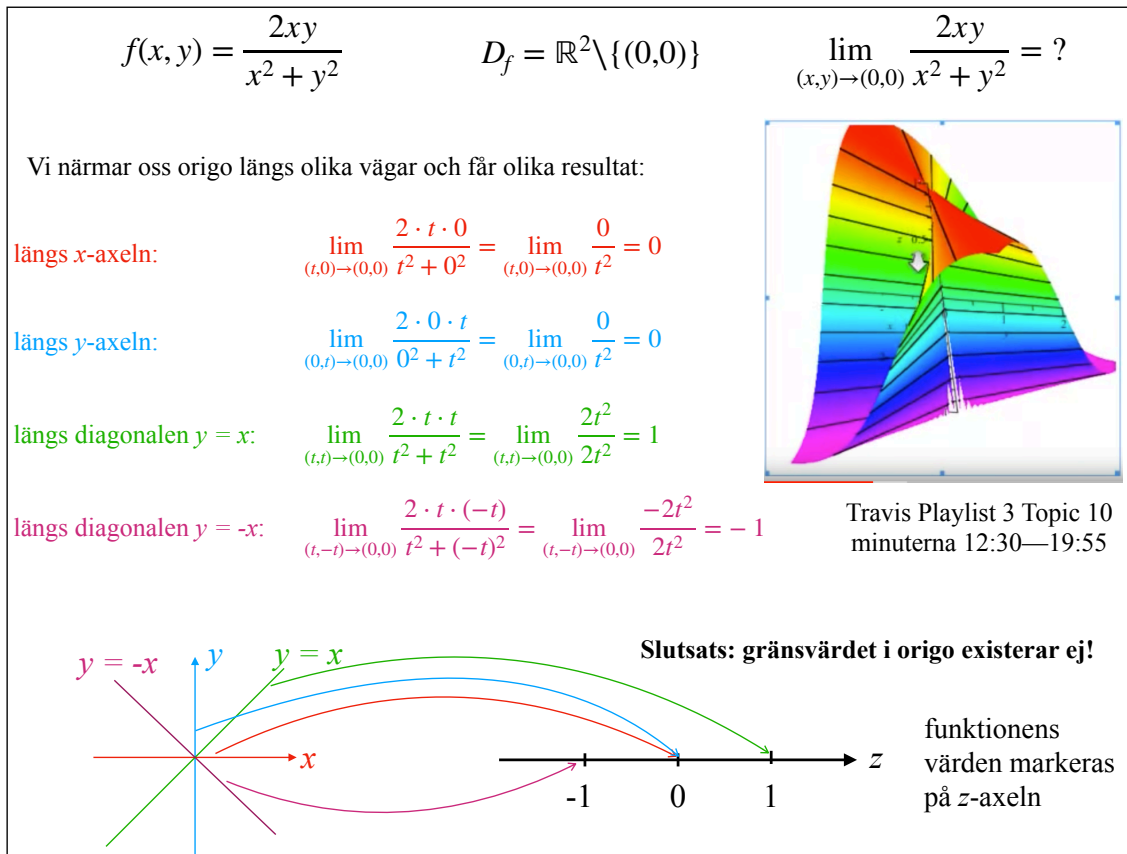
Exempel 20. Visa att gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2}$ inte existerar.

Vi provar med alla räta linjer $(x, y) = (t, kt)$ respektive $(x, y) = (0, t)$. Dessa ger:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (kt)^2}{(t^4 + (kt)^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k^2 t^6}{(t^4 + k^2 t^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k^2 t^2}{(t^2 + k^2)^2} = 0, \quad k \neq 0$$

För $(x, y) = (0, t)$ och $(x, y) = (t, 0)$ är funktionerna identiskt lika med noll. Gränsvärdet är noll längs alla räta linjer. Längs parabeln $(x, y) = (t, t^2)$ får vi dock gränsvärdet:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (t^2)^2}{(t^4 + (t^2)^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^8}{(2t^4)^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{så gränsvärdet existerar ej.}$$



Figur 14: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ existerar ej. (Bild: Hania, med KeyNote.)

I fallen då man får samma gränsvärde längs olika linjer kan man misstänka att gränsvärdet existerar. För att bevisa att det är fallet, använder man polärt koordinatbyte och man visar att om avståndet mellan origo (eller en annan punkt där man undersöker gränsvärdet, men oftast är det origo) och punkter som närmar sig origo går mot noll, då går även avståndet mellan värdena i dessa punkter och det tilltänkta gränsvärdet mot noll, som i följande exempel.

Exempel 21. Visa att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} = 0$.

Vi provar med alla räta linjer $(x, y) = (t, kt)$ respektive $(x, y) = (0, t)$ och $(x, y) = (t, 0)$ och kommer i varje fall till gränsvärdet 0. Det är dock inget bevis, eftersom det finns ju andra vägar mot origo, inte enbart de rätlinjiga!

För att bevisa att gränsvärdet är lika med 0, gör vi polärt koordinatbyte: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ och vi ska bevisa (enligt teorin i bilden på s. 25) att

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{\sqrt{(r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2}} = 0 \quad \text{oavsett } \theta.$$

$$\frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{\sqrt{(r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2}} = \frac{r^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{r \sqrt{(\cos \theta)^2 + 3(\sin \theta)^2}} = \frac{r^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{r \sqrt{1 + 2(\sin \theta)^2}} = \frac{r \cos \theta \cdot \sin \theta}{\sqrt{1 + 2(\sin \theta)^2}}.$$

I näst sista steget har vi använt triggettan i nämnaren. Nu kan vi visa att uttrycket går mot noll då r går mot noll, och detta oavsett θ m.h.a. instängningssatsen. Vi använder också detta att både sinus och cosinus är begränsade med -1 och 1 och att $2(\sin \theta)^2 \geq 0$:

$$0 \leq \frac{r|\cos \theta \cdot \sin \theta|}{\sqrt{1+2(\sin \theta)^2}} \leq \frac{r \cdot 1 \cdot 1}{\sqrt{1+0}} = r.$$

Instängningssatsen visar nu att uttrycket går mot noll då $r \rightarrow 0$ och detta oavsett θ .

Att visa att ett gränsvärde existerar är ofta ganska svårt. Ibland kan vi dock reducera problemet till ett endimensionellt gränsvärde.

Exempel 22. Avgör om gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ existerar och bestäm det i fallet att det existerar.

När $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ så gäller $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0+$. Alltså får vi:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0+} t \ln(t) \underbrace{=}_\text{L'Hôpital} 0$$

Exempel 23. Visa att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy+x^3y^3} = 1$ för $x > 0$, $y > 0$.

Vi kan skriva

$$\frac{\ln(1+xy)}{xy+x^3y^3} = \frac{\ln(1+xy)}{xy(1+(xy)^2)} = \frac{\ln(1+t)}{t(1+t^2)} \quad (\text{ansätt } t = xy)$$

Vi ser att x och y endast förekommer i kombinationen xy och sätter detta till en ny variabel. När $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ så gäller $t \rightarrow 0+$, och standardgränsvärdet i noll: $\ln(1+t)/t \rightarrow 1$ ger:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy+x^3y^3} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+t)}{t(t+t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{1+t^2} = 1.$$

Med hjälp av gränsvärdesdefinitionen för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ kan vi nu definiera kontinuitet. (Fallet $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ behandlas komponentsvis).

Definition 12. Låt f vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ med definitions mängd D . Vi säger att f är **kontinuerlig i punkten** $\vec{a} \in D$ om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$. f är en **kontinuerlig funktion** om f är kontinuerlig i varje punkt $\vec{a} \in D$

Precis som i envariabelanalys, kan man prata om kontinuerliga **utvidgningar** för tvåvariabelfunktioner. Som t.ex. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ som är definierad överallt utom i noll kan utvidgas kontinuerligt till hela $\mathbb{R}$ om vi ansätter $f(0) = 1$, men funktioner med olika höger- och vänstergränsvärden i någon punkt inte kan utvidgas till kontinuerliga funktioner. Funktionerna i två exemplen på s. 26 kan inte utvidgas till kontinuerliga funktioner på hela $\mathbb{R}^2$, medan det är möjligt för funktionerna i två nästa exemplen, genom ansättning $f(0, 0) = 0$. I sista exemplet ovan: $f(0, 0) = 1$.

Från räknereglererna för gränsvärden inses att summan, produkten, och sammansättningen osv. av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

För kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ finns en motsvarighet till **satsen om mellanliggande värden**. Motsvarigheten till intervall i $\mathbb{R}^n$ är följande.

Definition 13. En mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ är en **bågvis sammanhängande mängd** om det för varje par $\vec{a}, \vec{b}$ av punkter i D finns en kontinuerlig funktion $\vec{x}$ från $[\alpha, \beta]$ till $\mathbb{R}^n$ som uppfyller $\vec{x}(\alpha) = \vec{a}$, $\vec{x}(\beta) = \vec{b}$ och $\vec{x}(t) \in D \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Sats 4. Om $D \subset \mathbb{R}^n$ är en bågvis sammanhängande mängd och $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ är kontinuerlig så är $f(D)$ en bågvis sammanhängande mängd.

Partiella derivator

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och (a, b) vara en inre punkt till definitionsområdet. Vi kommer att försöka hitta en bra motsvarighet till derivatan från envariabelkalkyl. Idag gör vi ett första försök som heter **partiell derivata**. Vi definierar två partiella derivator i punkten (a, b) : den första heter **den partiella derivatan m.a.p.⁴ x** och den andra **den partiella derivatan m.a.p. y** och de definieras med hjälp av gränsvärdebegreppet från envariabelkalkyl. I rutan nedan anges både definitionen och olika beteckningar för de partiella derivatorna:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= f'_x(a, b) = f'_1(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = g'(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= f'_y(a, b) = f'_2(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = h'(b)\end{aligned}$$

Vid partiell derivering betraktas alla variabler, utom den man deriverar med avseende på, som konstanter. Partiell derivering är därmed egentligen derivering av en funktion av en variabel (här $g(x) = f(x, b)$ och $h(y) = f(a, y)$), så samma deriveringsregler gäller som för funktioner av en variabel:

Exempel 24. Bestäm $f'_x(x, y)$ och $f'_y(x, y)$ för $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

För att bestämma $f'_x(x, y)$ betraktar vi y som en konstant och får:

$$f'_x(x, y) = \frac{1 \cdot (x+y) - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}.$$

För att bestämma $f'_y(x, y)$ betraktar vi x som en konstant och får, med omskrivningen $f(x, y) = x(x+y)^{-1}$:

$$f'_y(x, y) = x(-1)(x+y)^{-2}(1) = -\frac{x}{(x+y)^2}.$$

I kursen envariabelanalys visade vi att **en deriverbar funktion är kontinuerlig**. En partiellt deriverbar funktion av flera variabler behöver dock inte vara kontinuerlig, vilket visas i nästa exempel.

⁴med avseende på

Exempel 25. Funktionen f är definierad som $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och som $f(0, 0) = 0$. Funktionen är partiellt deriverbar utanför origo, men också i origo eftersom det är identiskt lika med noll på koordinataxlarna. Alltså gäller $f'_x(0, 0) = 0 = f'_y(0, 0)$. Funktionen är dock inte kontinuerlig eftersom när vi närmar oss origo längs linjen $y = x$ så får vi gränsvärdet (se också **Travis** Playlist *Calculus 3*, Topic 10 min. 12:30–19:55)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

som är skilt från funktionsvärdet i origo.

Partiell deriverbarhet är därför ingen lämplig flerdimensionell motsvarighet till deriverbarhet i en variabel och vi hittar nedan en bättre motsvarighet. Mer om detta på F4.

Rekommenderade uppgifter efter F3

12.1: 1, 3, 5, 11, 15, 19, 23, 27. **12.2:** 1, 3, 7, 9, 13. **12.3:** 3, 5, 9, 11. **Extra uppgifter:** **12.1:** 37, 38. **12.2:** 15, 23. **12.3:** 36, 37.

Föreläsning 4: Partiella derivator; tangentplan; kedjeregeln

Adams 12.3, 12.4, 12.5

Partiella derivator; tangentplan till grafytan $z = f(x, y)$

Ett enkelt sätt att studera en funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ av flera variabler är att undersöka hur varje variabel för sig påverkar funktionen. Vi fixerar därmed alla variabler utom en och betraktar funktionerna:

$$f(x_1, a_2, a_3, \dots, a_n), \quad f(a_1, x_2, a_3, \dots, a_n), \quad \dots, \quad f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$$

Geometriskt innebär detta att vi studerar funktionens beteende längs räta linjer som är parallella med koordinataxlarna. De n funktionerna ovan är vanliga funktioner av en variabel och vi kan definiera deras derivator på vanligt sätt. Låt nedan $\vec{e}_j$ vara den j :te standardbasvektorn.

Definition 14. Låt $\vec{a}$ vara en inre punkt i definitionsmängden D_f till en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_j) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

existerar så säger vi att f är **partiellt deriverbar med avseende på (m.a.p.) variabeln x_j** i punkten $\vec{a}$. Gränsvärdet betecknas $f'_j(\vec{a})$ eller $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})$ och kallas den **partiella derivatan med avseende på x_j** i punkten $\vec{a}$.

Om alla partiella derivator $f'_j(\vec{a})$, $j \in \{1, \dots, n\}$, existerar så sägs f vara *partiellt deriverbar* i $\vec{a}$. De partiella derivatorna kan användas för att definiera funktioner f'_j vars funktionsvärde i en punkt $\vec{x}$ ges av den partiella derivatan $f'_j(\vec{x})$.

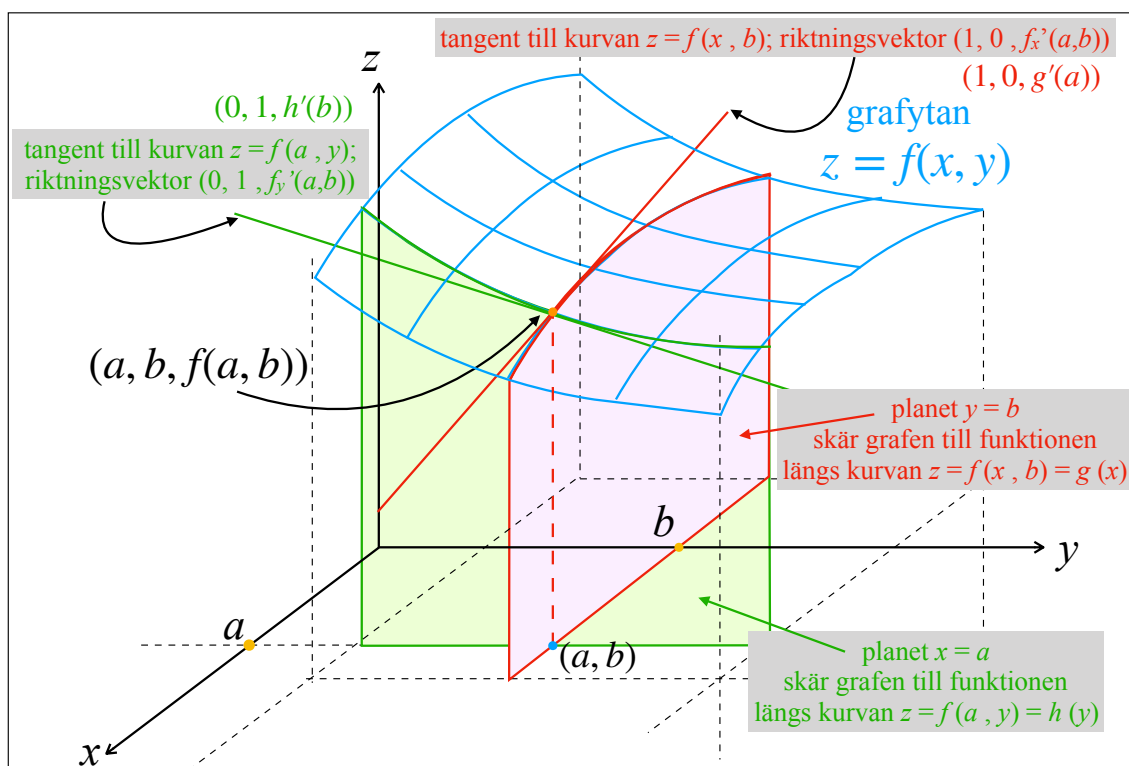
Vi kommer att syssla mest med partiella derivator för tvåvariabelfunktioner $f(x, y)$, eftersom där kan man diskutera många geometriska aspekter och tolkningar, bl.a. *tangentplan* till grafytan i punkten $(a, b, f(a, b))$. I detta fall kan vi skriva om definitionerna för två partiella derivator på följande sätt. En partiell derivata med avseende på (m.a.p.) x och en m.a.p. y i punkten (a, b) definieras då på följande sätt. Man brukar kalla förändringen i x -ledet för h och förändringen i y -ledet för k :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f'_x(a, b) = f'_1(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = g'(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f'_y(a, b) = f'_2(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = h'(b)$$

Observera att dessa är vanliga derivator för envariabelfunktioner $g(x) = f(x, b)$ (i $x = a$) och $h(y) = f(a, y)$ (i $y = b$). Dessa är förstas lutningskoefficienterna för tangentlinjer till kurvor $z = f(x, b)$ i planet $y = b$ (den röda kurvan i bilden) och $z = f(a, y)$ i planet $x = a$ (den gröna kurvan i bilden), båda i punkten $(a, b, f(a, b))$.

Ett **tangentplan** (kalla den Π) till grafytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ definieras som planet som går genom denna punkt och som innehåller båda tangentlinjer enligt beskrivningen ovan (den röda och den gröna i bilden). Vi kommer att ta fram ekvationen för detta plan.



Figur 15: Tangentplan till grafytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Planets ekvation på standardform, alltså $Ax + By + Cz + D = 0$, fås genom en normalvektor (A, B, C) till planet och en punkt i planet (som ger värdet för D). I vårt fall får vi en normalvektor till planet Π som kryssprodukten av riktningsvektorerna⁵ $(1, 0, f'_x(a, b))$ och $(0, 1, f'_y(a, b))$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x(a, b) \\ 0 & 1 & f'_y(a, b) \end{vmatrix} = (-f'_x(a, b), -f'_y(a, b), 1),$$

alltså är vektorerna $\vec{N}_1 = (-f'_x(a, b), -f'_y(a, b), 1)$ och $\vec{N}_2 = (f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1)$ normalvektorer till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $P = (a, b, f(a, b))$: den första pekar uppåt (ty $\Delta z = 1 > 0$) och den andra nedåt (ty $\Delta z = -1 < 0$).

Alla punkter $A = (x, y, z)$ i detta plan uppfyller villkoret att $\overrightarrow{PA}$ är vinkelrät mot vektorn $\vec{N}_2$, vilket betyder att deras skalärprodukt är lika med noll. Definitionen av skalärprodukt för två

⁵Varför är just dessa riktningsvektorer? Vektorn $(1, 0, f'_x(a, b))$ ligger i planet $y = b$ där y är konstant, alltså sker det ingen förändring i y ledet: därav $\Delta y = 0$ som andra komponenten. Kvoten mellan den tredje och den första komponenterna är lika med derivatan $f'_x(a, b)$, alltså kan man t.ex. ta $\Delta x = 1$ och $\Delta z = f'_x(a, b)$. Samma resonemang förs för riktningsvektorn $(0, 1, f'_y(a, b))$ i planet $x = a$.

vektorer $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ och $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ är $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$, och därför har vi:

$$A \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow (x-a, y-b, z-f(a,b)) \cdot (f'_x(a,b), f'_y(a,b), -1) = 0$$

$$(x-a)f'_x(a,b) + (y-b)f'_y(a,b) - z + f(a,b) = 0 \Leftrightarrow z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

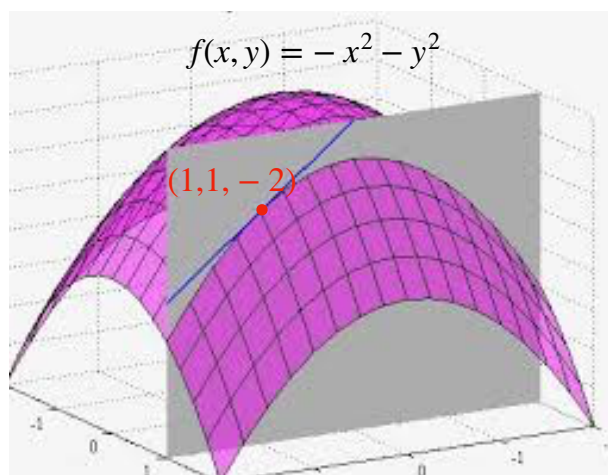
vilket är en **standardekvation för tangentplanet** Π till grafytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.

Exempel 26. Bestäm en standardekvation för tangentplanet till grafytan till $f(x, y) = -x^2 - y^2$ i punkten $(1, 1, -2)$. Tangentplanets ekvation är

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b).$$

Vi behöver alla element i ekvationen. Hos oss är $a = 1$ och $b = 1$. Eftersom $f(x, y) = -x^2 - y^2$, är $f(1, 1) = -2$. De partiella derivatorna: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$, alltså $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -2$, vilket ger tangentplanets ekvation

$$z = -2 - 2(x-1) - 2(y-1) \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 2 = 0.$$



Figur 16: Tangentplan till grafytan $z = -x^2 - y^2$ i punkten $(1, 1, -2)$. OBS: planet i bilden är inte tangentplanet! (Bild: Hania, med KeyNote.)

Låt oss återvända till ett exempel från F3 (s. 29):

Exempel 27. Bestäm $f'_1(x, y)$ och $f'_2(x, y)$ för $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

Vi beräknade de partiella derivatorna på F3:

$$f'_1(x, y) = \frac{1 \cdot (x+y) - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}.$$

$$f'_2(x, y) = x(-1)(x+y)^{-2}(1) = -\frac{x}{(x+y)^2}.$$

Från ovanstående exempel ser vi att funktionen $f(x, y)$ är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \text{ty} \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(\frac{y}{(x+y)^2} \right) + y \left(-\frac{x}{(x+y)^2} \right) = 0.$$

Man kan faktiskt visa att alla funktioner på formen $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ löser den givna partiella differentialekvationen. Kedjeregeln ger nämligen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= g' \left(\frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2} g' \left(\frac{y}{x} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= g' \left(\frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} g' \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(-\frac{y}{x^2} \right) g' \left(\frac{y}{x} \right) + y \cdot \frac{1}{x} g' \left(\frac{y}{x} \right) = 0.$$

Notera vidare att om en partiellt deriverbar funktion $f(x, y)$ uppfyller $f'_1(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, så är f oberoende av x , dvs. $f(x, y) = \varphi(y)$ för någon funktion φ .

I kursen envariabelanalys visade vi att en deriverbar funktion är kontinuerlig. En partiellt deriverbar funktion av flera variabler behöver dock inte vara kontinuerlig, vilket visas i nästa exempel. Vi tar en gång till exemplet från F3:

Exempel 28. Funktionen f är definierad som $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och som $f(0, 0) = 0$. Funktionen är partiellt deriverbar utanför origo, men också i origo eftersom det är identiskt lika med noll på koordinataxlarna. Alltså gäller $f'_1(0, 0) = f'_2(0, 0) = 0$. Observera att, för att beräkna partiella derivatorna i $(0, 0)$, måste man räkna direkt från derivatans definition, eftersom funktionen i origo definieras på ett annat sätt än för punkterna utanför origo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0}{h(h^2 + 0^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 \cdot k}{k(0^2 + k^2)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^2} = 0.$$

Funktionen är dock inte kontinuerlig eftersom när vi närmar oss origo längs linjen $y = x$ så får vi gränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

som är skilt från funktionsvärdet i origo.

Partiell deriverbarhet är därför ingen lämplig flerdimensionell motsvarighet till deriverbarhet i en variabel och vi hittar nedan en bättre motsvarighet.

Högre ordningens derivator

Om de partiella derivatorna av en funktion f av n variabler i sin tur är partiellt deriverbara, så kan vi definiera **andra ordningens partiella derivator**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = f''_{ij} \quad \text{för } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ osv.}$$

Exempel 29. Bestäm andra ordningens partiella derivator av funktionen $f(x, y) = xy + \ln(xy^2)$

$$f'_x = y + \frac{1}{xy^2} \cdot y^2 = y + \frac{1}{x}, \quad f'_y = x + \frac{1}{xy^2} \cdot 2xy = x + \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = -\frac{2}{y^2}.$$

Vi kan även beräkna tredje ordningens partiella derivator, exempelvis

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{xxx} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xyx} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f'''_{xxy} = 0,$$

osv.

I exemplet ovan var de blandade partiella derivatorna f''_{xy} och f''_{yx} lika. Detta är ingen tillfällighet som följande sats visar:

Sats 5 (Schwarz; Adams 12.4.1). *Equality of mixed partials.* Låt f vara en funktion av n variabler med definitionsmängd D . Om alla partiella derivator upp till och med ordning k är kontinuerliga, så är alla blandade derivator av ordning k (tagna m.a.p. samma variabler, fast i olika ordningar) lika.

Beviset är relativt likt beviset av att en funktion med kontinuerliga partiella derivator är differentierbar och bygger på medelvärdessatsen (bevis i kursboken). Vi kommer att använda denna sats flera gånger under kursens gång.

Vi introducerar också följande beteckningar, som är praktiska (korta!) när man senare ska skriva ner antaganden i olika satser:

Definition 15. Låt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ är en öppen mängd. (Funktionen f är alltså en funktion av n variabler.) Man säger att:

- f är av klass C^0 i Ω om f är kontinuerlig i Ω . Man skriver också kort $f \in C^0$,
- f är av klass C^1 i Ω om f är partiellt deriverbar i Ω och alla partiella derivatorna (som funktioner av n variabler) är kontinuerliga i Ω . Man skriver också kort $f \in C^1$,
- generellt, för $k \geq 2$: f är av klass C^k i Ω om f är k gånger partiellt deriverbar i Ω och partiella derivatorna (som funktioner av n variabler) av ordning k är kontinuerliga i Ω . Man skriver också kort $f \in C^k$.

Andra ordningens partiella derivator förekommer i många partiella differentialekvationer (PDE). En viktig sådan PDE är:

Laplaces ekvation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i } \mathbb{R}^2 \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{i } \mathbb{R}^3.$$

Lösningar $u(x, y)$ respektive $u(x, y, z)$ till Laplaces ekvation kallas för **harmoniska funktioner**.

I uppgift Adams 12.4.15 ska ni visa att tvåvariabelfunktioner $u(x, y)$ och $v(x, y)$ med kontinuerliga andra ordningens partiella derivator som uppfyller **Cauchy–Riemann ekvationer** är harmoniska.

Funktioner $u(x, y)$ och $v(x, y)$ uppfyller **Cauchy–Riemann ekvationer** om

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Laplaces ekvation används för att beskriva system i jämvikt. Givet att temperaturen på randen ∂D av en kropp ges av en känd funktion $f(x, y)$ så kommer temperaturen i kroppens inre $u(x, y)$ i jämvikt att vara lösningen till det så kallade **Dirichletproblemet**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, y) = f(x, y). \end{cases}$$

Exempel 30. Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ och anta att $u(x, y) = 0$ på $x^2 + y^2 = 1$ samt att $u(x, y) = 2 \ln(2)$ på $x^2 + y^2 = 4$.

Dirichletproblemet ovan har lösningen $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Vi ser direkt att randvillkoret är uppfyllt. Vidare gäller

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x \\ u''_{xx} &= \frac{2}{x^2 + y^2} + 2x(-1) \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4}{x^2 + y^2} - 4 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Harmoniska funktioner har många intressanta egenskaper. Exempelvis antar harmoniska funktioner alltid maximum och minimum på randen av området (rimligt med tanke på temperaturlämpligheten). Vidare är medelvärdet av en harmonisk funktion på en omgivning $N(\vec{a}, \delta)$ eller på ytan $\partial N(\vec{a}, \delta)$ alltid lika med funktionsvärdet i punkten $\vec{a}$. Slutligen är alla begränsade harmoniska funktioner definierade på hela $\mathbb{R}^n$ konstanta.

Jacobianen och gradienten: första introduktion

Här tjuvkikar vi lite på två definitioner som egentligen ska komma senare i kursen (F5–7). Men det är praktiskt att ha dem redan idag.

Definition 16. För partiellt deriverbara funktioner $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ av n variabler definierar vi **gradienten** av f i punkten $\vec{x}$ som

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) \quad (\text{betecknas även } \nabla f(\vec{x}))$$

Symbolen ∇ heter *nabla*; ordet betyder 'harpa' på grekiska. Gradienten är ett vektorfält (en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$).

Definition 17. För en vektorvärd funktion $\vec{f} = f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ med komponentfunktioner $f_1, \dots, f_m$, alltså

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{definieras} \quad \textbf{Jacobimatrisen} \quad D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen är alltså en $m \times n$ -**matris** där j :te raden i $D\vec{f}(\vec{x})$ är $\nabla f_j(\vec{x})$.

Gradient är specialfall av Jacobimatrisen. De kommer att användas som motsvarigheter till derivatan från envariabelkalkyl. Jacobimatrisen kallas också **jacobian** eller **funktionalmatris**.

Kedjeregeln

Kedjeregeln behövs för att derivera sammansatta funktioner. I envariabelanalys finns det bara en enda version av kedjeregeln, men det finns hur många som helst versioner av kedjeregler för flervariabelfunktioner. Vi kommer att gå igenom några viktigaste versioner och lära oss använda dem m.h.a. Jacobianer och m.h.a. diagram som hos Adams.

Version 0 Den *endimensionella* kedjeregeln för

$$f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

säger att $\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)$. Om vi inför beteckningarna $u = f(v)$, $v = g(t)$, så kan kedjeregeln också skrivas

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dt}, \quad u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Version G Den *mest generella* version av kedjeregeln: Med hjälp av Jacobimatrisen kan kedjeregeln för en sammansatt funktion uttryckas med hjälp av en **matrismultiplikation**. Låt $\vec{x} = \vec{g}(\vec{t}) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, och $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, så

$$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^q \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{R}^m$$

$$D\vec{g}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_q} \end{pmatrix}, \quad D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t}) = \underbrace{D\vec{f}(\vec{g}(\vec{t}))D\vec{g}(\vec{t})}_{\text{Matrismultiplikation}}$$

$(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t})$ är en funktion från $\mathbb{R}^q$ till $\mathbb{R}^m$. Enligt kedjeregeln är $\frac{\partial}{\partial t_j}(\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t})$

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_k} \frac{\partial g_k(\vec{t})}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_1} \frac{\partial g_1(\vec{t})}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_n} \frac{\partial g_n(\vec{t})}{\partial t_j}$$

och detta är precis resultatet på rad i och kolonn j i matrismultiplikationen ovan ($i = 1, \dots, m$ och $j = 1, \dots, q$, ty produkten av en $m \times n$ -matris och en $n \times q$ -matris är en $m \times q$ -matris).

I exemplen nedan kommer vi att använda samma beteckningar som ovan i de generella formlerna, men följande beteckningar för att illustrera vad funktionerna står för. Då använder vi:

- s för en envariabel skalärfunktion,
- $\vec{v}$ för en vektorvärd funktion,
- f för en flervariabelfunktion med skalära värden,
- Φ för ett variabelbyte i $\mathbb{R}^2$ eller i $\mathbb{R}^3$.

OBS: $\frac{d}{dt}$ används för derivator till envariabelfunktioner och $\frac{\partial}{\partial x}$ för flervariabelfunktioner.

Version 1: (se F2: del 5 i Sats 3 på s. 17) med $q = 1$ och $n = 1$ och $m = n$.

$$\vec{v} \circ s : \mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{v}} \mathbb{R}^n$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}(s(t))) = s'(t) \cdot \vec{v}'(s(t)).$$

Varför är det så? Eftersom derivering av vektorvärda funktioner sker komponentsvis och komponentfunktionerna $x_1, \dots, x_n$ är vanliga envariabelfunktioner och för dem gäller den vanliga envariabel-kedjeregeln. Alltså, om $\vec{v}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, då är $\vec{v}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ och därför får vi:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}(s(t))) = \left(\frac{d}{dt}(x_1(s(t))), \dots, \frac{d}{dt}(x_n(s(t))) \right) = (x'_1(s(t)) \cdot s'(t), \dots, x'_n(s(t)) \cdot s'(t)) = s'(t) \cdot \vec{v}'(s(t)).$$

I det sista steget har vi brutit ut skalären $s'(t)$ framför vektorn samt satt in $\vec{v}'(s(t))$ i.s.f. vektorn med derivatorna till komponentfunktionerna, och i det näst sista: tillämpat den envariabel-kedjeregeln till komponentfunktionerna. I det här varianten för kedjeregeln kan man tänka på s -funktionen som omparametrisering av kurvan.

Version 2: (se F3: regel 4 på s. 26) med $q = n$ och $n = 1$ och $m = 1$.

Först generellt. Den endimensionella kedjeregeln kan också användas för partiell derivering av funktioner av typen $f(g(t_1, \dots, t_n))$, alltså

$$f \circ g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

eftersom när vi deriverar partiellt, så fixerar vi alla variabler utom en. Alltså gäller, med $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$,

$$\frac{\partial f(g(\vec{t}))}{\partial t_j} = f'(g(\vec{t}))g'_j(\vec{t}) \quad \text{alternativt} \quad \frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{du}{dv} \frac{\partial v}{\partial t_j}, \quad u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Exempel 31. Uppgift 5 från Adams 12.3: Nu på ett konkret exempel och med beteckningar som återspeglar karaktären hos de inblandade funktionerna: beräkna $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ där $z = \arctan \frac{y}{x}$.

Situationen är följande:

$$z = s \circ f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R},$$

där $f(x, y) = \frac{y}{x}$ och $s(t) = \arctan t$.

Vi beräknar partiella derivatorna av sammanställningen $z = s \circ f$ enligt formlerna:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

som ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Det är inte svårt, men man måste lära sig känna igen situationer där man har sammansatta funktioner.

Exempel 32. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u$$

som har formen $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ (radiell symmetri).

Sätt $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Kedjeregeln ger nu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial z}$$

Vidare gäller:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}. \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad (\text{av symmetriskäl})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x f'(r) \frac{x}{r} + y f'(r) \frac{y}{r} + z f'(r) \frac{z}{r} = f'(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = r f'(r)$$

så differentialekvationen kan skrivas $r f'(r) = f(r)$, vilket är en separabel ordinär differentialekvation med lösningen

$$\int \frac{df}{f} = \int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln(f(r)) = \ln(r) + C \Rightarrow f(r) = e^{\ln(r)+C} = Dr.$$

Version 3: med $q = 1$ och $m = 1$.

Betrakta nu en sammansatt funktion på formen $f(\vec{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$, alltså

$$f \circ \vec{g}: \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Kedjeregeln har då följande utseende:

Sats 6. Låt f vara en differentierbar funktion på $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt $g_1, \dots, g_n$ vara deriverbara funktioner på ett intervall (a, b) . Om $\vec{g}(t) \in D$ för alla $t \in (a, b)$, så är $f(\vec{g}(t))$ deriverbar på (a, b) och

$$\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = f'_1(\vec{g}(t)) g'_1(t) + \dots + f'_n(\vec{g}(t)) g'_n(t)$$

eller med $u = f(\vec{v})$, $\vec{v} = \vec{g}(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n} \frac{dv_n}{dt}$$

Bevis. Vi undersöker gränsvärdet av differenskvoten $\frac{f(\vec{g}(t+k)) - f(\vec{g}(t))}{k}$. Eftersom f är differentierbar, så vet vi att

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x}) h_i + |\vec{h}| \varphi(\vec{h}), \quad \text{där } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \varphi(\vec{h}) = 0.$$

Sätt nu $\vec{x} = \vec{g}(t)$ och $\vec{h} = \vec{g}(t+k) - \vec{g}(t)$, så att $\vec{x} + \vec{h} = \vec{g}(t+k)$. Då får vi:

$$\underbrace{\frac{f(\vec{g}(t+k)) - f(\vec{g}(t))}{k}}_{\rightarrow \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t))} = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x}) \frac{h_i}{k} + \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h}) = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x}) \underbrace{\frac{g_i(t+k) - g_i(t)}{k}}_{\rightarrow g'_i(t)} + \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h}).$$

Det återstår att visa att resttermen går mot noll då $k \rightarrow 0$. Då $k \rightarrow 0$ så även $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$ (g_i deriverbara och därmed kontinuerliga) och då även $\varphi(\vec{h}) \rightarrow 0$. Vidare gäller

$$\frac{|\vec{h}|}{k} = \frac{|\vec{g}(t+k) - \vec{g}(t)|}{k} \rightarrow |g'_1(t), \dots, g'_n(t)| = C, \quad \text{så } \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h}) \rightarrow 0.$$

□

Hela situationen blir betydligt enklare att förstå om vi skriver upp det för $n = 2$. Och exemplet är viktigt, eftersom här kommer det för första gången plus-tecknet i formeln! Hittills var allt mycket likt situationen från envariabelanalys och formlerna var rätt så intuitiva. Från och med nu blir det riktigt nyttigt med både diagram som hos Adams och med matrismultiplikation.

Exempel 33.

$$f \circ \vec{v} : \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{v}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Vi har $z(t) = f(x(t), y(t))$. Sammansättningen är en vanlig envariabelfunktion och derivatan beräknas med vanliga metoder. Först ersätter vi bara $z(t)$ med $f(x(t), y(t))$:

$$z'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} = \dots$$

och nu tillämpar vi en [typisk trick med att subtrahera och addera samma sak för att kunna trolia fram de partiella derivatorna](#):

$$\dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t+h))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} = \dots$$

och nu kan man tillämpa den vanliga envariabel-kedjeregeln:

$$\dots = f'_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (x'(t), y'(t)) = \nabla f(\vec{v}(t)) \cdot \vec{v}'(t)$$

och nu ser vi både hur plus-tecknet kommer in i bilden OCH hur kedjeregeln kan noteras med hjälp av matrisprodukt!

Exempel 34. Bestäm $\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t))$ för $f(x, y, z) = xz + \cos y$ och $\vec{g}(t) = (\sin t, t^2, \ln(t^2 + 1))$.

Vi kan använda kedjeregeln och får då:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) &= f'_1(\vec{g}(t))g'_1(t) + f'_2(\vec{g}(t))g'_2(t) + f'_3(\vec{g}(t))g'_3(t) \\ &= [f'_1(x, y, z) = z, \quad f'_2(x, y, z) = -\sin y, \quad f'_3(x, y, z) = x] \\ &= \ln(t^2 + 1) \cos t + (-\sin(t^2))2t + \sin t \cdot \frac{2t}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Vi kan också bestämma den sammansatta funktionen $f(\vec{g}(t))$ och derivera den som en funktion av en variabel:

$$\begin{aligned} f(\vec{g}(t)) &= \sin t \ln(t^2 + 1) + \cos(t^2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) &= \cos t \ln(t^2 + 1) + \sin t \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} - 2t \sin(t^2). \end{aligned}$$

I exemplet ovan var det mer invecklat att använda kedjeregeln. Med hjälp av kedjeregeln kan vi dock lösa vissa problem utan att känna till båda funktionerna f och $\vec{g}(t)$ explicit.

Exempel 35. Låt $f(x, y)$ vara en differentierbar funktion som löser differentialekvationen $x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}$ i första kvadranten. Visa att f är konstant på alla hyperbler $xy = c$ i första kvadranten.

I detta fall känner vi inte f explicit, utan vet bara att f löser en viss differentialekvation. Vi vill veta f på alla kurvor $y = \frac{c}{x}$, $x > 0$ och sätter därför $f\left(x, \frac{c}{x}\right)$. Kedjeregeln ger:

$$\frac{d}{dx} f\left(x, \frac{c}{x}\right) = f'_1\left(x, \frac{c}{x}\right) \cdot 1 + f'_2\left(x, \frac{c}{x}\right) \left(-\frac{c}{x^2}\right) = \frac{1}{x} \left(x f'_1\left(x, \frac{c}{x}\right) - \frac{c}{x} f'_2\left(x, \frac{c}{x}\right)\right).$$

Den givna differentialekvationen ger nu att $x f'_1(x, y) - y f'_2(x, y) = 0$, vilket för $y = \frac{c}{x}$ ger att uttrycket i parenteserna ovan är noll. Därmed följer att $\frac{d}{dx} f\left(x, \frac{c}{x}\right) = 0$ och f är konstant längs $y = \frac{c}{x}$.

Version 4: med $q = n$ och $n = p$ och $m = 1$.

Den mer generella kedjeregeln får vi när $\vec{g}(t)$ är en vektorvärd funktion av n variabler, dvs. $\vec{g}(\vec{t}) = (g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_p(t_1, \dots, t_n))$, eller:

$$f \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Genom att kombinera de båda föregående varianterna av kedjeregeln får vi:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\vec{g}(\vec{t})) = f'_1(\vec{g}(\vec{t})) \frac{\partial g_1}{\partial t_j} + \dots + f'_p(\vec{g}(\vec{t})) \frac{\partial g_p}{\partial t_j} \quad \text{för } j \in \{1, \dots, n\}, \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

eller med $u = f(\vec{v})$, $\vec{v} = \vec{g}(\vec{t})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_p} \frac{\partial v_p}{\partial t_j}.$$

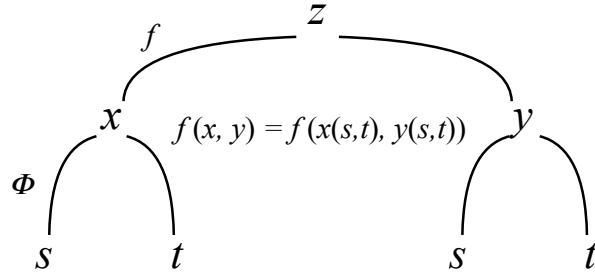
Så fort som den inre funktionen är vektorvärd får vi i kedjeregeln en summa med lika många termer som dimensionen på de inre funktionen. Ibland kan beroendet mellan variablerna vara mer invecklat som i nästa exempel. Då är det praktiskt att använda diagram som i kurslitteraturen⁶.

Exempel 36. Version 4 med $q = 2 = n$ (och $q = 3 = n$ i bilden på nästa sida) och $m = 1$, alltså

$$f \circ \Phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

där Φ , ett variabelbyte i $\mathbb{R}^2$, definieras som: $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$.

⁶För ett ännu mer komplicerat exempel se Adams 12.5, Exempel 7.



Figur 17: Kedjeregeln, Version 4 med $q = 2 = n$ och $m = 1$. Passar perfekt vid polärt koordinatbyte. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Derivatan till $z = f(x(s, t), y(s, t))$ beräknas på följande sätt, vilket kan avläsas antingen från diagrammet (på precis samma sätt som man avläser sannolikheterna från ett likartat utseende diagram!) eller m.h.a. matrismultiplikationen:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

$f(x, y, z), \quad x = x(a, b, c), y = y(a, b, c), z = z(a, b, c)$

$\mathbf{R}^3 \xrightarrow{\Phi} \mathbf{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbf{R}$

$(a, b, c) \quad (x, y, z) \quad \Phi(a, b, c) = (x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c}$$

$$\nabla(f \circ \Phi) = \nabla f \cdot D\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix}$$

$q = 3 = n$

Figur 18: Kedjeregeln, Version 4 med $q = 3 = n$ och $m = 1$, som i Travis T.14, min. 26–28. (Bild: Hania, med KeyNote.)

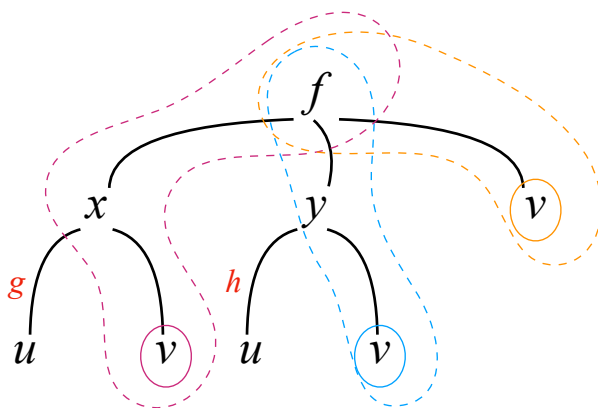
Fortsätter med Exempel 36: Gradienten till f är $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ och Jacobianen till Φ :

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

så är derivatan av sammansättningen lik med matrisprodukten av dessa två, alltså:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \nabla f \cdot D\Phi = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right).$$

Exempel 37. Låt $f(x, y, v)$, där $x = g(u, v)$ och $y = h(u, v)$, så att f har ett direkt beroende av variabeln v och två indirekta beroenden av variabeln u (via funktionerna g och h). Bestäm $\frac{\partial}{\partial v} f(x, y, v)$.



Figur 19: Kedjeregeln, Exempel 37. Det finns tre vägar i diagrammet som leder till variabeln v . (Bild: Hania, med KeyNote.)

Kedjeregeln ger (se diagrammet!):

$$\frac{\partial}{\partial v} f(x, y, v) = f'_1(x, y, v) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{g'_2(u, v)} + f'_2(x, y, v) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{h'_2(u, v)} + f'_3(x, y, v)$$

Den generella kedjeregeln är ofta användbar för att avgöra hur olika partiella derivator förändras när man byter variabler. Exempelvis an man visa att Laplaces ekvation i två dimensioner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ i polära koordinater är } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

(vilket direkt ger att $2 \ln(r)$ är harmonisk).

Exempel 38. Transformera differentialekvationen $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ genom att införa de nya variablerna $x = u + v$, $y = u - v$. Lös därefter ekvationen.

Sambandet mellan (x, y) och (u, v) kan skrivas $u = \frac{1}{2}(x + y)$ och $v = \frac{1}{2}(x - y)$. Kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

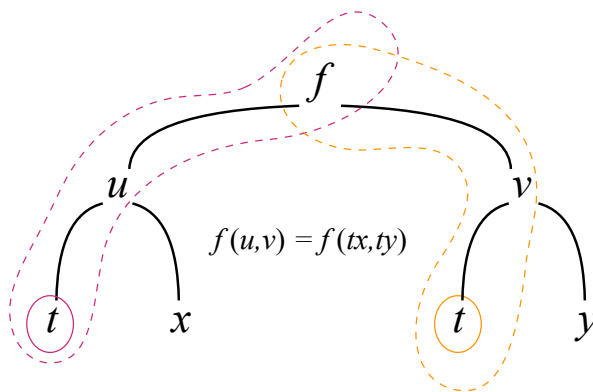
kombinerar vi båda dessa ekvationer får vi:

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial z}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

med lösningen $z = f(v) = f(x - y)$ för någon envariabelfunktion $f \in C^1$.

Exempel 39. Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion med kontinuerliga partiella förstaderivator. Antag att för alla reella tal $t > 0$ gäller $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$. Visa att då gäller

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f(x, y).$$



Figur 20: Kedjeregeln, Exempel 39. Det finns två vägar i diagrammet som leder till variabeln t . (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vi använder kedjeregeln (se diagrammet!) på sambandet $t^3 f(x, y) = f(tx, ty)$ och får då:

$$3t^2 f(x, y) = \frac{d}{dt} f(tx, ty) = f'_1(tx, ty)x + f'_2(tx, ty)y$$

samtidigt gäller

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) &= f'_1(tx, ty)t \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty) = f'_2(tx, ty)t \quad \text{så} \\ x \frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) + y \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty) &= x f'_1(tx, ty)t + y f'_2(tx, ty)t = t \cdot 3t^2 f(x, y) = 3f(tx, ty). \end{aligned}$$

Till sist några anmärkningar om PDE (partiella differentialekvationer). Se också Jonas Månssons anteckningar till Föreläsning 6 på sidorna 4–6.

Här kommer några instruktioner angående lösning av riktigt enkla PDE:er. Man härleder komplicerade PDE:er till enkla sådana m.h.a. ett lämpligt koordinatbyte.

Föreläsning 5: Deriverbarhet, linjärisering

Adams 12.6

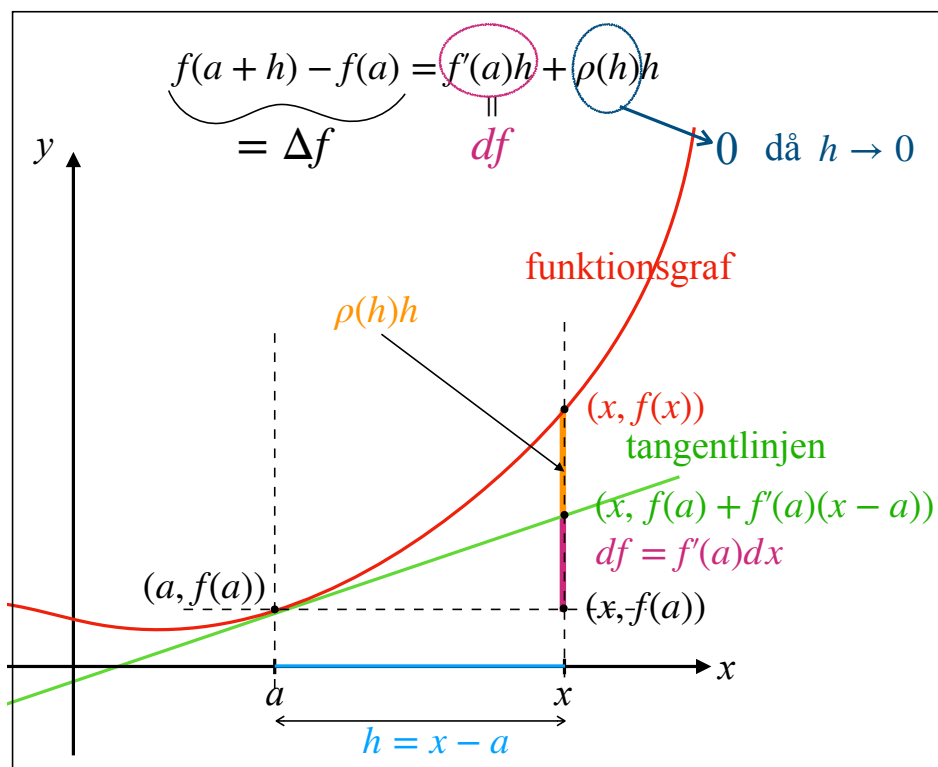
Om en funktion av en variabel är **deriverbar i en punkt** a och där har derivatan $f'(a)$, så innebär det att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \overbrace{\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right)}^{\rho(h)} = 0.$$

Funktionen $\rho(h)$ är definierad för alla $h \neq 0$ sådana att $a+h \in D_f$, och uppfyller $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$.
 f är alltså deriverbar i punkten a om det finns en konstant A och en funktion $\rho(h)$ s.a.

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \rho(h)h, \quad \text{där } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0.$$

Om vi kallar $a+h$ för x , så får vi $h = x - a$ och $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \rho(x-a)(x-a)$, så termen $\rho(x-a)(x-a)$ (i orange i bilden nedan) blir **felet vid linjär approximation** av funktionen f . Vi ska strax utvidga denna definition till flera variabler.



Figur 22: Deriverbarheten i punkten a av en envariabelfunktion $y = f(x)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Geometrisk tolkning av deriverbarheten i punkten a av en **envariabelfunktion** $y = f(x)$ är att värdena på grafen approximeras mycket bra med värdena på tangentlinjen. Se bilden på s. 47.

- **Ekvation för tangentlinjen** i punkten $(a, f(a))$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- **Linjärisering** i punkten $x = a + h$, alltså **närmevärdet** för $f(x)$ längs tangentlinjen:

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- $\Delta f = f(x) - f(a)$ beskriver den verkliga skillnaden mellan $f(x)$ och $f(a)$ för x nära a .
- **Differentialen** $df = f'(a)dx = f'(a)h$ beskriver den approximativa (linjära!) skillnaden mellan dessa värden.
- **Deriverbarheten** i punkten a innebär att **felet** vid linjärisering är riktigt liten:

$$\frac{\text{felet}}{h} = \frac{\Delta f - df}{h} \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad h \rightarrow 0.$$

Definition 18. Låt $\vec{a}$ vara en inre punkt i definitionsmängden D till en funktion f av n variabler. Vi säger att f är **differentierbar i punkten** $\vec{a}$ om det finns konstanter $A_1, \dots, A_n$ och en funktion $\rho(\vec{h})$ sådan att

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + \rho(\vec{h})|\vec{h}| \quad \text{där} \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \rho(\vec{h}) = 0.$$

Precis som konstanten framför h i det endimensionella fallet var derivatan $f'(a)$, så är konstanterna $A_1, \dots, A_n$ i det flerdimensionella fallet de partiella derivatorna av f . För att visa detta kan vi sätta $\vec{h} = t\vec{e}_j$ och får då

$$\frac{f(\vec{a} + t\vec{e}_j) - f(\vec{a})}{t} = \frac{A_j t}{t} + \rho(t\vec{e}_j) \frac{|t\vec{e}_j|}{t} \rightarrow A_j, \quad \text{då} \quad t \rightarrow 0.$$

Men enligt definitionen av partiell derivata är ovanstående gränsvärde lika med $f'_j(\vec{a})$. Alltså gäller:

Sats 7. *En differentierbar funktion är partiellt deriverbar och $A_j = f'_j(\vec{a})$, $j \in \{1, \dots, n\}$.*

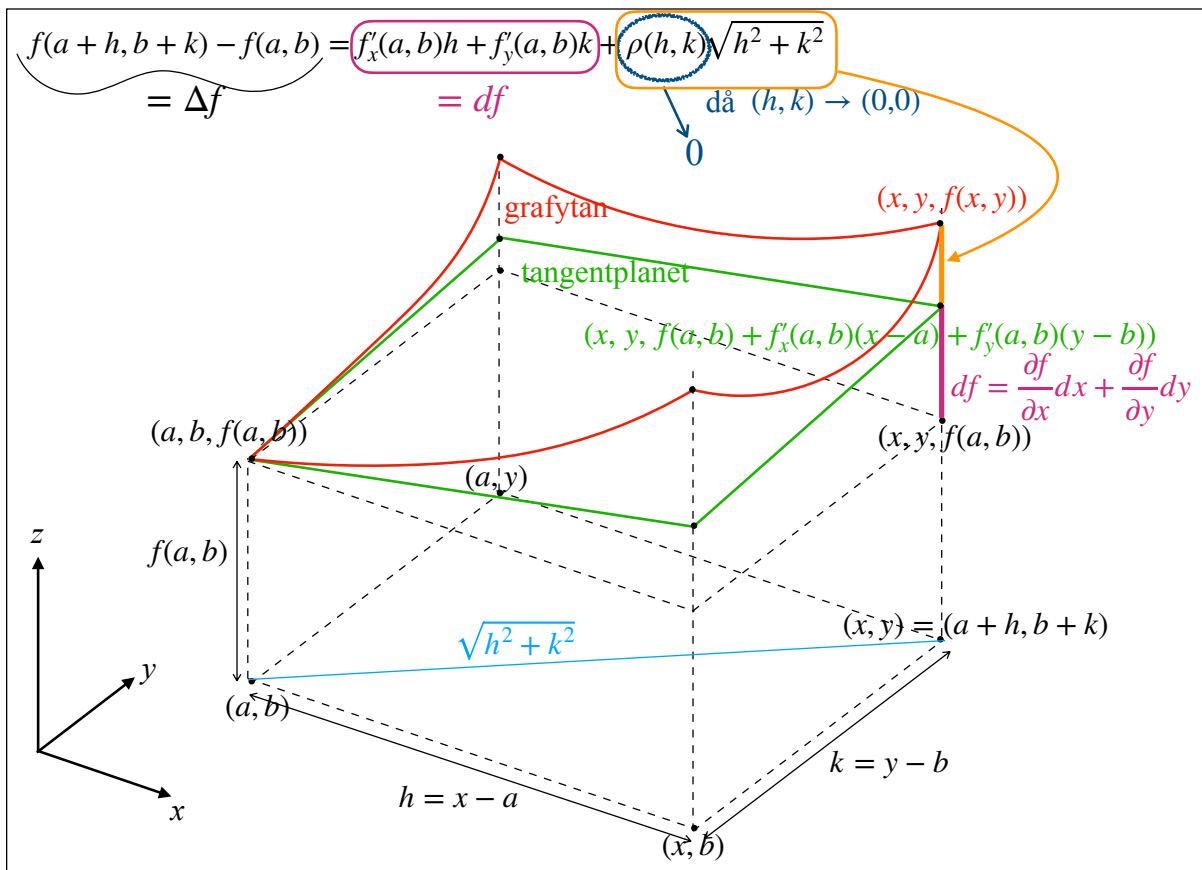
Sats 8. *En differentierbar funktion är kontinuerlig.*

Bevis.

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} (A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \rho(\vec{h})|\vec{h}|) = f(\vec{a})$$

□

Definitionen ovan var ganska abstrakt. Vi ska nu titta närmare på definitionen i fall tvåvariabel-funktioner där man fortfarande har tydliga geometriska tolkningar som står bakom definitionen.



Figur 23: Deriverbarhet av f i (a, b) . OBS: samma färger som i bilden för envariabelfunktionen! (Bild: Hania, med KeyNote.)

Geometrisk tolkning av deriverbarheten i punkten (a, b) av en **tvåvariabelfunktion** $z = f(x, y)$ är att värdena på grafytan approximeras mycket bra med värdena på tangentplanet. Se bilden ovan (färgkodering samma som till envariabel-fallet och som i tabellen nedan):

- **Ekvation för tangentplanet** i punkten $(a, b, f(a, b))$:

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

- **Linjärisering** i punkten $(x, y) = (a + h, b + k)$, alltså **närmevärdet** för $f(x, y)$ längs tangentplanet:

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

- Δf beskriver den verkliga skillnaden mellan $f(x, y)$ och $f(a, b)$ för (x, y) nära (a, b) .
- **Differentialen** $df = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$ beskriver den approximativa (linjära!) skillnaden mellan dessa värden.
- **Deriverbarheten** i punkten (a, b) innebär att felet vid linjärisering är riktigt liten:

$$\frac{\text{felet}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

Exempel 40. Visa från definitionen att $f(x, y) = x^2 + y^2$ är deriverbar i varje punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vi beräknar $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Låt oss ta en godtycklig punkt (x, y) och små h och k :

$$\Delta f = f(x + h, y + k) - f(x, y) = (x + h)^2 + (y + k)^2 - x^2 - y^2 = 2xh + 2yk + h^2 + k^2$$

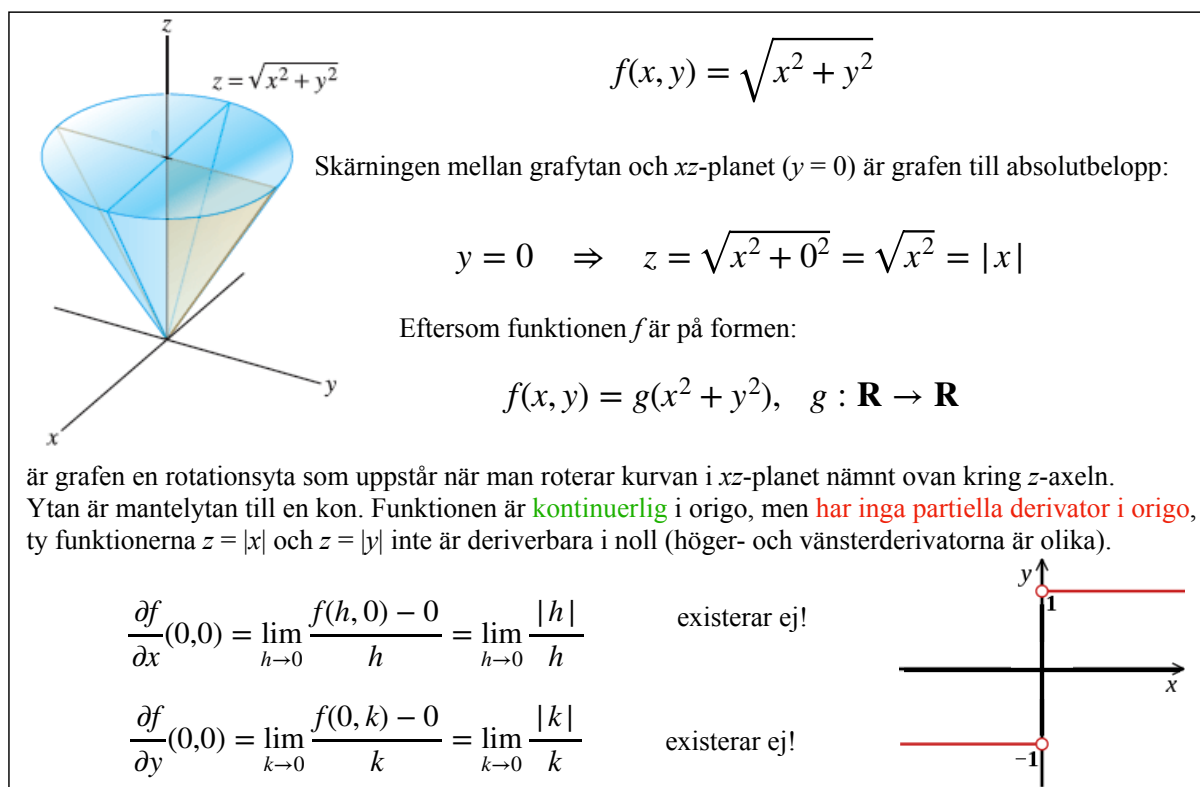
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k = 2xh + 2yk$$

$$\Delta f - df = (2xh + 2yk + h^2 + k^2) - (2xh + 2yk) = h^2 + k^2$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0,$$

vilket betyder att funktionen är deriverbar i punkten (x, y) .

Exempel 41. Här kommer ett exempel på en funktion som är kontinuerlig i origo, men har inga partiella derivator där. Detta är en 3D-motsvarighet till absolutbelopp-funktionen från envariabelanalys (kontinuerlig, men ej deriverbar i noll).



Figur 24: Funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ är kontinuerlig, men har inga partiella derivator i origo. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Exempel 42. Bestäm tangentplanet till paraboloiden $z = x^2 + 2y^2$ i punkten $(1, 1, 3)$.

Funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ är differentierbar (motivering i sista raderna av F5) och har partiella derivator $f'_1(x, y) = 2x$ samt $f'_2(x, y) = 4y$, vilket ger $f'_1(1, 1) = 2$ och $f'_2(1, 1) = 4$.

Tangentplanet har således ekvationen

$$z = 3 + 2(x - 1) + 4(y - 1) \Rightarrow 2x + 4y - z = 3$$

Exempel 43. Approximera skillnaden mellan $f(2, 1)$ och $f(2.01, 1.03)$ där $f(x, y) = \ln |x^2 + xy|$.

Den verkliga skillnaden är svår att beräkna och vi måste använda räknaren. Då får vi

$$\Delta f = f(2.01, 1.03) - f(2, 1) = \ln |(2.01)^2 + 2.01 \cdot 1.03| - \ln 6 \approx 0.0182.$$

Det är enklare att beräkna differentialen df i stället, eftersom vi då blir av med logaritmen och har bara polynom att hantera, och dessutom med heltals argument. Och vi vet ju att $\Delta f \approx df$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{2x + y}{x^2 + xy} dx + \frac{x}{x^2 + xy} dy.$$

Vi sätter $(x, y) = (2, 1)$ och $(dx, dy) = (0.01, 0.03)$. Då: $df = \frac{5}{6} \cdot 0.01 + \frac{2}{6} \cdot 0.03 = \frac{11}{6} \cdot 0.01 \approx 0.0183$.

Sammanfattning

Till slut sammanfattning av olika samband mellan begreppen deriverbarhet, partiell deriverbarhet och kontinuitet för tvåvariabelfunktioner. Titta också gärna på Travis playlist *Calculus 3*, Topic 12, minuter 30–40 samt studera grafiken på nästa sida.

En funktion $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt (a, b) om det finns konstanter $A_1 = f'_1(a, b)$, $A_2 = f'_2(a, b)$ och en funktion ρ sådan att

$$\underbrace{f(a + h, b + k) - f(a, b)}_{f(\vec{a} + \vec{h})} = \underbrace{f(a, b)}_{f(\vec{a})} + \underbrace{f'_1(a, b)h}_{A_1 h_1} + \underbrace{f'_2(a, b)k}_{A_2 h_2} + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k)}_{|\vec{h}| \rho(\vec{h})}$$

där $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \rho(h, k) = 0$. Låt nu $x = a + h$, $y = b + k$, så vi får följande uppskattning av $f(x, y)$:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b) + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k)$$

Tangentens motsvarighet i två dimensioner blir tangentplanet

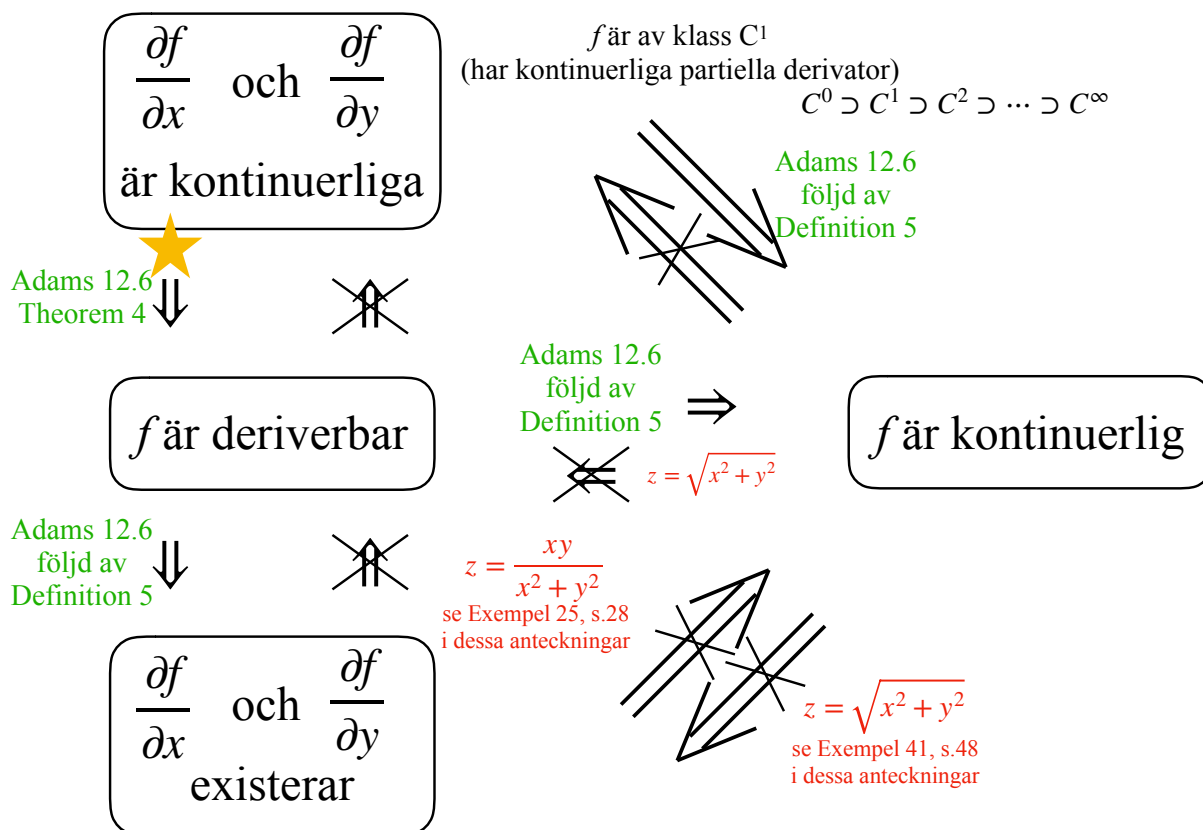
$$z = f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b).$$

Normalvektorn till ett plan med ekvation $ax + by + cz = d$ är ju (a, b, c) , så från tangentplanets ekvation $f'_1(a, b)x + f'_2(a, b)y - z = d$ inses att funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ har normalvektorn

$$\vec{n} = (f'_1(a, b), f'_2(a, b), -1).$$

Tangentplanet kan användas för att göra linjär approximation av en funktionsyta. Vi återkommer till detta senare när vi tar upp Taylorapproximationer av funktioner av flera variabler.

En differentierbar funktion var partiellt deriverbar och kontinuerlig. Följande sats ger tillräckliga villkor för att en funktion ska vara differentierbar.



Figur 25: Deriverbarhet, partiell deriverbarhet och kontinuitet för tvåvariabelfunktioner. Implikationen markerad med en guldstjärna är praktiskt användbar, som t.ex. i Travis Topic 12, minuter 39–44 (**Titta gärna!**). Det är enklare att visa att partiella derivator är kontinuerliga än att en funktion är deriverbar (jobbig definition). Och det är bra att veta att en funktion är deriverbar: då vet vi att vi kan approximera dennes värden m.h.a. differentialen. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Sats 9 (Adams 12.6.4). *Låt f vara en funktion av n variabler med öppen definitionsmängd D . Om f är partiellt deriverbar och de partiella derivatorna $f'_1, \dots, f'_n$ är kontinuerliga, så är f differentierbar på D .*

Bevis. Vi visar satsen för funktioner av två variabler och vill uppskatta

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}_{\text{def. } \alpha(t)=f(a+t, b+k)} + \underbrace{f(a, b+k) - f(a, b)}_{\text{def. } \beta(t)=f(a, b+t)}$$

Medelvärdessatsen för funktioner av en variabel ger:

$$\begin{aligned} \alpha(h) - \alpha(0) &= (h-0)\alpha'(\theta_1 h) = hf'_1(a + \theta_1 h, b+k) \\ \beta(k) - \beta(0) &= (k-0)\beta'(\theta_2 k) = kf'_2(a, b + \theta_2 k) \end{aligned}$$

för några $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. Eftersom f'_1 och f'_2 är kontinuerliga, så finns det funktioner $\rho_1(h, k)$ och $\rho_2(h, k)$ som uppfyller

$$f'_1(a + \theta_1 h, b+k) = f'_1(a, b) + \rho_1(h, k) \quad f'_2(a, b + \theta_2 k) = f'_2(a, b) + \rho_2(h, k)$$

där $\rho_1(h, k) \rightarrow 0$ och $\rho_2(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ Alltså får vi

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf'_1(a, b) + kf'_2(a, b) + \underbrace{h\rho_1(h, k) + k\rho_2(h, k)}_{=\sqrt{h^2+k^2}\rho(h, k)}$$

□

Observera att satsen implicerar att funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ i Exempel 42 är deriverbar, ty funktionerna $g(x, y) = 2x$ och $h(x, y) = 4y$ är kontinuerliga.

Rekommenderade uppgifter efter F5

12.6: 1, 3. **Extra uppgifter:** **12.6:** 11.

Föreläsning 6: Gradient, riktningsderivator

Adams 12.7

De partiella derivatorna säger var för sig hur en funktion av n variabler förändras längs en rät linje parallell med någon av koordinataxlarna. Vi vill kunna avgöra hur en funktion förändras längs en godtycklig rät linje, dvs. i en godtycklig riktning. Följande vektor visar sig då vara användbar. Vi definierade den redan i F4:

Definition 19. För partiellt deriverbara funktioner f av n variabler definierar vi *gradienten* av f i punkten $\vec{x}$ som

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) \quad (\text{betecknas även } \nabla f(\vec{x}))$$

Gradienten är ett vektorfält (en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$)

Exempel 44. Beräkna $\nabla f(\vec{x})$ för $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

De partiella derivatorna är:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{|\vec{x}|} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{|\vec{x}|} \end{aligned} \quad (\text{av symmetriskäl})$$

så gradienten blir:

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{x_1}{|\vec{x}|}, \frac{x_2}{|\vec{x}|} \right) = \frac{1}{|\vec{x}|}(x_1, x_2) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

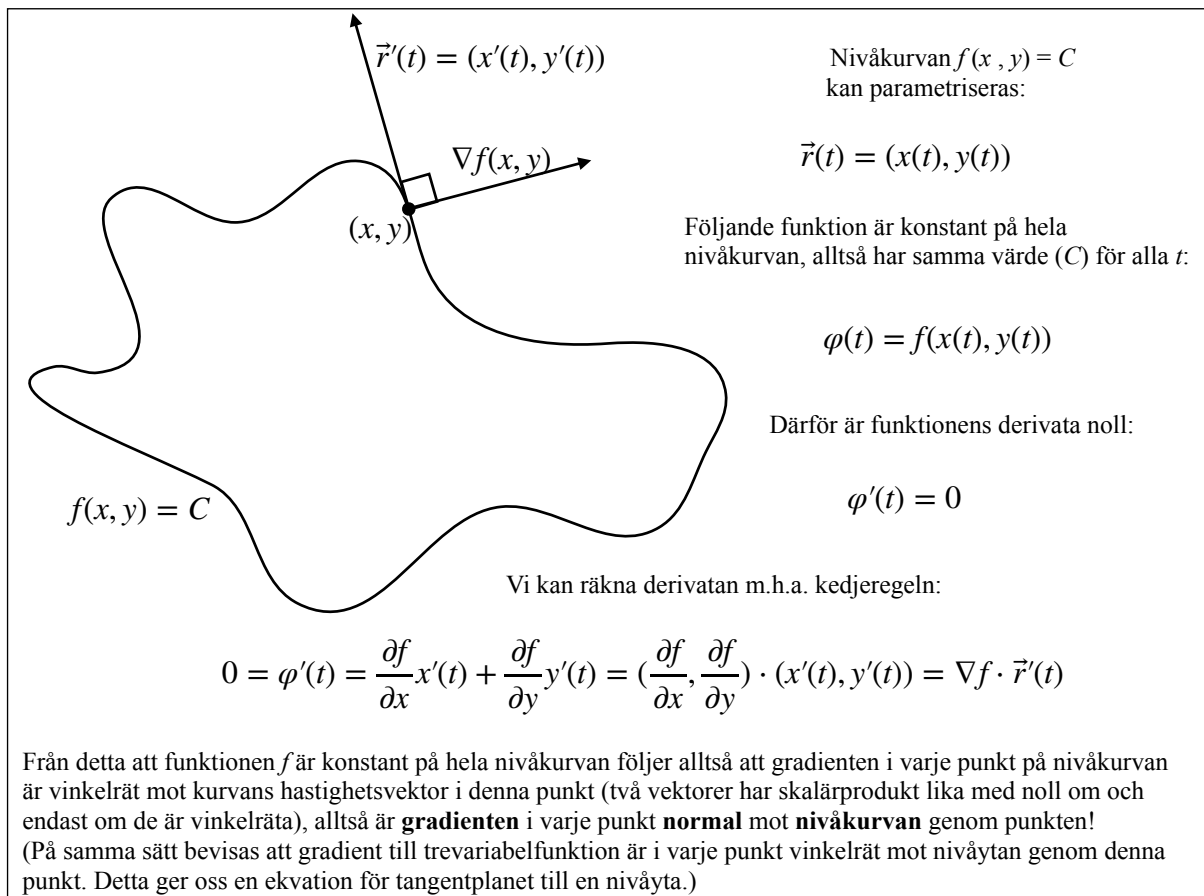
Nivåkurvorna till funktionen i exemplet är cirklar med centrum i origo. Gradienten till funktionen är alltså vinkelrät mot funktionens nivåkurvor. Detta gäller allmänt för funktioner av två variabler.

Sats 10 (Adams 12.7.6). *Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator. Om $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, så är $\nabla f(a, b)$ vinkelrät mot den nivåkurva till f som går genom (a, b) .*

Bevis. Låt $(x(t), y(t))$ vara en parametrisering av nivåkurvan till f som går genom (a, b) och antag att $x(0) = a$, $y(0) = b$. För alla t nära noll är alltså $f(x(t), y(t)) = f(a, b)$ (från definition av nivåkurvor är alla funktionsvärden längs dem samma, i det här fallet lika med $f(a, b)$). Kedjeregeln (samt detta att derivatan till en konstant funktion är lika med noll) ger

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f'_1(x(t), y(t))x'(t) + f'_2(x(t), y(t))y'(t) \\ \Rightarrow \quad \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Vektorn $(x'(t), y'(t))$ är en tangent till nivåkurvorna, så gradienten måste vara vinkelrät mot nivåkurvan. $\square$



Figur 26: En förklaring varför gradient i varje punkt i definitionsmängden till $f(x, y)$ är vinkelrät mot nivåkurvan genom denna punkt, och samma sak för gradienten och nivåytor till $g(x, y, z)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

På samma sätt kan man visa att gradienten till en funktion av tre variabler är vinkelrät mot funktionens nivåytor. Med ett liknande resonemang kan vi också visa att om gradienten av en funktion men n variabler är noll i ett område så är funktionen konstant på området (jämför att om derivatan av en funktion av en variabel är noll så är funktionen konstant). Låt D vara ett bågvis sammanhängande område och antag att $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ för alla $\vec{x} \in D$. Då finns det, för varje par av punkter $\vec{a}, \vec{b} \in D$, en deriverbar kurva $\vec{x}(t)$, sådan att $\vec{x}(0) = \vec{a}$ och $\vec{x}(1) = \vec{b}$. Därmed gäller:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) &= f'_1(\vec{x}(t))x'_1(t) + \dots + f'_n(\vec{x}(t))x'_n(t) \\ &= \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot (\vec{x}'_1(t), \dots, \vec{x}'_n(t)) = \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t) = 0 \end{aligned}$$

vilket implicerar:

1. $f(\vec{x})$ är konstant
2. $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in D$

Gradienten kan också användas för att bestämma hur en funktion förändras längs en godtycklig rät linje $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ (och inte bara längs koordinataxlarna). Vi antar att $|\vec{v}| = 1$, dvs att linjens

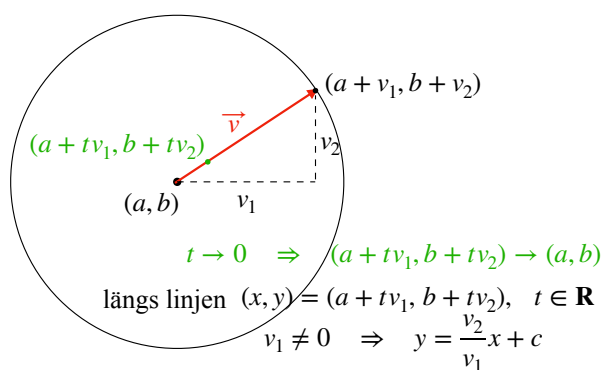
riktningsvektor är normerad.

Definition 20. Riktningssderivatan av funktionen f i punkten $\vec{a}$ i riktningen $\vec{v}$, $|\vec{v}| = 1$, definieras

$$D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} \quad (\vec{v} = \vec{e}_j \text{ ger } f'_j(\vec{a}))$$

Om f är en tvåvariabelfunktion (vilket oftast kommer att vara fallet för oss), då är riktningssvektorn $\vec{v} = (v_1, v_2)$ och definitionen ser ut på följande sätt:

$$D_{\vec{v}}f(a, b) = f'_{\vec{v}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}.$$



Figur 27: Illustration till riktningssderivata, vad händer i definitionsmängden. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Riktningssderivatan uttrycker lutningen för tangentlinjen i punkten $(a, b, f(a, b))$ till kurvan som skärs ut från funktionsgrafen $z = f(x, y)$ av det vertikala (d.v.s. parallella med z -axeln) planet genom punkten (a, b) och i riktning med vektorn $\vec{v}$.

Följande sats tillåter oss både beräkna riktningssderivator på ett enkelt sätt och göra några geometriska observationer om funktionens tillväxt i olika riktningar:

Sats 11 (Adams 12.7.7). *Om f är en differentierbar funktion och $\vec{v}$ s.a. $|\vec{v}| = 1$ en given riktning, så är*

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}.$$

Bevis. Sätt $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{v})$, så att φ beskriver f 's beteende längs linjen $\vec{a} + t\vec{v}$. Vi ser att

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0).$$

Samtidigt ger kedjeregeln:

$$\varphi'(t) = f'_1(\vec{a} + t\vec{v})v_1 + \dots + f'_n(\vec{a} + t\vec{v})v_n = \nabla f(\vec{a} + t\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

Ansätter vi $t = 0$ i ovanstående formel, så följer $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$, vilket skulle bevisas. □

Använder vi Cauchy-Schwarz⁷ olikhet på formeln för $f'_v(\vec{a})$, så får vi:

$$|f'_v(\vec{a})| = |\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}| \leq |\nabla f(\vec{a})| |\vec{v}| = |\nabla f(\vec{a})|$$

med likhet precis så $\vec{v}$ och $\nabla f(\vec{a})$ är riktade åt samma håll ($\cos 0 = 1$). Riktningsderivatan blir alltså som störst i gradientens riktning. Vi kan dra följande slutsatser:

- En funktion **växer snabbast** i riktningen $\nabla f(\vec{a})$ och tillväxten är i denna riktning $|\nabla f(\vec{a})|$.
- En funktion **avtar snabbast** i riktningen $-\nabla f(\vec{a})$ (då är $\alpha = \pi$ och $\cos \alpha = -1$) och avtagandet är i denna riktning $|\nabla f(\vec{a})|$.

Exempel 45. Låt

$$f(x, y) = \frac{3}{1 + x^2 + y^2}.$$

- I vilken riktning och med vilken fart växer $f(x, y)$ snabbast i punkten $(1, 1)$?
- Beräkna riktningsderivatan i punkten $(1, 1)$ i riktning med vektorn $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$.
- Bestäm ekvationer för tangent- och normallinjerna till nivåkurvan $f(x, y) = 1$ i punkten $(1, 1)$.
- Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 1)$.

Lösning:

Man måste förstås börja med att beräkna gradienten, eftersom den behövs till alla deluppgifterna! Observera att funktionen är sammansatt som i **Version 2** i Föreläsning 4:

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{6x}{(1 + x^2 + y^2)^2}, -\frac{6y}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{6x}{(1 + x^2 + y^2)^2} \cdot (-x, -y).$$

- Snabbaste tillväxt sker i riktning med gradienten $\nabla f(1, 1)$, alltså $\frac{6}{9}(-1, -1) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. Farten är lika med längden på gradientvektorn, alltså

$$|\nabla f(1, 1)| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

- Först måste man normera riktningen: $|(1, \sqrt{3})| = \sqrt{1 + 3} = 2$. Riktningen $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Riktningsderivatan:

$$D_{\vec{u}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \vec{u} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{3}.$$

- Normallinjens** riktningsvektor är gradienten i punkten (eller en godtycklig skalning av denne, som t.ex. $(1, 1)$), alltså normallinjen har en parameterekvation:

$$(x, y) = (1, 1) + t(1, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

⁷Eller, i $\mathbb{R}^2$, formeln $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$; vi har ju $|\cos \alpha| \leq 1$ för alla värden på α . Riktningsvektorns längd är lika med 1, per definition.

eller, i xy -planet: $y = x$.

Tangentlinjen är vinkelrät mot normallinjen, alltså dennes riktningsvektor är en godtycklig vektor vinkelrät mot $(1, 1)$, t.ex. $(1, -1)$ och därmed en parameterekvation:

$$(x, y) = (1, 1) + t(1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

För att omvandla denna ekvation till (k, m) -ekvationen i xy -planet, löser vi ut t koordinatsvis och jämför värdena: $x = 1 + t$ och $y = 1 - t$ ger $x - 1 = 1 - y$, alltså har tangentlinjen (k, m) -ekvationen i xy -planet: $y = -x + 2$. Observera att den verkligen är vinkelrät mot linjen $y = x$ i xy -planet.

d) Tangentplanets ekvation är $z = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1)$, alltså

$$z = 1 + \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot (x - 1, y - 1)$$

OBS: Ekvationen till tangentplanet till $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

kan skrivas kort m.h.a. gradienten och skalärprodukt:

$$z = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b).$$

alltså $z = 1 - \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{2}{3}(y - 1)$. Multiplikation av båda leden med 3 och lite omorganisering ger följande ekvation för tangentplanet till grafytan i punkten $(1, 1, 1)$:

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Exempel 46. Antag att funktionen $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$ beskriver temperaturen i ett område i rummet. Antag att vi befinner oss i punkten $(1, 1, 1)$. Hur förändras temperaturen då i riktningen $(1, 1, 1)$? I vilken riktning förändras temperaturen snabbast och hur stor är temperaturförändringen i denna riktning?

Vi deriverar funktionen partiellt för att bestämma gradienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2(-(x^2 + y^2)^{-2})2x = -\frac{2xz^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2yz^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 1, 1) = \left(-\frac{2 \cdot 1 \cdot 1^2}{(1^2 + 1^2)^2}, -\frac{2 \cdot 1 \cdot 1^2}{(1^2 + 1^2)^2}, \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1^2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Vektorn $(1, 1, 1)$ normeras till $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Riktningensderivatan i denna riktning är

$$\begin{aligned} f'_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}(1, 1, 1) &= \nabla f(1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

så temperaturen förändras ej i denna riktning. Den maximala temperaturförändringen sker i gradientens riktning, dvs. i riktningen $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Storleken av denna tillväxt är

$$|\nabla f(1, 1, 1)| = \left| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Läs i kursboken om relationen mellan gradienten och tangentplan.

Exempel 47. Bestäm en standardekvation för tangentplanet till nivåytan till $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ genom punkten $(1, 3, 4)$.

Gradienten i punkten är normal till nivåytan (**kedjeregeln!** plus att f är **konstant** på nivåytan), alltså är tangentplanets ekvation:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, 4)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3, 4)(y - 3) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, 4)(z - 4).$$

De partiella derivatorna⁸:

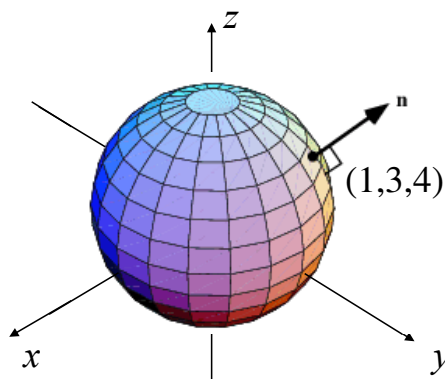
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z,$$

alltså

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, 4) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3, 4) = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, 4) = 8,$$

vilket ger tangentplanets ekvation

$$2(x - 1) + 6(y - 3) + 8(z - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 6y + 8z - 52 = 0.$$



Figur 28: Tangentplan till nivåytan till $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ genom punkten $(1, 3, 4)$, alltså N_{26} . Nivåytan är sfären med mittpunkten i origo och med radien $\sqrt{26}$ och normalvektorn till ytan är lika med gradienten $\nabla f(1, 3, 4) = (2, 6, 8)$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Rekommenderade uppgifter efter F6

12.7: 1, 5, 7, 17, 19. **Extra uppgifter:** 12.7: 18, 31.

⁸Mycket viktigt! Alla normalvektorer till sfärer med mittpunkten i origo är **skalningar av Ortsvektorn** med slutpunkten där normalen ställs upp! Här $\vec{n} = (2, 6, 8) = 2(1, 3, 4)$.

Föreläsning 7: Implicita funktionssatsen mm

Adams 12.8, 12.9

Jacobianen

Vi påminner en definition för **Jacobianen** (**Jacobimatrisen**, **funktionalmatrisen**) som vi introducerade i F4. För en vektorvärd funktion $\vec{y} = f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{är Jacobimatrisen } D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen är alltså en $m \times n$ -matris där j :te raden i $D\vec{f}(\vec{x})$ är $\nabla f_j(\vec{x})$.

Exempel 48. Bestäm Jacobimatrisen till avbildningen $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

Eftersom

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \end{aligned} \quad \text{får vi Jacobimatrisen } \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Betrakta nu en funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (som i ovanstående exempel). För linjära avbildningar $\vec{y} = A\vec{x}$ vet vi från den linjära algebran att viktiga egenskaper hos avbildningen kan härledas från determinanten av matrisen A . Vi ska nu se att determinanten av Jacobimatrisen kan ge viktig information om de *lokala* egenskaperna hos en funktion $\vec{f}$. Låt för enkelhetens skull $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pondera en rektangel vars hörn ligger i

$$(a_1, a_2), \quad (a_1 + h_1, a_2), \quad (a_1, a_2 + h_2) \quad \text{och} \quad (a_1 + h_1, a_2 + h_2).$$

Arean som innesluts av denna rektangel är $h_1 h_2$. f ordnar rektangelns hörn enligt följande:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) \\ f_2(a_1, a_2) \end{pmatrix} \\ (a_1 + h_1, a_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1 + h_1, a_2) \\ f_2(a_1 + h_1, a_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 \\ f_2(a_1, a_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 \end{pmatrix} \\ (a_1, a_2 + h_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2 + h_2) \\ f_2(a_1, a_2 + h_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 \\ f_2(a_1, a_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 \end{pmatrix} \\ \text{Area} &\approx \begin{vmatrix} h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = h_1 h_2 \left| D\vec{f}(\vec{x}) \right| \end{aligned}$$

så areaförändringen av en avbildning är $\det(D\vec{f}(\vec{x}))$. Jämför med $\det(A)$ för den linjära avbildningen $\vec{y} = A\vec{x}$ som avbildar basvektorer $(1, 0)$ och $(0, 1)$ på vektorerna (a, c) och (b, d) :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

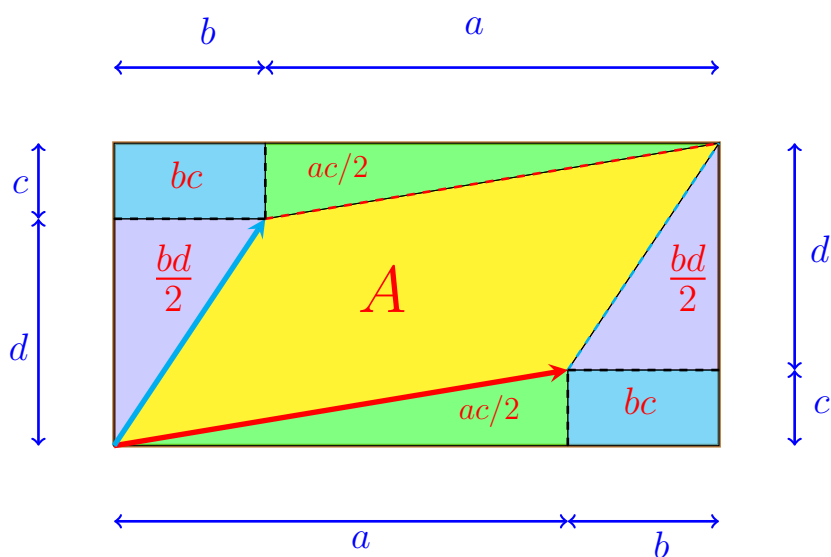
Till slut en förklaring på grundskolenivå varför determinanten med kolonner $[a, c]$ och $[b, d]$ beräknar arean för den (gula i bilden nedan) parallelogrammen uppspända på vektorerna (a, c) och (b, d) . Bilden inspirerades av 3BLUE1BROWN (8:42 min).

<https://youtu.be/Ip3X9L0h2dk>

Den röda vektorn i bilden har koordinater (a, c) och den blåa (b, d) . Arean A till den gula parallelogrammen som spänns upp på vektorerna beräknas m.h.a. areor av rektanglar och rätvinkliga trianglar i bilden:

$$\begin{aligned} A &= (a+b)(c+d) - (2 \cdot bc + 2 \cdot \frac{bd}{2} + 2 \cdot \frac{ac}{2}) = \\ &= ac + ad + bc + bd - 2bc - bd - ac = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Arean är lika med determinanten till matrisen med vektorerna som kolonner!



En mycket teoretisk text om ämnet (överkurs)

Vi såg att gradienten spelar samma roll för funktioner av flera variabler som derivatan för funktioner av en variabel. Motsvarande roll för en vektorvärd funktion $\vec{y} = f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ spelar Jacobimatrisen som är en $m \times n$ -matris där j :te raden i $D\vec{f}(\vec{x})$ är $\nabla f_j(\vec{x})$.

Med hjälp av Jacobimatrisen kan kedjeregeln för en sammansatt funktion uttryckas med hjälp

an en matrismultiplikation. Låt $\vec{x} = \vec{g}(\vec{t}) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, och $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, så

$$D\vec{g}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_q} \end{pmatrix}, \quad D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t}) = \underbrace{D\vec{f}(\vec{g}(\vec{t}))D\vec{g}(\vec{t})}_{\text{Matrismultiplikation}}$$

$(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t})$ är en funktion från $\mathbb{R}^q$ till $\mathbb{R}^m$. Enligt kedjeregeln är $\frac{\partial}{\partial t_j}(\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t})$

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_k} \frac{\partial g_k(\vec{t})}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_1} \frac{\partial g_1(\vec{t})}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_n} \frac{\partial g_n(\vec{t})}{\partial t_j}$$

och detta är precis resultatet på rad i och kolonn j i matrismultiplikationen ovan ($i = 1, \dots, m$ och $j = 1, \dots, q$, ty produkten av en $m \times n$ -matris och en $n \times q$ -matris är en $m \times q$ -matris).

Definition 21. Determinanten av Jacobimatrisen för en funktion $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas **Jacobianen** av $\vec{f}$ och betecknas $\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ eller ibland bara $J(\vec{x})$.

En linjär avbildning $\vec{y} = A\vec{x}$ är inverterbar om determinanten av matrisen A är nollskild. På liknande sätt gäller följande lokala sats för funktioner.

Sats 12. Inversa funktionssatsen. Låt $\vec{f} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till punkten $\vec{a} \in D(\vec{f})$. Om $J(\vec{a}) \neq 0$, så finns öppna omgivningar U och V till $\vec{a}$ respektive $\vec{f}(\vec{a})$ så att funktionen $\vec{f}(\vec{x})$ är inverterbar på U och inversen $\vec{f}^{-1}(\vec{x})$ har kontinuerliga partiella derivator på V .

Inversa funktionssatsen säkerställer bara att inversen existerar lokalt, även om Jacobianen är nollskild på hela definitionsmängden.

Exempel 49. För avbildningen $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ som vi för tillfället definierar på $0 < r < 1$, $0 < \theta < \frac{5\pi}{2}$, så gäller:

$$\begin{aligned} J(\vec{x}) &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta - \sin \theta(-r \sin \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \\ &= r \neq 0 \end{aligned}$$

på hela definitionsmängden (utom i origo med $r = 0$). Inversa funktionssatsen säkerställer existens av en lokal invers, men ingen global invers eftersom $(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi)$.

Observera att identitetsavbildningen har enhetsmatrisen som Jacobimatrix och därmed Jacobian 1. Alltså gäller:

$$1 = \det(D(\vec{f}^{-1} \circ \vec{f})(\vec{x})) \overset{\text{kedjeregeln}}{=} \det(D\vec{f}^{-1}(\vec{y})D\vec{f}(\vec{x})) \overset{\text{produktregeln för determinanter}}{=} (\det D\vec{f}^{-1}(\vec{y}))(\det D\vec{f}(\vec{x}))$$

så inversens Jacobian är det inverterade värdet av funktionens Jacobian.

Vi såg i kursen envariabelanalys att det finns funktioner $F(x, y) = 0$ för vilka vi inte explicit kan lösa ut y som en funktion av x . Ett exempel på detta är $x^2 + y^2 = 1$. För de flesta punkter (x, y) på kurvan kan vi dock lösa ut y som funktion av x *lokalt*. För alla punkter på kurvan som uppfyller $y > 0$ gäller ju $y = \sqrt{1 - x^2}$ i en omgivning av punkten och för alla punkter som uppfyller $y < 0$ gäller $y = -\sqrt{1 - x^2}$ i en omgivning. I punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 0)$ kan vi inte ens lokalt skriva y som funktion av x eftersom kurvan här är helt lodrät (dock kan vi skriva x som funktion av y). Gemensamt för båda dessa punkter är att $F'_2(a, b) = 2b = 0$ i dessa punkter. Vi har därmed resonerat oss fram till ett specialfall av implicita funktionssatsen.

Sats 13. Implicita funktionssatsen. *Betrakta följande ekvationssystem*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \quad \text{och en punkt } P = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \text{ som uppfyller} \\ \text{ekvationssystemet. Antag att funktionerna } F_i \text{ har konti-} \\ \text{nuerliga partiella derivator nära } P \text{ och antag vidare att} \\ \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \text{ är nollskild i punkten } P.$$

Då kan vi lösa ut $y_1, \dots, y_n$ som funktioner av $x_1, \dots, x_m$, dvs. $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_m)$ i en omgivning till punkten $(b_1, \dots, b_n)$.

Exempel 50. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} \sin(x + y) + \sin(y + z) + z = 0 \\ \cos(x + y) + \cos(y + z) + y - 2 = 0 \end{cases}$ med två ekvationer och tre variabler. Systemet satisfieras av punkten $(0, 0, 0)$. Kan x och y lösas ut explicit som funktion av z ?

Enligt Implicita funktionssatsen bör vi undersöka Jacobianen $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$ i $(0, 0, 0)$ och beräknar därför de partiella derivatorna för funktioner

$$F(x, y, z) = \sin(x + y) + \sin(y + z) + z \quad \text{och} \quad G(x, y, z) = \cos(x + y) + \cos(y + z) + y - 2:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \cos(x + y), & \frac{\partial F}{\partial y} &= \cos(x + y) + \cos(y + z), \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= -\sin(x + y), & \frac{\partial G}{\partial y} &= -\sin(x + y) - \sin(y + z) + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Det finns alltså funktioner f_1 och f_2 sådana att $x = f_1(z)$ och $y = f_2(z)$ i en omgivning av punkten $(x, y) = (0, 0)$. OBS: geometriskt motsvarar detta att skärningsmängden till två ytor som beskrivs med ekvationerna $F(x, y, z) = 0$ och $G(x, y, z) = 0$ i omgivningen av punkten $(0, 0, 0)$ är en kurva som kan parametreras med variabeln z .

För att bestämma derivatorna av funktionerna f_1 och f_2 kan vi derivera ekvationssystemet implicit (tänk $x = x(z)$ och $y = y(z)$) med avseende på z :

$$\begin{cases} \cos(x+y) \left(\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} \right) + \cos(y+z) \left(\frac{dy}{dz} + 1 \right) + 1 = 0 \\ -\sin(x+y) \left(\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} \right) - \sin(y+z) \left(\frac{dy}{dz} + 1 \right) + \frac{dy}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$x = y = z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dz} + 2\frac{dy}{dz} + 2 = 0 \\ \frac{dy}{dz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dz} = -2 \\ \frac{dy}{dz} = 0 \end{cases}$$

Vi hade lika gärna kunnat lösa ut x och z som funktion av y .

En mycket praktisk text om ämnet (ingår i kursen)

Eftersom den Implicita Funktionssatsen ser väldigt abstrakt ut, kommer jag att beskriva de mest använda varianterna av satsen, med konkreta formler och en geometrisk tolkning, och med en motivering. Det räcker att läsa bara denna delen om man inte vill fördjupa sig i den generella teorin. Vi kan börja med följande tabell:

Anders Holst, Matematikcentrum

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Funktioner mellan olika rum (en, två, tre dimensioner) illustreras grafiskt på väldigt olika sätt. Som en sammanfattning för att få överblick kan du använda tabellen nedan. Fyll gärna i tabellen med en rad motsvarande något tillämpat exempel.

<http://www.maths.lth.se/matematiklth/personal/ah/flerdim09.html>

Funktion från, till	Graf	Definitionsmängd	ett Funktionsvärde är	Värdemängd	Vanlig illustration
$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$	Funktionskurva i $\mathbb{R}^2$	Intervall eller annan delmängd av $\mathbb{R}$ (eller hela $\mathbb{R}$)	Reellt tal	Intervall eller annan delmängd av $\mathbb{R}$	Grafen, dvs kurva
$\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$	Funktionsyta i $\mathbb{R}^3$	Delmängd av $\mathbb{R}^2$, t ex inre av cirkelskiva, rektangel eller hela planet	Reellt tal	Intervall eller annan delmängd av $\mathbb{R}$	Alt 1: Grafen, dvs yta Alt 2: Nivåkurvor i $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$	Tredimensionell "hyperyta" i $\mathbb{R}^4$	Delmängd av $\mathbb{R}^3$ (eller hela $\mathbb{R}^3$)	Reellt tal	Intervall eller annan delmängd av $\mathbb{R}$	Nivåtor i $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$	kurva i $\mathbb{R}^3$	Intervall eller annan delmängd av $\mathbb{R}$ (eller hela $\mathbb{R}$)	Punkt (eller vektor) i $\mathbb{R}^2$	Kurva i $\mathbb{R}^2$	Värdemängden, dvs kurva i $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$	"Hyperkurva" i $\mathbb{R}^4$	Intervall eller annan delmängd av $\mathbb{R}$ (eller hela $\mathbb{R}$)	Punkt (eller vektor) i $\mathbb{R}^3$	Kurva i $\mathbb{R}^3$	Värdemängden, dvs kurva i $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$	Delmängd av $\mathbb{R}^4$	Delmängd av $\mathbb{R}^2$ (eller hela $\mathbb{R}^2$)	Vektor (eller punkt) i $\mathbb{R}^2$	Delmängd av $\mathbb{R}^2$	Som karta över def-området med pilar utsatta i olika punkter. Tänk på vindangivelser på väderkarta

Figur 29: Hur man kan visualisera olika sorters funktioner. Beskrivningen kommer från Anders Holst (länken i bilden).

Viktiga begrepp och procedurer för dagens teori:

- **oberoende** och **beroende** variabler,
- samband mellan variabler: **explicit** (där en eller flera variabel är uttryckt eller uttryckta som en funktion av en eller flera variabler) versus **implicit** (där variablerna hänger ihop m.h.a. en ekvation, t.ex. $x^2 + y^2 + 3 \sin z = 5$),
- **implicit derivering**,
- **kedjeregler** (olika varianter),
- lösningsmetoder för linjära ekvationssystem.

I delen **Fallbeskrivning** visar jag den geometriska tolkningen för varje variant av satsen. I delen **Derivatan och villkoret** skriver jag formlerna (satsens tes). I delen **Motivering m.h.a. implicit derivering och kedjeregeln** visar jag hur man härleder formlerna ovan och under vilka villkor dessa gäller. I delen **Satsens antaganden och tes** formulerar jag hela satsen, och sedan kommer det ett konkret exempel.

Variant 1

- * **Fallbeskrivning:** Vi har **två** variabler (x och y) och **en** ekvation $F(x, y) = 0$ där F är kontinuerligt deriverbar. Sambandet mellan variablerna är **implicit**. Lösningsmängden till ekvationen vanligtvis beskriver en **kurva** i $\mathbb{R}^2$. Man kan se på den som på en **nivåkurva** till en tvåvariabelfunktion av klass C^1 , alltså $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Frågan är kring vilka punkter (x_0, y_0) på kurvan vi har ett **explicit** samband, alltså kan y lösas ut som en funktion av x (eller tvärt om, men här kör vi bara på ett sätt), d.v.s. $y = y(x)$. Här blir det en vanlig **envariabelfunktion** med oberoende variabeln x och beroende variabeln y .
- * **Derivatan och villkoret:** Villkoret är att uttrycket i nämnaren måste vara nollskild i en viss omgivning av punkten vi undersöker:

$$y = y(x), \quad y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Derivatan här är en vanlig envariabelderivata.

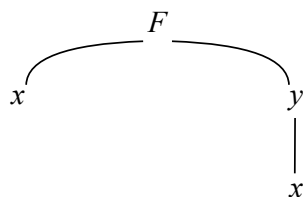
- * **Motivering m.h.a. implicit derivering och kedjeregeln:** Låt oss anta att man kan lösa ut y som en funktion av x i en viss omgivning av en punkt på kurvan. Vi har alltså $y = y(x)$ och i en viss omgivning av punkten

$$F(x, y(x)) = 0.$$

Vi har bara en oberoende variabel här, x , och därmed har vi en envariabelfunktion som är konstant i en viss omgivning av den undersökta punkten. Derivatan till den konstanta funktionen är lika med 0. Vi tillämpar nu implicit derivering och kedjeregeln:

$$0 = \frac{d}{dx}(F(x, y(x))) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \cdot y'(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

förutsatt att $F_y(x, y) \neq 0$ och $F(x, y(x)) = 0$.



Figur 30: Kedjeregeln för Variant 1. (Bild: Hania, med KeyNote.)

- * **Satsens antaganden och tes:** Vad den första varianten av den Implicita funktions-satsen säger är att om $F(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator, $F(x_0, y_0) = 0$ och dessutom $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, då finns det en viss omgivning av punkten (x_0, y_0) och kontinuerligt deriverbar funktion $y = y(x)$ sådan att $y(x_0) = y_0$ och $F(x, y(x)) = 0$ i omgivningen. Derivatn till denna funktion beräknas med formeln:

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

- * **Ett exempel:** Ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ ger ett explicit samband $y = y(x)$ i varje öppen omgivning som inte innehåller punkten $(-1, 0)$ eller $(1, 0)$. Detta inser man också utan teorier, eftersom man känner igen kurvan som enhetscirkeln och bågarne kan uttryckas som $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (den övre halvcirkeln) eller $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (den nedre).

Variant 2

- * **Fallbeskrivning:** Vi har **tre** variabler (x , y och z) och **en** ekvation $F(x, y, z) = 0$ där F är kontinuerligt deriverbar. Sambandet mellan variablerna är **implicit**. Lösningssmängden till ekvationen vanligtvis beskriver en **yta** i $\mathbb{R}^3$. Man kan se på den som på en **nivåyta** till en trevariabelfunktion av klass C^1 , alltså $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Frågan är kring vilka punkter (x_0, y_0, z_0) på ytan vi har ett **explicit** samband, alltså kan z lösas ut som en funktion av x och y (eller $y = y(x, z)$ eller $x = x(y, z)$, men här kör vi bara på ett sätt), d.v.s. $z = z(x, y)$. Här blir det en vanlig **tvåvariabelfunktion** med oberoende variablerna x och y och beroende variabeln z .
- * **Derivatn och villkoret:** Villkoret är att uttrycket i nämnaren måste vara nollskild i en viss omgivning av punkten vi undersöker:

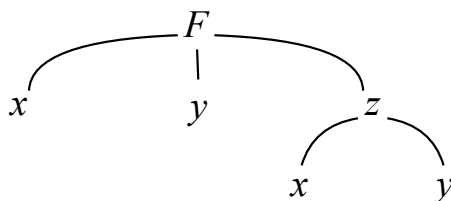
$$z = z(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

Här har vi två partiella derivator, eftersom vi har en tvåvariabelfunktion.

- * **Motivering m.h.a. implicit derivering och kedjeregeln:** Låt oss anta att man kan lösa ut z som en funktion av x och y i en viss omgivning av en punkt på ytan. Vi har alltså $z = z(x, y)$ och i en viss omgivning av punkten

$$F(x, y, z(x, y)) = 0.$$

Vi har två oberoende variabler här, x och y , och därmed har vi en tvåvariabelfunktion som är konstant i en viss omgivning av den undersökta punkten. Gradienten till den konstanta funktionen är lika med $\vec{0}$. Vi tillämpar nu implicit derivering och kedjeregeln (tänk här att $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$ och $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, eftersom x och y är två oberoende variabler):



Figur 31: Kedjeregeln för Variant 2. (Bild: Hania, med KeyNote.)

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(F(x, y, z(x, y))) = F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z) \cdot z_x \quad \Rightarrow \quad z_x = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}(F(x, y, z(x, y))) = F_y(x, y, z) + F_z(x, y, z) \cdot z_y \quad \Rightarrow \quad z_y = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},$$

förutsatt att $F_z(x, y, z) \neq 0$ och $F(x, y, z(x, y)) = 0$.

- * **Satsens antaganden och tes:** Vad den andra varianten av den Implicita funktionssatsen säger är att om $F(x, y, z)$ har kontinuerliga partiella derivator, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ och dessutom

$$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

då finns det en viss omgivning av punkten (x_0, y_0, z_0) och en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x, y)$ sådan att $z(x_0, y_0) = z_0$ och $F(x, y, z(x, y)) = 0$ i omgivningen. De partiella derivatorna z_x och z_y till denna funktion beräknas med formlerna:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

- * **Ett exempel:** Visa att ekvationen $x^3 - xyz^2 + z^3 + 3 = 0$ för (x, y, z) i en omgivning av punkten $(1, -1, -2)$ definierar z som en C^∞ -funktion (oändligt många gånger deriverbar) $z = z(x, y)$ av variabler x och y , sådan att $z(1, -1) = -2$. Beräkna även $\nabla z(1, -1)$.

Lösning: Låt $F(x, y, z) = x^3 - xyz^2 + z^3 + 3$. Vi har då $F(1, -1, -2) = 0$. Partiella derivatorna:

$$F_x = 3x^2 - yz^2, \quad F_y = -xz^2, \quad F_z = -2xyz + 3z^2.$$

Eftersom $F_z(1, -1, -2) = -2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)^2 = 8 \neq 0$ och $F(x, y, z)$ är C^∞ (ett polynom har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar), följer existensen av $z = z(x, y)$ i en omgivning av punkten $(1, -1, -2)$ ur implicita funktionssatsen. Satsen ger också värden på de partiella derivatorna av z i punkten $(1, -1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = -\frac{F_x(1, -1, -2)}{F_z(1, -1, -2)} = -\frac{7}{8}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = -\frac{F_y(1, -1, -2)}{F_z(1, -1, -2)} = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2},$$

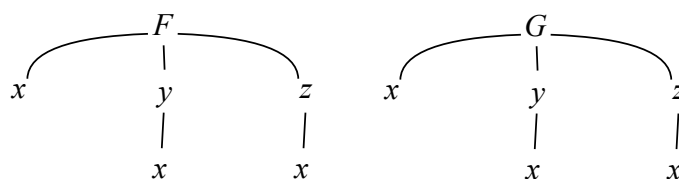
alltså är gradienten $\nabla z(1, -1) = (-\frac{7}{8}, \frac{1}{2})$.

Variant 3

- * **Fallbeskrivning:** Vi har **tre** variabler (x , y och z) och **två** ekvationer $F(x, y, z) = 0$ och $G(x, y, z) = 0$, där F och G är kontinuerligt deriverbara. Sambandet mellan variablerna är **implicit**. Lösningsmängden till ekvationssystemet:
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{vanligtvis beskriver}$$
 en **kurva** i $\mathbb{R}^3$. Man kan se på den som på **skärningskurvan** till nivåytor till två trevariabelfunktioner av klass C^1 , alltså $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Frågan är kring vilka punkter (x_0, y_0, z_0) på kurvan vi har ett **explicit** samband, alltså kan kurvan parametreras med variabeln x (eller y eller z , men här kör vi bara på ett sätt⁹), d.v.s. $\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Här blir det en **vektorvärd funktion** med oberoende variabeln x och beroende variablerna y och z .
- * **Derivatan och villkoret:** Villkoret är att uttrycket i nämnaren måste vara nollskild i en viss omgivning av punkten vi undersöker:

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad y'(x) = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}, \quad z'(x) = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad \text{där} \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

etc är Jacobiandeterminanter. Här har vi två envariabelderivator, eftersom komponenterna av en vektorvärd funktion är envariabelfunktioner (och deriveringen sker komponentsvis).



Figur 32: Kedjeregeln för Variant 3. (Bild: Hania, med KeyNote.)

- * **Motivering m.h.a. implicit derivering och kedjeregeln:** Låt oss anta att man kan lösa ut y och z som funktioner av x i en viss omgivning av en punkt på kurvan. Vi har alltså $y = y(x)$, $z = z(x)$ och i en viss omgivning av punkten

$$F(x, y(x), z(x)) = 0, \quad G(x, y(x), z(x)) = 0.$$

Vi har en oberoende variabel här, x , och därmed har vi två envariabelfunktioner som är konstanta i en viss omgivning av den undersökta punkten. Derivatorna till de konstanta funktionerna är lika med 0. Vi tillämpar nu implicit derivering och kedjeregeln enligt diagrammet i bilden (tänk att de yttre derivator är partiella och de inre vanliga!):

$$\begin{cases} 0 = F_x(x, y(x), z(x)) + F_y(x, y(x), z(x)) \cdot y'(x) + F_z(x, y(x), z(x)) \cdot z'(x) \\ 0 = G_x(x, y(x), z(x)) + G_y(x, y(x), z(x)) \cdot y'(x) + G_z(x, y(x), z(x)) \cdot z'(x) \end{cases}$$

förutsatt att det går att lösa ekvationssystemet och att $F(x, y(x), z(x)) = 0$ och $G(x, y(x), z(x)) = 0$. Observera att ekvationssystemet är ett 2×2 -system med obekanta

⁹Se Exempel 50 där vi i stället parametrerar sådan skärningskurva med variabeln z .

$y'(x)$ och $z'(x)$. Ekvationssystemet kan skrivas på matrisform som:

$$\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_x \\ G_x \end{bmatrix}.$$

Lösningen till detta ekvationssystemet ges generellt¹⁰ av (tänk: invers matris! I formeln tar man förstas invers av determinanten; förutsättningen för inverterbarheten är nollskild determinant.):

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_x \\ G_x \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_z & -F_z \\ -G_y & F_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ G_x \end{bmatrix}.$$

Tar vi detta komponentsvis (matrismultiplikation!), då får vi:

$$y'(x) = - \frac{G_z F_x - F_z G_x}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}, \quad z'(x) = - \frac{F_y G_x - F_x G_y}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

- * **Satsens antaganden och tes:** Vad den tredje varianten av den Implicita funktions-satsen säger är att om $F(x, y, z)$ och $G(x, y, z)$ har kontinuerliga partiella derivator, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ och $G(x_0, y_0, z_0) = 0$ och dessutom

$$\left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0,$$

då finns det en viss omgivning av punkten (x_0, y_0, z_0) och kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$ och $z = z(x)$ sådana att $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ och $F(x, y(x), z(x)) = 0$ och $G(x, y(x), z(x)) = 0$ i omgivningen. Derivatorna till dessa två funktioner beräknas med formlerna:

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}, \quad z'(x) = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

- * **Ett exempel:** Exempel 50.

Dessa tre varianter förekommer ibland i tentauppgifter (som en deluppgift att motivera att någon eller några funktioner existerar, och ibland även för att beräkna deras derivator). Formlerna ser lite komplicerade ut, men man kan alltid härleda dem i konkreta fall m.h.a. implicit derivering. I konkreta fall är det mycket enklare än i de generella fallen. Vissa uppgifter löses utan teorin: man deriverar helt enkelt implicit och får ut detta som ska fås ut.

Variant 4 har inte någon självklar geometrisk tolkning, och tas bara upp för att man kan använda den för att bevisa den Inversa funktionssatsen (som kommer att behövas på F9 till direkt substitution vid dubbelintegraler; se exemplet på sidan 109).

¹⁰Om du inte minns teorin för linjära ekvationssystem från linjär algebra, ska du veta att det inte riktigt behövs: 2×2 -system är ju mycket enkla att lösa med metoderna som på gymnasiet!

Variant 4 (uppgift 26 från Adams 12.8)

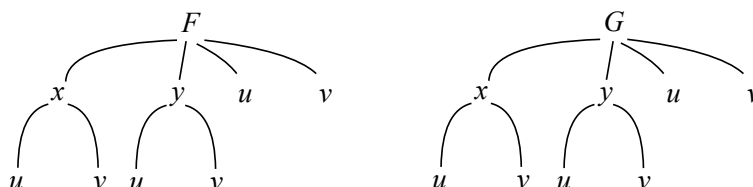
- * **Fallbeskrivning:** Vi har **fyra** variabler (x, y och u, v) och **två** ekvationer $F(x, y, u, v) = 0$ och $G(x, y, u, v) = 0$, där F och G är kontinuerligt deriverbara. Sambandet mellan variablerna är **implicit**. Vi har ett ekvationssystem:
$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$
 och vi vill veta om x och y kan lösas ut som funktioner av u och v , alltså om vi har följande variabelbyte från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

- * **Derivatan och villkoret:** Villkoret är att uttrycket i nämnaren måste vara nollskild i en viss omgivning av punkten (x_0, y_0, u_0, v_0) vi undersöker:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}$$

(Jacobiandeterminanter!) Här har vi en funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ och därför uttrycks derivatan med Jacobianen.



Figur 33: Kedjeregeln för Variant 4. (Bild: Hania, med KeyNote.)

- * **Motivering m.h.a. implicit derivering och kedjeregeln:** Låt oss anta att man kan lösa ut x och y som funktioner av u och v i en viss omgivning av punkten x_0, y_0, u_0, v_0 . Vi har alltså $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ och i en viss omgivning av punkten

$$F(x(u, v), y(u, v), u, v) = 0, \quad G(x(u, v), y(u, v), u, v) = 0.$$

Vi har två oberoende variabler här, u och v , och därmed har vi två tvåvariabelfunktioner som är konstanta i en viss omgivning av den undersökta punkten. Gradienterna till de konstanta funktionerna är lika med $\vec{0}$. Vi tillämpar nu implicit derivering och kedjeregeln enligt diagrammet i bilden (tänk att alla derivatorna här är partiella!). Derivering av den första ekvationen m.a.p. u och v i tur och ordning ger (tänk att, eftersom u och v är två oberoende variabler, vi har $\frac{\partial u}{\partial v} = 0 = \frac{\partial v}{\partial u}$ och $\frac{\partial u}{\partial u} = 1 = \frac{\partial v}{\partial v}$):

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} \end{cases}$$

Derivering av den andra ekvationen m.a.p. u och v i tur och ordning ger:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u} \\ 0 = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial v} \end{cases}$$

Vi formar två 2×2 -ekvationssystem med obekanta x_u och y_u (det första; format från två första ekvationer i ES ovan) och x_v och y_v (det andra):

$$\begin{cases} F_x \cdot x_u + F_y \cdot y_u = -F_u \\ G_x \cdot x_u + G_y \cdot y_u = -G_u \end{cases} \quad \begin{cases} F_x \cdot x_v + F_y \cdot y_v = -F_v \\ G_x \cdot x_v + G_y \cdot y_v = -G_v \end{cases}$$

som kan skrivas på matrisform:

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_u \\ -G_u \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_v \\ -G_v \end{bmatrix}$$

vilka kan skrivas tillsammans på matrisform:

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}$$

Nu använder vi två regler från linjär algebra:

- a) $A \cdot B = C \Rightarrow \det A \cdot \det B = \det C$
- b) $\det(-A) = \det(A)$ för 2×2 -matriser.

Dessa två regler tillsammans ger oss följande slutsats:

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}$$

- * **Satsens antaganden och tes:** Vad den fjärde varianten av den Implicita funktions-satsen säger är att om $F(x, y, u, v)$ och $G(x, y, u, v)$ har kontinuerliga partiella derivator, $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ och $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ och dessutom

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \bigg|_{(x_0, y_0)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)} \neq 0,$$

då finns det en viss omgivning av punkten (x_0, y_0, u_0, v_0) och kontinuerligt deriverbara funktioner $x = x(u, v)$ och $y = y(u, v)$ (ett **variabelbyte** i $\mathbb{R}^2$) sådana att $x(u_0, v_0) = x_0$, $y(u_0, v_0) = y_0$ och $F(x(u, v), y(u, v), u, v) = 0$ och $G(x(u, v), y(u, v), u, v) = 0$ i omgivningen. Jacobiandeterminanten till detta variabelbyte beräknas med formeln:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}.$$

- * **Ett exempel:** Se nästa sats: den Inversa funktionssatsen.

Inversa funktionssatsen (uppgift 27 från Adams 12.8)

Om ekvationerna $x = f(u, v)$ och $y = g(u, v)$ kan bli lösta för u och v som funktioner av x och y , då

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

Med andra ord, om avbildningen

$$\Phi : \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$$

är **inverterbar** (alltså är ett **variabelbyte** i $\mathbb{R}^2$!), då är Jacobiandeterminanten av den inversa avbildningen lika med inversen av Φ 's Jacobiandeterminant.

Varför?: Detta följer direkt ur Variant 4, med (tänk att $x = f(u, v)$ och $y = g(u, v)$):

$$F(x, y, u, v) = f(u, v) - x = 0, \quad G(x, y, u, v) = g(u, v) - y = 0.$$

För dessa funktioner gäller:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Samtidigt ger **Variant 4** (med omkastade u och v med x och y , eftersom vi får här en information att ekvationerna kan bli lösta för u och v som funktioner av x och y) att

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}},$$

vilket är precis detta som skulle bevisas. Vi kommer att använda denna formeln på slutet av F9 (direkta substitutioner för dubbelintegraler).

Taylorapproximationer, kvadratiske former

För differentierbara funktioner av n variabler vet vi att $f(\vec{a} + \vec{h}) \approx f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}$. För att erhålla en bättre uppskattning av f nära punkten $\vec{a}$ behöver vi härleda en flerdimensionell motsvarighet till Taylors formel.

Låt, för enkelhetens skull, f vara en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator av ordningen 1, 2, 3 osv (så många som behövs). Vi vill härleda en approximation av $f(a+h, b+k)$ och använda den endimensionella funktionen $F(t) = f(a+th, b+tk)$ för $t \in [0, 1]$. Då är $F(0) = f(a, b)$ och $F(1) = f(a+h, b+k)$.

Kedjeregeln ger:

$$\begin{aligned} F'(t) &= hf'_1(a+th, b+tk) + kf'_2(a+th, b+tk) \\ F''(t) &= h^2 f''_{11}(a+th, b+tk) + 2hk f''_{12}(a+th, b+tk) + k^2 f''_{22}(a+th, b+tk) \end{aligned}$$

OSV.

$$\Rightarrow F'(0) = hf'_1(a, b) + kf'_2(a, b)$$

$$F''(0) = h^2 f''_{11}(a, b) + 2hk f''_{12}(a, b) + k^2 f''_{22}(a, b)$$

Men, eftersom F är endimensionell, ger Taylors formel samtidigt

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= F(1) = F(0) + F'(0) \cdot 1 + \frac{F''(0)}{2!} \cdot 1^2 + \dots \\ &= \underbrace{f(a, b)}_{f(\vec{a})} + \underbrace{f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k}_{\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f''_{11}(a, b)h^2 + 2f''_{12}(a, b)hk + f''_{22}(a, b)k^2)}_{\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}} + \dots \end{aligned}$$

där $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är **Hessianmatrisen** $\begin{pmatrix} f''_{11}(a, b) & f''_{12}(a, b) \\ f''_{21}(a, b) & f''_{22}(a, b) \end{pmatrix}$ (notera att $f''_{12} = f''_{21}$). Vi har härlett Taylorpolynomet av ordning två.

Notera att resttermen har storleksordningen $\mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2})$, eftersom h^3 , h^2k , hk^2 och k^3 alla är uppåt begränsade av $(h^2 + k^2)^{3/2}$. Här skriver jag Taylorformeln för två- och trevariabelfunktioner på matrisform. För att få in hela formler på en rad, utelämnar jag argumenten för derivatorna, men det ska stå $f'_1(a, b)$ o.s.v. i det första fallet och $f'_1(a, b, c)$ o.s.v. i det andra fallet.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (f'_1, f'_2) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h, k) \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2})$$

$$f(a+h, b+k, c+l) = f(a, b, c) + (f'_1, f'_2, f'_3) \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h, k, l) \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} \\ f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + \mathcal{O}((h^2 + k^2 + l^2)^{3/2})$$

För funktioner som är tillräckligt många gånger deriverbara är Hessianmatriserna **symmetrisk**a (Schwarz sats!), alltså $f''_{ij} = f''_{ji}$ för alla par indexer i, j . Därför är den kvadratiske delen (**kvadratiske formen**) i utvecklingen följande för två- och trevariabelfunktioner:

$$Q(h, k) = f''_{11}h^2 + f''_{22}k^2 + 2f''_{12}hk$$

$$Q(h, k, l) = f''_{11}h^2 + f''_{22}k^2 + f''_{33}l^2 + 2f''_{12}hk + 2f''_{13}hl + 2f''_{23}kl.$$

Exempel 51. Bestäm Taylorpolynomet av ordning två till $f(x, y) = e^{xy} + x^2 + 2xy^3 + 3y$ kring punkten $(2, 0)$. Partiell derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_x &= ye^{xy} + 2x + 2y^3 & f''_{xx} &= y^2e^{xy} + 2 & f(2, 0) &= 5 & f''_{xx}(2, 0) &= 2 \\ f''_{xy} &= (xy + 1)e^{xy} + 6y^2 & \Rightarrow & & f'_x(2, 0) &= 4 & f''_{xy}(2, 0) &= 1 \\ f'_y &= xe^{xy} + 6xy^2 + 3 & f''_{yy} &= x^2e^{xy} + 12xy & f'_y(2, 0) &= 5 & f''_{yy}(2, 0) &= 4 \end{aligned}$$

Taylorutvecklingen av ordning två blir därmed:

$$f(2+h, k) = 5 + 4h + 5k + \frac{1}{2}(2h^2 + 2hk + 4k^2).$$

Rekommenderade uppgifter efter F7

12.8: 1, 3, 7, 13, 15, 16, 17. **12.9:** 1, 5, 7. **Extra uppgifter:** **12.8:** 19. **12.9:** 3, 9, 15.

Föreläsning 8: Extremvärden för flervariabelfunktioner

Adams 13.1, 13.2, 13.3

Extremvärden

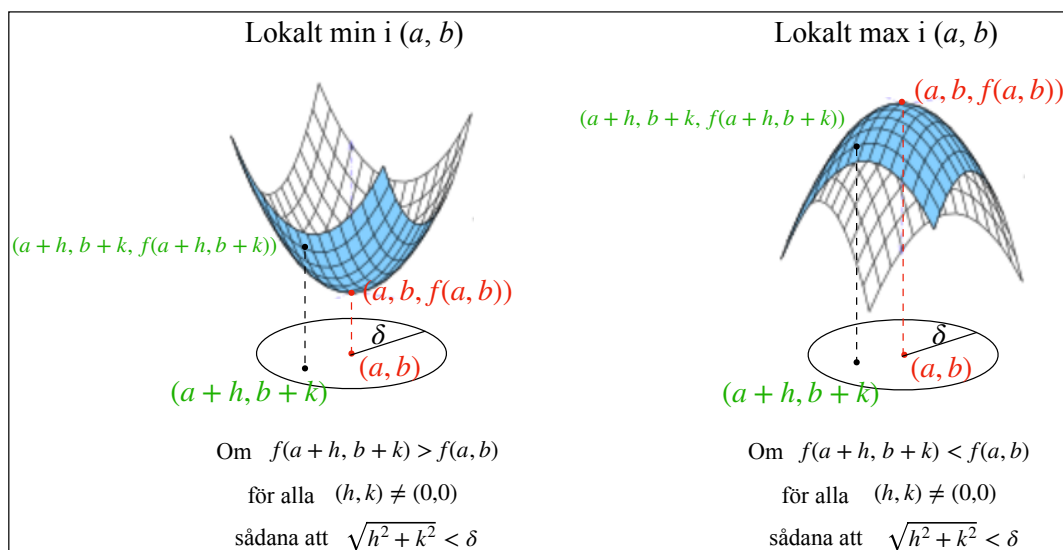
Att hitta de största och minsta värdena till funktioner

Precis som för funktioner av en variabel är det ofta intressant att veta största och minsta värde för en funktion av n variabler. Vi börjar med att studera lokala extremvärden.

Definition 22. En funktion av n variabler sägs ha ett lokalt maximum i $\vec{a}$ om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ för alla $\vec{x}$ så att $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$.

Detta kan skrivas om till en form som vi börjar att bli vana vid: med variabler x och y för tvåvariabelfunktioner och med variabler x , y och z för trevariabelfunktioner:

Definition 23. En funktion av 2 variabler sägs ha ett lokalt maximum i (a, b) om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(x, y) \leq f(a, b)$ för alla (x, y) sådana att $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$.

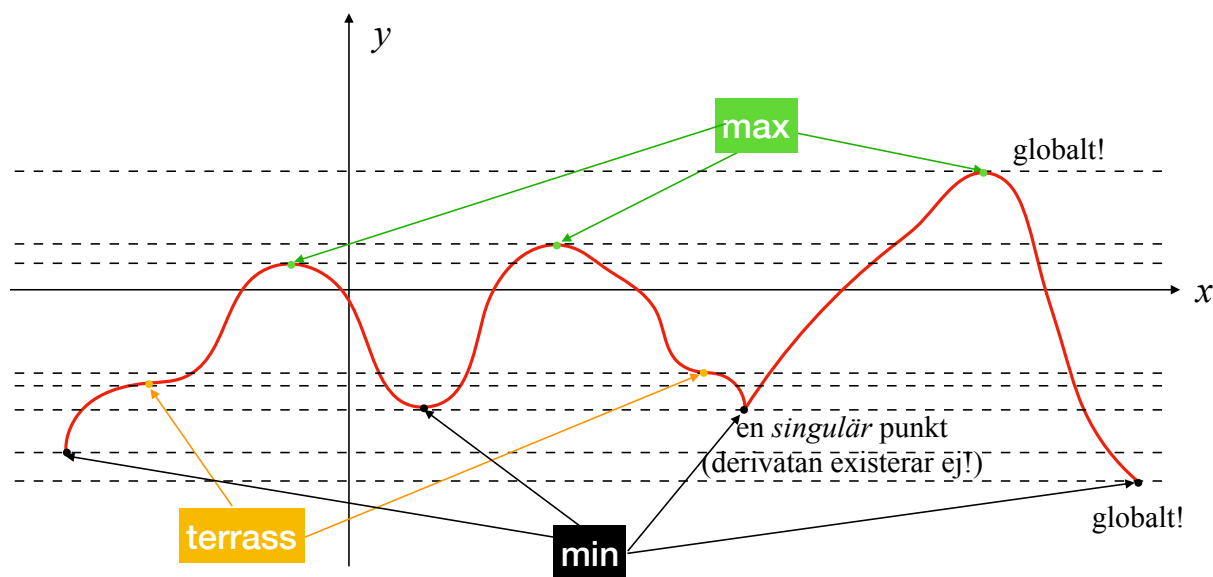


Figur 34: Lokalt minimum och maximum i en δ -omgivning av (a, b) . I bilden $x = a + h$, $y = b + k$

Man kan också skriva om definitionen (och det gör jag för en funktion av tre variabler) i termer av tillväxten i x -, y - och z -leden för argumentet. Här tänker vi alltså att $x = a + h$, $y = b + k$ och $z = c + l$:

Definition 24. En funktion av 3 variabler sägs ha ett lokalt maximum i (a, b, c) om det finns ett $\delta > 0$ s.a. $f(a+h, b+k, c+l) \leq f(a, b, c)$ för alla (h, k, l) s.a. $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} < \delta$.

Hur var det i Envariabelkalkyl?



Figur 35: Extrempunkter (maximi- och minimipunkter) till en envariabelfunktion kan finnas: i definitionsmängdens randpunkter, eller i inre punkter till definitionsmängden som är *singulära* punkter (där derivatan inte existerar) eller *stationära / kritiska* punkter (där funktionens derivata är lika med noll) om derivatan byter tecken i denna punkt.

I envariabelanalys har vi både **första- och andra derivatatesten** (se bilden på nästa sida). Det första är bäst (ger alltid svaret), medan det andra **inte är avgörande** i fallen då $f''(a) = 0$ i en stationär punkt. Testet är i sådana fall *indecisive*. **För flervariabelfunktioner finns det inget första derivatatest. Vi har enbart ett andra derivatatest, som har förresten samma begränsning som den endim-motsvarigheten.**

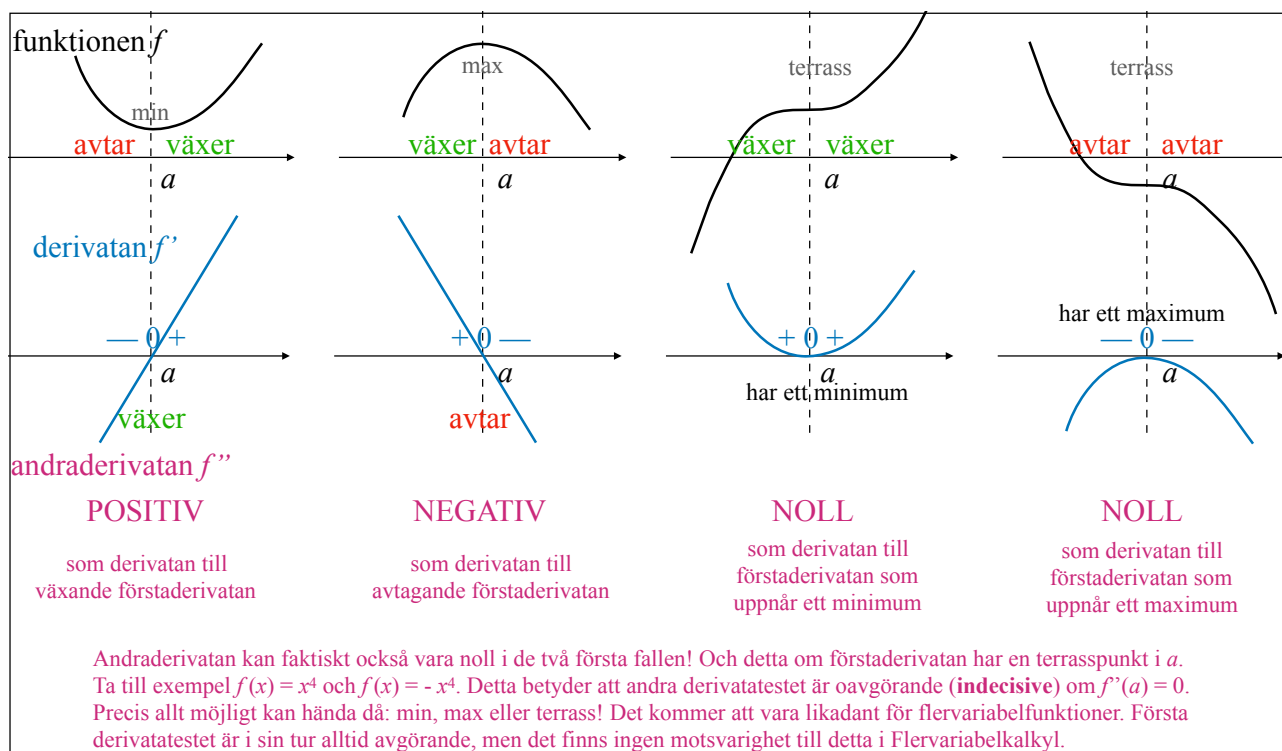
Några exempel för funktioner av två variabler som man klarar utan att använda nya teorier

- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ som är definierad på följande definitionsmängd (uttrycket under rottecknet ska vara icke-negativt!):

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

alltså på enhetscirkelskivan med mittpunkten i $(0, 0)$. Funktionen uppnår bara icke-negativa värden, och uppnår värdet 0 på definitionsmängdens rand (enhetscirkeln). Det globala minimum är alltså lika med 0. Det globala maximum är lika med 1 och uppnås bara i punkten $(0, 0)$. Grafytan till funktionen är förstas den övre halvsfären med radien 1 och mittpunkten i origo. Det är också ganska klart även utan beräkningar att tangentplanet till grafytan i punkten $(0, 0, 1)$ är planet $z = 1$ som är parallellt med xy -planet.

- $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ är definierad på hela $\mathbb{R}^2$. Denna funktionen uppnår bara positiva värden. Det globala maximum är $f(0, 0) = 1$ och det globala minimum existerar ej. Varför



Figur 36: Första- och andra derivatatestet i Envariabelkalkyl. Första derivatatestet: funktionen har ett extremum i dessa stationära punkter där derivatan byter tecken: från minus till plus i minimipunkter och från plus till minus i maximipunkter. Testet fungerar alltid; Andra derivatatestet (för två gånger deriverbara funktioner): ett extremum uppnås i dessa kritiska punkter där andraderivatan är positiv (min) respektive negativ (max). Testet ger inget svar om andraderivatan är lika med noll.

inte?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

men värdet 0 uppnås inte för något argument från $\mathbb{R}^2$.

- $f(x, y) = ax + by + c$, där $a, b, c \neq 0$, har ett plan som graf. Då är det också tydligt att funktionen uppnår varken ett globalt max eller min. Här finns det inte heller några guppar i grafen eller punkten där tangentplanet är parallellt med xy -planet. Därför finns det inte ens *lokala* extrempunkter. Tänk att funktionens graf är sitt egna tangentplan i varje punkt.
- $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10$ (exemplet från Travis Topic 15 minuterna 5:50–12:30). Man kan faktiskt kvadratkomplettera:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 13 + 10 \Rightarrow f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2 - 3,$$

vilket visar att grafen är paraboloid med vertex i $(3, -2, -3)$, uppnår därmed inget maximalt värdet och har ett globalt minimum lika med $-3 = f(3, -2)$.

Först kommer vi att undersöka extrempunkter för tvåvariabelfunktioner som ligger **inuti** definitionsmängden och där funktionen är deriverbar. För detta använder vi ett andra derivata-

test. Först behöver vi hitta en lämplig motsvarighet till andraderivatan för tvåvariabelfunktioner.

Hessianen och Taylorutveckling

Om en envariabelfunktion f är tillräckligt många gånger deriverbara och $a \in D_f$, då kan vi approximera f med andrags Taylorpolynom kring a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{eller, med } x = a + h \quad f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

För differentierbara funktioner av n variabler vet vi att $f(\vec{a} + \vec{h}) \approx f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}$. (Det är ju själva definitionen för deriverbarheten!) Punktsymbolen mellan gradienten och tillväxtvektorn är skalärprodukt. För två och tre variabler blir det alltså:

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &\approx f(a, b) + f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k \\ f(a + h, b + k, c + l) &\approx f(a, b, c) + f'_1(a, b, c)h + f'_2(a, b, c)k + f'_3(a, b, c)l \end{aligned}$$

För att erhålla en bättre uppskattning av f nära punkten $\vec{a}$ behöver vi härleda en flerdimensionell motsvarighet till Taylors formel.

Låt, för enkelhetens skull, f vara en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator av ordningen 1, 2, 3 osv (så många som behövs). Vi vill härleda en approximation av $f(a + h, b + k)$ och använda den endimensionella funktionen $F(t) = f(a + th, b + tk)$ för $t \in [0, 1]$. Då är $F(0) = f(a, b)$ och $F(1) = f(a + h, b + k)$.

Kedjeregeln ger:

$$\begin{aligned} F'(t) &= hf'_1(a + th, b + tk) + kf'_2(a + th, b + tk) \\ F''(t) &= h^2 f''_{11}(a + th, b + tk) + 2hk f''_{12}(a + th, b + tk) + k^2 f''_{22}(a + th, b + tk) \end{aligned}$$

osv.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F'(0) &= hf'_1(a, b) + kf'_2(a, b) \\ F''(0) &= h^2 f''_{11}(a, b) + 2hk f''_{12}(a, b) + k^2 f''_{22}(a, b) \end{aligned}$$

Men, eftersom F är endimensionell, ger Taylors formel samtidigt

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = F(1) &= F(0) + F'(0) \cdot 1 + \frac{F''(0)}{2!} \cdot 1^2 + \dots \\ &= \underbrace{f(a, b)}_{f(\vec{a})} + \underbrace{f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k}_{\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}} + \frac{1}{2} \underbrace{(f''_{11}(a, b)h^2 + 2f''_{12}(a, b)hk + f''_{22}(a, b)k^2)}_{\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}} + \dots \end{aligned}$$

där $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är **Hessianmatrisen** $\begin{pmatrix} f''_{11}(a, b) & f''_{12}(a, b) \\ f''_{21}(a, b) & f''_{22}(a, b) \end{pmatrix}$ (notera att $f''_{12} = f''_{21}$: **Schwarz sats!**).

Vi har härlett Taylorpolynomet av ordning två. Notera att resttermen har storleksordningen $\mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2})$, eftersom h^3 , h^2k , hk^2 och k^3 alla är uppåt begränsade av $(h^2 + k^2)^{3/2}$. Här skriver jag Taylorformeln för två- och trevariabelfunktioner på matrisform. För att få in hela formler på en rad, utelämnar jag argumenten för derivatorna, men det ska stå $f'_1(a, b)$ o.s.v. i det första fallet och $f'_1(a, b, c)$ o.s.v. i det andra fallet.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (f'_1, f'_2) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h, k) \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2})$$

$$f(a+h, b+k, c+l) = f(a, b, c) + (f'_1, f'_2, f'_3) \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h, k, l) \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} \\ f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + \mathcal{O}((h^2 + k^2 + l^2)^{3/2})$$

För funktioner som är tillräckligt många gånger deriverbara är Hessianmatriserna **symmetriska** (Schwarz sats!), alltså $f''_{ij} = f''_{ji}$ för alla par indexer i, j . Därför är den kvadratiske delen (**kvadratiske formen**) i utvecklingen följande för två- och trevariabelfunktioner:

$$Q(h, k) = \frac{1}{2}(f''_{11}h^2 + f''_{22}k^2 + 2f''_{12}hk)$$

$$Q(h, k, l) = \frac{1}{2}(f''_{11}h^2 + f''_{22}k^2 + f''_{33}l^2 + 2f''_{12}hk + 2f''_{13}hl + 2f''_{23}kl).$$

Varför räknar man så med kvadratiske former? Det är två gånger efter varandra matrismultiplikation som nedan:

$$(h, k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (h, k) \begin{pmatrix} ha_{11} + ka_{12} \\ ha_{21} + ka_{22} \end{pmatrix} = h^2a_{11} + hka_{12} + kha_{21} + k^2a_{22}$$

$$(h, k, l) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = (h, k, l) \begin{pmatrix} ha_{11} + ka_{12} + la_{13} \\ ha_{21} + ka_{22} + la_{23} \\ ha_{31} + ka_{32} + la_{33} \end{pmatrix} =$$

$$h^2a_{11} + hka_{12} + hla_{13} + kha_{21} + k^2a_{22} + kla_{23} + lha_{31} + lka_{32} + l^2a_{33}.$$

Om matrisen A dessutom är **symmetrisk** (enligt huvuddiagonalen, alltså $a_{ij} = a_{ji}$ för varje par indexer (i, j)), kan man sätta ihop termerna som innehåller a_{ij} med termerna som innehåller a_{ji} (de är multiplicerade med samma komponenter av tillväxtvektorn).

Lokala extrempunkter för flervariabelfunktioner

I analogi med situationen för funktioner av en variabel är det lätt att visa att om f är partiellt deriverbar så är $f'_j(\vec{a}) = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$ i alla punkter $\vec{a}$ där f' har lokala maxima eller minima. Varför är det så?:

Funktionen f (av **två** variabler) uppnår sina extrema i synnerhet längs kurvorna

$$z(x) = f(x, b) = g(x) \quad \text{och} \quad z(y) = f(a, y) = h(y),$$

alltså måste derivatorna till dessa **envariabelfunktioner** vara lika med noll. Och dessa är ju f 's partiella derivator! **Villkoret betyder att tangentplanet till grafytan i punkten $(a, b, f(a, b))$ är parallellt med xy -planet.** Villkoret är också, precis som i envariabelanalys, enbart **nödvändigt**, dock inte tillräckligt (tänk på terrass).

Definition 25. En punkt $\vec{a}$ där $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ kallas en **kritisk** (eller: **stationär**) **punkt** till f .

Eftersom alla lokala extrempunkter $\vec{a}$ till f i vilka f är partiellt deriverbar också är kritiska punkter, så kan lokala extrempunkter bara inträffa i **kritiska** punkter, **singulära** punkter (∇f existerar ej) och **randpunkter** till D_f . Jämför situationen i Envariabelkalkyl.

Det är inte säkert att en kritisk punkt är en lokal extrempunkt. Allmänt kan en funktion ha 3 typer av utseende kring en kritisk punkt (**maximi**-, **minimi**-, **sadelpunkt**). M.h.a. Taylorapproximationen av en funktion ska vi ta fram en metod för att karakterisera kritiska punkter.

Låt f vara en funktion av n variabler med en kritisk punkt i $\vec{a}$.

$$\text{Lokalt minimum i } \vec{a} \iff f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) \geq 0 \text{ för alla } \vec{h} \text{ så att } |\vec{h}| < \delta$$

$$\text{Lokalt maximum i } \vec{a} \iff f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) \leq 0 \text{ för alla } \vec{h} \text{ så att } |\vec{h}| < \delta$$

$$\text{Sadelpunkt i } \vec{a} \iff f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) \text{ antar både positiva och negativa värden oavsett hur litet vi väljer } \vec{h}.$$

Taylorutveckling av f kring $\vec{a}$ ger

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \underbrace{\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}}_{=0, \text{ om } f \text{ har en kritisk punkt i } \vec{a}} + \frac{1}{2} \vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h} + \mathcal{O}(|\vec{h}|^3).$$

Tillräckligt nära origo är $\mathcal{O}(|\vec{h}|^3)$ obetydlig jämfört med $\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}$, som har storleksordning $\mathcal{O}(|\vec{h}|^2)$, så beteendet hos $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$ bestäms av beteendet hos $\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}$ (för rigoröst bevis, se kursboken) alltså, eftersom resttermen är obetydlig liten, gäller:

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) \approx \frac{1}{2} \vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}.$$

Definition 26. En $n \times n$ -matris A sägs vara

- **positivt definit** om $\vec{h}^T A \vec{h} > 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,
- **negativt definit** om $\vec{h}^T A \vec{h} < 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,
- **indefinit** om $\vec{h}^T A \vec{h}$ antar både positiva och negativa värden,
- **positivt semidefinit** om $\vec{h}^T A \vec{h} \geq 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,
- **negativt semidefinit** om $\vec{h}^T A \vec{h} \leq 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Sats 14. Antag att $\vec{a}$ är en kritisk punkt till f och att Hessianmatrisen $\mathcal{H}_f(\vec{x})$ är kontinuerlig i en omgivning till $\vec{a}$. Då gäller

1. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är **positivt definit**, så har f ett lokalt **minimum** i $\vec{a}$.
2. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är **negativt definit**, så har f ett lokalt **maximum** i $\vec{a}$.
3. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är **indefinit**, så har f en **sadelpunkt** i $\vec{a}$.
4. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är positivt eller negativt semidefinit, så kan f ha lokalt maximum, minimum, eller en sadelpunkt i $\vec{a}$.

Satsen följer ur detta att

$$\mathcal{H}_f(\vec{a}) \text{ är positivt definit} \iff \forall \vec{h} \neq \vec{0} \quad f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) > 0 \iff \forall \vec{h} \neq \vec{0} \quad f(\vec{a} + \vec{h}) > f(\vec{a})$$

Slutsatsen i fjärde fallet följer av att resttermen i Taylorutvecklingen för semidefinita $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ kommer bestämma tecknet på $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$.

Här följer en explicit formulering av samma resultat till funktioner av två variabler. Om (a, b) är en kritisk punkt till f som är tre gånger kontinuerligt deriverbar, då:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \approx \frac{1}{2}(f''_{11}(a, b)h^2 + 2f''_{12}(a, b)hk + f''_{22}(a, b)k^2).$$

Sats 15. (Andra derivatatestet). Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en tre gånger kontinuerligt deriverbar funktion och (a, b) vara en stationär punkt inuti D_f , d.v.s.

$$\nabla f(a, b) = (f'_1(a, b), f'_2(a, b)) = (0, 0).$$

Låt dessutom $Q(h, k)$ beskriva den kvadratiske formen till funktionens Hessianmatris i punkten (a, b) , alltså

$$Q(h, k) = f''_{11}(a, b)h^2 + 2f''_{12}(a, b)hk + f''_{22}(a, b)k^2.$$

Dä gäller följande:

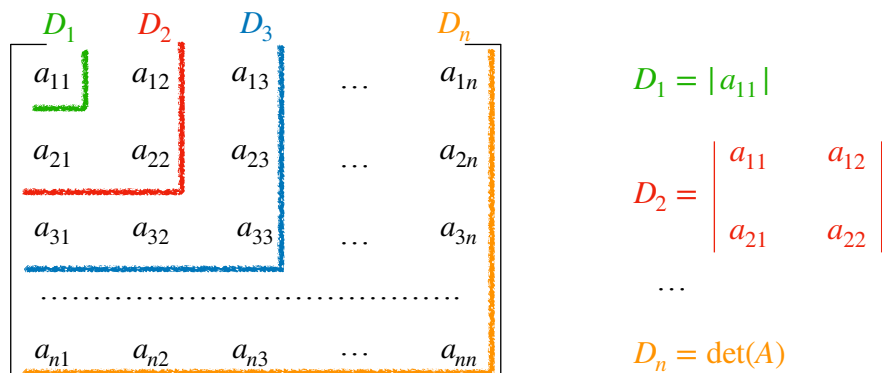
- Om $Q(h, k) > 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$ (alltså är Hessianen **positivt definit**), är (a, b) en **minimipunkt** till f .
- Om $Q(h, k) < 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$ (alltså är Hessianen **negativt definit**), är (a, b) en **maximipunkt** till f .
- Om $Q(h, k) > 0$ för vissa $(h, k) \neq (0, 0)$ och $Q(h, k) < 0$ för vissa $(h, k) \neq (0, 0)$ (alltså är Hessianen **indefinit**), är (a, b) en **sadelpunkt** till f .
- Om $Q(h, k) \leq 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$ eller $Q(h, k) \geq 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$ (alltså är Hessianen **negativt eller positivt semidefinit**), kan (a, b) vara precis vad som helst: *maximi-, minimi- eller sadelpunkt* till f . Kriteriet **kan inte avgöra punktens karaktär** och man måste använda andra metoder.

Så här känner man igen om en kvadratisk form är positivt- eller negativt definit, eller indefinit: man kvadratkompletterar och härleder uttrycket till någon form som beskrivet nedan:

- om uttrycket består av kvadrater av reella tal med **enbart plustecken**—som t.ex. $h^2 + k^2$ eller $6(h + \frac{1}{2}k)^2 + \frac{1}{2}k^2$ —är formen **positivt definit**, ty $x^2 \geq 0$ för $x \in \mathbb{R}$.
- om uttrycket består av kvadrater av reella tal med **enbart minustecken**—som t.ex. $-h^2 - k^2$ eller $-6(h + \frac{1}{2}k)^2 - \frac{1}{2}k^2$ —är formen **negativt definit**, ty $-x^2 \leq 0$ för $x \in \mathbb{R}$.
- om uttrycket består av kvadrater av reella tal med **olika tecken**—som t.ex. $h^2 - k^2$ eller $6(h + \frac{1}{2}k)^2 - \frac{1}{2}k^2$ —är formen **indefinit**, ty vi kan uppnå både positiva och negativa resultat genom att nollställa ett kvadratuttryck och inte nollställa det andra. Så till exempel blir $h^2 - k^2$ positivt för $(h, 0)$ och negativt för $(0, k)$ (oavsett h och k , så länge de är nollskilda). Uttrycket $6(h + \frac{1}{2}k)^2 - \frac{1}{2}k^2$ blir positivt för $(h, 0)$ och negativt för $(-\frac{1}{2}k, k)$ (oavsett h och k , så länge de är nollskilda).

Man kan också använda följande sats i.s.f. kvadratkomplettera.

Sats 16. (Sats 8, Adams 10.7) Låt A vara en symmetrisk $n \times n$ -matris med reella element, alltså $a_{ij} \in \mathbb{R}$ för alla i och j . Låt D_i för $i = 1, 2, \dots, n$ betecknar del-determinanterna som i bilden.



Figur 37: Illustration till Sats 8 från Adams 10.7. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Då är matrisen A :

- *positivt definit* om $D_i > 0$ för alla i
- *negativt definit* om $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, D_4 > 0, \dots$, alltså *omväxlande minus och plus*, ända till den sista D_n
- *indefinit* om $|A| = D_n \neq 0$, men ingen av ovanstående gäller.

Om $|A| = D_n = 0$, ger satsen inget svar om A 's karaktär.

Satsen ovan i kombination med Sats 14 ger oss ett väldigt enkelt test (**andra derivatatestet**) för lokala extrempunkter för tvåvariabelfunktioner.

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara tillräckligt många gånger kontinuerligt deriverbar. Funktionen f har ett lokalt extremum i punkten (a, b) om $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ (d.v.s. (a, b) är en kritisk punkt) och Hessianens determinant i punkten (a, b) är positiv, alltså $D_2 = \begin{vmatrix} f''_{11}(a, b) & f''_{12}(a, b) \\ f''_{21}(a, b) & f''_{22}(a, b) \end{vmatrix} > 0$, eftersom precis då är Hessianmatrisen positivt- eller negativt definit. Om dessutom $D_1 = f''_{11}(a, b) > 0$, då är (a, b) ett **lokalt minimipunkt** (Hessianen är **positivt definit**) och om $D_1 = f''_{11}(a, b) < 0$, då är (a, b) ett **lokalt maximipunkt** (Hessianen är **negativt definit**).

Extremvärden; klassificering av kritiska punkter

För att undersöka extrempunkter för tvåvariabelfunktioner som ligger **inuti**¹¹ definitionsmängden och där funktionen är deriverbar. För detta använder vi andra derivatatestet som var härlett nyss:

¹¹Vidare på dagens föreläsning kommer vi att se närmare vad som händer på randen till ett område, och vi kommer att lära känna flera metoder för att undersöka detta. Det blir nämligen betydligt mer komplicerat än i Envariabelkalkyl.

Sats 17. (Andra derivatatestet). Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en C^3 -funktion och (a, b) vara en stationär punkt inuti D_f , d.v.s.

$$\nabla f(a, b) = (f'_1(a, b), f'_2(a, b)) = (0, 0).$$

Låt dessutom D_2 beskriva determinanten till funktionens Hessianmatris i punkten (a, b) , alltså

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{11}(a, b) & f''_{12}(a, b) \\ f''_{21}(a, b) & f''_{22}(a, b) \end{vmatrix}.$$

Dä gäller följande:

- Om $D_2 > 0$, är (a, b) en **extrempunkt** till f :
 - Om $D_1 = f''_{11}(a, b) > 0$ (alltså är Hessianen **positivt definit**), är (a, b) en **minimipunkt** till f
 - Om $D_1 = f''_{11}(a, b) < 0$ (alltså är Hessianen **negativt definit**), är (a, b) en **maximipunkt** till f
 - (OBS: Om $D_1 = f''_{11}(a, b) = 0$, har vi $D_2 = 0 - (f''_{12}(a, b))^2 \leq 0$, alltså kan inte $D_2 > 0$ gälla.)
- Om $D_2 < 0$ (alltså är Hessianen **indefinit**), är (a, b) en **sadelpunkt** till f .
- Om $D_2 = 0$, ger satsen inget svar.

Satsen är direkta följden av Taylorutvecklingen och satsen om kvadratiska former (Adams 10.7, Sats 8). Om ni ska analysera en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ med $n \geq 2$, behöver ni bedöma Hessianen m.h.a. kriterier för $D_1, D_2, \dots, D_n$ i Sats 8 (En uppgift med en trevariabelfunktion finns längre fram i detta kapitel.) Vi ska nu tillämpa satsen på några exempel av tvåvariabelfunktioner.

Optimering för tvåvariabelfunktioner: sex exempel

I vissa exempel utelämnas argumentet för andraderivatorna (för att spara plats), men alla derivator ska vara evaluerade i punkten (x, y) .

Vi börjar med tre riktigt enkla exempel: sådana där vi vet hur graferna ser ut (se bilden med grafer a, b och c) och vet därför vilket svar vi ska få.

Exempel 52 (Graf a). Karakterisera den kritiska punkten $(0, 0)$ till $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

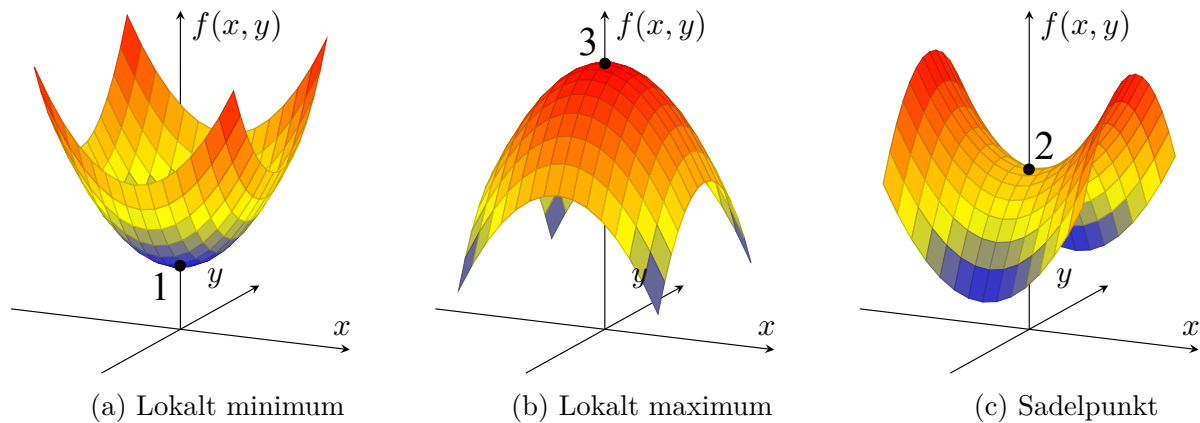
Partiell derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= 2x \\ f'_2(x, y) &= 2y \end{aligned} \quad (\text{och vi ser att } (0, 0) \text{ faktiskt är den enda kritiska punkten})$$

$$\begin{aligned} f''_{11} &= 2 \\ f''_{12} &= 0 \\ f''_{22} &= 2 \end{aligned} \quad \text{Så Hessianmatrisen blir, i origo (och i alla andra punkter):}$$

$$\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f(0, 0) \vec{h} = 2h^2 + 2k^2$$

vilket endast antar **positiva** värden, och vi således får ett lokalt **minimum**, precis som väntat.



Figur 38: Illustration till första tre exempel: en (cirkulär) paraboloid $z = x^2 + y^2 + 1$, en (cirkulär) paraboloid $z = 3 - x^2 - y^2$ och en hyperbolisk paraboloid $z = x^2 - y^2 + 2$ (*Pringle/Sadel*).

Exempel 53 (Graf b). Karakterisera den kritiska punkten $(0, 0)$ till $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$.

Partiell derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= -2x \\ f'_2(x, y) &= -2y \end{aligned} \quad (\text{och vi ser att } (0, 0) \text{ faktiskt är den enda kritiska punkten})$$

$$\begin{aligned} f''_{11} &= -2 \\ f''_{12} &= 0 \\ f''_{22} &= -2 \end{aligned} \quad \text{Så Hessianmatrisen blir, i origo (och i alla andra punkter):}$$

$$\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f(0, 0) \vec{h} = -2h^2 - 2k^2$$

vilket endast antar **negativa** värden, och vi således får ett lokalt **maximum**, precis som väntat.

Exempel 54 (Graf c). Karakterisera den kritiska punkten $(0, 0)$ till $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

Partiell derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= 2x \\ f'_2(x, y) &= -2y \end{aligned} \quad (\text{och vi ser att } (0, 0) \text{ faktiskt är den enda kritiska punkten})$$

$$\begin{aligned} f''_{11} &= 2 \\ f''_{12} &= 0 \\ f''_{22} &= -2 \end{aligned} \quad \text{Så Hessianmatrisen blir, i origo (och i alla andra punkter):}$$

$$\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f(0, 0) \vec{h} = 2h^2 - 2k^2$$

vilket antar **både positiva och negativa** värden för (h, k) godtyckligt nära origo (positiva värden antas till exempel för $(h, 0)$ och negativa för $(0, k)$ vid godtyckliga nollskilda h och k), och vi således får en **sadelpunkt**, precis som väntat.

Nu följer några svårare exempel, där vi inte kan säga i förväg vilken sort stationär punkt vi får.

Exempel 55. Karakterisera de kritiska punkterna $(0, 0)$ och $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$ till funktionen $f(x, y) = 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3$.

Partiell derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= 6x + 3y \\ f'_2(x, y) &= 3x + 2y + 3y^2 \end{aligned} \quad (\text{och vi ser att de givna punkterna faktiskt är kritiska})$$

$$\begin{aligned} f''_{11} &= 6 \\ f''_{12} &= 3 \\ f''_{22} &= 2 + 6y \end{aligned} \quad \text{Så Hessianmatrisen blir, i de kritiska punkterna:}$$

$$\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f(0, 0) \vec{h} = 6h^2 + 6hk + 2k^2 = 6\left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{1}{2}k^2$$

vilket endast antar positiva värden, och vi således får ett lokalt minimum

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) \vec{h} = 6h^2 + 6hk + k^2 = 6\left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{2}k^2$$

vilket antar både positiva och negativa värden, och vi således får en sadelpunkt.

Exempel 56. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = xy - x^2y - y^2$ och klassificera dessa. De uppfyller ES:

Vi deriverar funktionen partiellt för att hitta de kritiska punkterna.

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= y - 2xy = 0 \\ f'_2(x, y) &= x - x^2 - 2y = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y(1 - 2x) = 0 \\ x - x^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger $y = 0$ eller $1 - 2x = 0$. Nu kollar vi vad som händer med den andra ekvationen i båda fall:

$$y = 0 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{kritiska punkter } (0, 0) \text{ och } (1, 0)$$

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{kritisk punkt i } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$$

Vi deriverar funktionen igen för att bestämma Hessianmatrisen.

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= -2y \\ f''_{12}(x, y) &= 1 - 2x \\ f''_{22}(x, y) &= -2 \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x \\ 1 - 2x & -2 \end{pmatrix}$$

I de kritiska punkterna får vi:

$$\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi undersöker motsvarande kvadratiska former:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ger } Q(h, k) = 2hk - 2k^2 = -2\left(k - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{2} \quad (\text{indefinit, alltså sadelpunkt})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ger } Q(h, k) = -2hk - 2k^2 = -2\left(k + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{2} \quad (\text{indefinit, alltså sadelpunkt})$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ger } Q(h, k) = -\frac{h^2}{4} - k^2 \quad (\text{negativt definit, alltså lokalt maximum})$$

Alternativt, från Sats 10.7 från Adams:

- Punkt $(0, 0)$: $D_2 = 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -1 < 0$, alltså är Hessianen indefinit, vilket ger en sadelpunkt.
- Punkt $(1, 0)$: $D_2 = 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-1) = -1 < 0$, alltså är Hessianen indefinit, vilket ger en sadelpunkt.
- Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$: $D_2 = (-\frac{1}{4}) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = \frac{1}{2} > 0$, och $D_1 = -\frac{1}{4} < 0$, vilket betyder att Hessianen är negativt definit, alltså har f ett maximipunkt där.

Exempel 57. Bestäm alla kritiska punkter till $f(x, y) = 3xy - x^2 - 3y^2 + x - 12$ och karakterisera dessa.

De kritiska punkterna uppfyller ekvationssystemet:

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = 3y - 2x + 1 = 0 \\ f'_2(x, y) = 3x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2x + 1 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4y + 1 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (2, 1).$$

Funktionen har andraderivatorna $f''_{11}(x, y) = -2$, $f''_{12}(x, y) = 3$, och $f''_{22}(x, y) = -6$ så Hessianmatrisen (med den motsvarande kvadratiska formen $Q(h, k)$) blir

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \quad Q(h, k) = -2h^2 + 6hk - 6k^2 = -2(h^2 - 3hk) - 6k^2 = -2\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 - 6k^2$$

$$= -2\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 + \frac{9}{2}k^2 - 6k^2 = -2\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{3}{2}k^2 < 0 \quad \forall (h, k) \neq (0, 0).$$

Hessianmatrisen är negativt definit, så den kritiska punkten är ett lokalt maximum.

Om den kvadratiska formen är semidefinit för en kritisk punkt så kan den kritiska punkten karakteriseras genom studie av funktionsuttrycket eller Taylorutveckling av högre ordning kring punkten.

Optimering för trevariabelfunktioner: ett exempel

Till slut ett exempel med en trevariabelfunktion. Vid bedömning av kvadratiska former ska man göra det systematiskt: först gruppera alla termer som innehåller h , kvadratkomplettera, och efteråt har man bara två variabler kvar och då fortsätter man som i tidigare exempel.

Exempel 58. Bestäm alla kritiska punkter till

$$f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6xy - 6xz + 8yz + 4z$$

och karakterisera dessa.

De kritiska punkterna uppfyller

$$\begin{cases} f'_1(x, y, z) = 3x^2 + 6x - 6y - 6z = 0 \\ f'_2(x, y, z) = 8y - 6x + 8z = 0 \\ f'_3(x, y, z) = 12z - 6x + 8y + 4 = 0 \end{cases}$$

Vi kan först ta fram z genom att jämföra uttrycken $6x - 8y$ som förekommer i båda ekvationer: $8z = 12z + 4$ ger $-4z = 4$, alltså $z = -1$. Nästa steget är insättning av $z = -1$ i de första två ekvationer. Detta ger ett 2×2 ekvationssystem med variablerna x och y :

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x - 6y = -6 \\ 8y - 6x = 8 \end{cases}$$

Vi får $y = \frac{3}{4}x + 1$ från den andra ekvationen, vilket insatt i ekvation 1 reducerar antalet variabler till ett:

$$3x^2 + 6x - 6(\frac{3}{4}x + 1) = -6 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 6x - \frac{9}{2}x - 6 = -6 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2x + 1) = 0.$$

Detta ger $x = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$, vilka ger $y = 1$ resp. $y = \frac{5}{8}$. Och, förstås, $z = -1$ i både fallen. Vi får alltså två kritiska punkter: $(0, 1, -1)$ och $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, -1)$.

Dags för Hessianmatrisen:

$$\begin{array}{lll} f''_{11} & = 6x + 6, & f''_{12} = -6, & f''_{13} = -6 \\ f''_{21} & = -6, & f''_{22} = 8, & f''_{23} = 8 \\ f''_{31} & = -6, & f''_{32} = 8, & f''_{33} = 12 \end{array}$$

vilket ger Hessianen

$$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x + 6 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 8 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

- I punkten $(0, 1, -1)$ är Hessianen

$$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 8 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

och kvadratiske formen

$$\begin{aligned}
 Q(h, k, l) &= 6h^2 + 8k^2 + 12l^2 - 12hk - 12hl + 16kl \\
 &= 6(h^2 - 2hk - 2hl) + 8k^2 + 12l^2 + 16kl \\
 &= 6(h^2 - 2h(k+l)) + 8k^2 + 12l^2 + 16kl \\
 &= 6(h - (k+l))^2 - 6(k+l)^2 + 8k^2 + 12l^2 + 16kl \\
 &= 6(h - k - l)^2 - 6k^2 - 12kl - 6l^2 + 8k^2 + 12l^2 + 16kl \\
 &= 6(h - k - l)^2 + 2k^2 + 6l^2 + 4kl \\
 &= 6(h - k - l)^2 + 2(k^2 + 2kl + l^2) + 4l^2 \\
 &= 6(h - k - l)^2 + 2(k+l)^2 + 4l^2
 \end{aligned}$$

är **positivt definit**, vilket betyder att punkten är en **lokal minimipunkt**.

- I punkten $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, -1)$ är Hessianen

$$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 8 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

och kvadratiske formen

$$Q(h, k, l) = 3h^2 + 8k^2 + 12l^2 - 12hk - 12hl + 16kl$$

är **indefinit** (kolla själv m.h.a. kvadratkomplettering!), vilket betyder att punkten är en **sadelpunkt**.

För funktioner av en variabel gäller att om funktionen f har ett lokalt minimum i $x = a$ och inga andra kritiska eller singulära punkter så har f globalt maximum i $x = a$. Som följande exempel visar kan vi inte dra den slutsatsen för funktioner av flera variabler.

Exempel 59. Undersök de kritiska punkterna till $f(x, y) = x^2(1+y)^3 + y^2$ och se om funktionen har ett globalt minimum.

Partiell derivering och insättning i villkoret *gradienten är lika med noll* ger först:

$$f'_1(x, y) = 2x(1+y)^3 = 0, \quad f'_2(x, y) = 3x^2(1+y)^2 + 2y = 0.$$

Den första ekvationen ger $x = 0$ eller $y = -1$, vilket insatt i den andra ekvationen ger den enda kritiska punkten $(0, 0)$. Vidare gäller

$$\begin{aligned}
 f''_{11}(x, y) &= 2(1+y)^3|_{(0,0)} &= 2 \\
 f''_{12}(x, y) &= 6x(1+y)^2|_{(0,0)} &= 0 \\
 f''_{22}(x, y) &= 6x^2(1+y) + 2|_{(0,0)} &= 2
 \end{aligned}$$

så den kvadratiske formen för Hessianmatrisen är $2h^2 + 2k^2$, vilket motsvarar ett lokalt minimum 0. Funktionen har dock inget minsta värde. Längs den räta linjen $x = 1$ i xy -planet är

$$f(1, y) = (1+y)^3 + y^2 \quad \text{vilket går mot } -\infty \text{ då } y \rightarrow -\infty.$$

Funktionen antar hur stora (till absolutbeloppet) negativa värden som helst.

Om vi för en funktion $f(x, y)$ kan visa att $|f(x, y)| < L$ för alla $x^2 + y^2 > R$ så kan man dock dra slutsatsen att om m är det minsta lokala extremvärdet och $m < -L$ så har f globalt minimum m .

Extremvärden på kompakta områden

För kontinuerliga funktioner av flera variabler som är definierade på ett **kompakt** (**begränsat och slutet**) område gäller, precis som i Envariabelkalkyl (satsen om extremvärden), att funktionen har ett maximum och ett minimum. Vi ska därför ta fram en metod för att bestämma dessa globala extremvärden. Arbetssättet är följande:

- Bestäm alla **stationära** punkter till f **inuti** området och beräkna värden av f i dessa punkter. **Lägg dem åt sidan.**
- Beräkna värden av f i alla **singulära** punkter, alltså där funktionen inte är deriverbar. **Lägg dem åt sidan.**
- Undersök funktionens värden på mängdens **rand** genom att reducera antalet variabler till 1 och tillämpa vanliga endim-metoder. Extremvärdena på varje randbit ska också **läggas åt sidan**. Vi kommer att begränsa antalet variabler på två sätt. Båda sätten illustreras med exemplen nedan (optimering på en cirkelskiva och på en kvadrat):
 - genom att *uttrycka en variabel som funktion av den andra variabeln* på varje randbit som beskrivs med en ekvation (t.ex. räta linjens ekvation)
 - genom att *parametrisera* randen (om randen är en cirkel eller ellips) och därför bara ha en variabel kvar: parametern.
- Om området har hörn (som triangel eller kvadrat), beräkna f 's värden i hörnen och **lägg dem åt sidan**.
- Jämför nu alla värdena som du har **lagt åt sidan** vid varje steg, **välj det största och det minsta av dem**: dessa är dina globala maximi- och minimivärdena på hela område.

Vi hittar alltså eventuella extrempunkter i det inre genom att undersöka de kritiska punkterna som tidigare. Kritiska punkter på randen kan fås genom att vi parametriserar randen och betraktar funktionen på randen som en funktion av en variabel (parametern). Om vi hade velat hitta maximum och minimum till $f(x, y) = xy^2 - x - y$ på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$, så hade vi fått använda parametriseringen

$$g(\phi) = f(2 \cos \phi, 2 \sin \phi), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

vilket ger

$$g(\phi) = 8 \cos \phi \sin^2 \phi - 2 \cos \phi - 2 \sin \phi$$

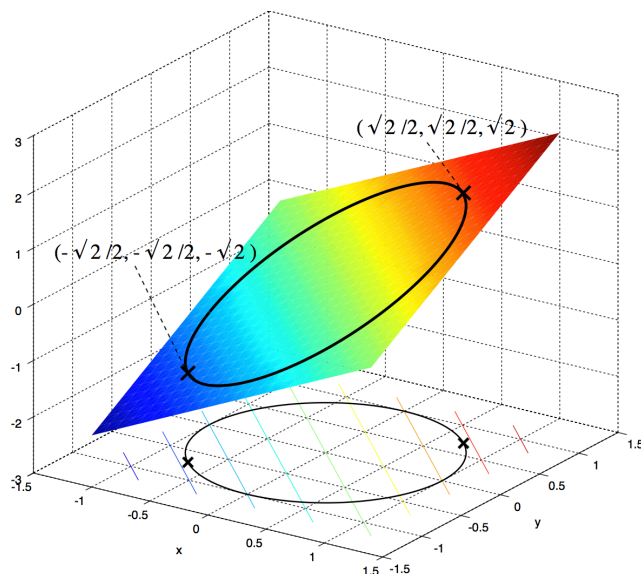
och sedan satt derivatan av g till noll och löst ut ϕ .

Exempel 60. Maximera och minimera $f(x, y) = x + y$ på cirkelskivan $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Eftersom funktionens graf är ett plan i rummet (med ekvation $x + y - z = 0$), finns det förstås inga kritiska punkter inuti cirkelskivan. Det syns förstås också på gradienten: $\nabla f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = (1, 1)$. Gradienten är konstant och den därför blir aldrig nollvektorn. Detta betyder att max och min till funktionen måste uppnås på cirkeln. Detta syns även i bilden på nästa sida.

Cirkeln parametriseras $x(\phi) = \cos \phi$, $y(\phi) = \sin \phi$ för $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Detta hjälper oss begränsa antalet variabler för funktionen till en:

$$g(\phi) = f(\cos \phi, \sin \phi) = \cos \phi + \sin \phi.$$



Figur 39: Exempel 60. (Bild: Wikipedia.)

Vi har alltså ett problem från endim. Derivering ger $g'(\phi) = -\sin \phi + \cos \phi$ och:

$$g'(\phi) = 0 \Leftrightarrow \sin \phi = \cos \phi \Leftrightarrow \tan \phi = 1 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \text{ eller } \frac{5\pi}{4}.$$

Detta ger följande värden för $x(\phi) = \cos \phi$ och $y(\phi) = \sin \phi$:

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ eller } x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Svar: Funktionens max på D är $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ och min $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$.

Exempel 61. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ då $x^2 + y^2 \leq 1$.

Vi söker först eventuella kritiska punkter i definitionsmängdens inre

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = 1 + 2x = 0 \\ f'_2(x, y) = 1 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{2}.$$

Vi parametriserar därefter randen enligt $x = \cos \phi$, $y = \sin \phi$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

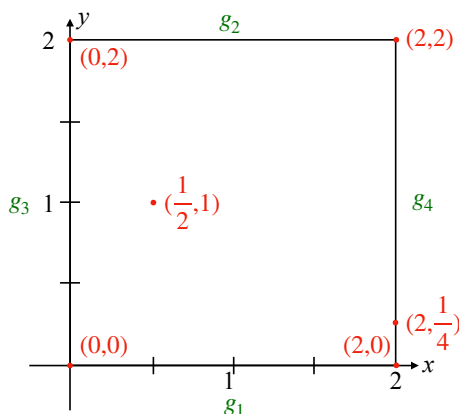
$$g(\phi) = f(\cos \phi, \sin \phi) = \cos \phi + \sin \phi + \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1 + \cos \phi + \sin \phi$$

$$g'(\phi) = -\sin \phi + \cos \phi = 0 \Rightarrow \tan \phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$\phi = \frac{\pi}{4} \text{ ger } (x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ och } \phi = \frac{5\pi}{4} \text{ ger } (x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Funktionsvärdena i extrempunkterna är $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 + \sqrt{2}$ respektive $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \sqrt{2}$. Maximum blir $1 + \sqrt{2}$ och minimum blir $-\frac{1}{2}$ (eftersom $-\frac{1}{2} < 1 - \sqrt{2}$).

Exempel 62. Bestäm största och minsta värde för $f(x, y) = xy^2 - x - y$ i kvadraten $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.



Figur 40: Illustration till uppgiften i Exempel 62.

1. **Inre punkter.** Vi undersöker om funktionen har några kritiska punkter i D° och deriverar partiellt:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= y^2 - 1 = 0 \\ f'_2(x, y) &= 2xy - 1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \pm 1 \\ x &= \frac{1}{2y} \end{aligned} \quad (\text{kritiska punkter } (\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -1))$$

Endast den första av de kritiska punkterna ligger inom definitionsmängden.

2. **Rand.** Vi parametriserar de fyra randbitarna och undersöker om f har några kritiska punkter på dessa.

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(x, 0), & \text{ger } g_1(x) &= -x & \text{för } 0 \leq x \leq 2 & & (\text{inga kritiska punkter}) \\ g_2(x) &= f(x, 2), & \text{ger } g_2(x) &= 3x - 2 & \text{för } 0 \leq x \leq 2 & & (\text{inga kritiska punkter}) \\ g_3(y) &= f(0, y), & \text{ger } g_3(y) &= -y & \text{för } 0 \leq y \leq 2 & & (\text{inga kritiska punkter}) \\ g_4(y) &= f(2, y), & \text{ger } g_4(y) &= 2y^2 - 2 - y & \text{för } 0 \leq y \leq 2 & & (\text{kritisk punkt i } (2, \frac{1}{4})) \end{aligned}$$

så på randen har vi bara den kritiska punkten $(2, \frac{1}{4})$

3. **Hörn.** Randstyckena har ändpunkter i hörnen $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$.

Vi undersöker slutligen funktionsvärdena i de sex punkter där maximum eller minimum kan inträffa: $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = -2$, $f(2, 0) = -2$, $f(2, 2) = 4$, $f(\frac{1}{2}, 1) = -1$, $f(2, \frac{1}{4}) = -\frac{17}{8}$, vilket ger oss ett maximum 4, och ett minimum $-\frac{17}{8}$.

Om en funktion f av flera variabler är definierad på ett icke-kompakt område är det inte säkert att den har ett största eller minsta värde, utan detta måste motiveras på något sätt.

Exempel 63. Avgör om funktionen $f(x, y) = \frac{4x - 3}{1 + x^2 + y^2}$ har ett maximum och ett minimum på området $-1 \leq y \leq 1$.

Om funktionen är begränsad för stora värden på $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, så kommer eventuella maximum eller minimum att finnas på den kompakta mängden $-1 \leq y \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq r$ och på denna har

varje kontinuerlig funktion maximum och minimum

$$|f(x, y)| = \frac{|4x - 3|}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{|4x| + 3}{1 + r^2} \leq \frac{4r + 3}{1 + r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Detta implicerar att f är begränsad för stora r , och följaktligen att f har max och min.

Exempel 64. Visa att om $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, då $f(x, y) = (x + 2y)e^{-(x^2 + y^2)} \rightarrow 0$. En bra lösning kan vara att gå över till polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (då gäller förstås $x^2 + y^2 = r^2$) och visa att $f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow \infty$, och detta oavsett θ :

$$f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta + 2r \sin \theta)e^{-r^2} = (\cos \theta + 2 \sin \theta)re^{-r^2}.$$

$$0 \leq |f(x(r, \theta), y(r, \theta))| = |\cos \theta + 2 \sin \theta|re^{-r^2} \leq 3 \frac{r}{e^{r^2}} \rightarrow 0$$

då $r \rightarrow \infty$ (ett standardgränsvärde i oändligheten). Begränsning för sinus och cosinus kommer från $|\cos \theta| \leq 1$ och $|\sin \theta| \leq 1$ för alla θ , samt triangelolikheten.

Lagranges metod variant 1

Vi ska nu presentera alternativa metoder för undersökning av extrempunkter till funktioner på en rand till ett område. Dessa metoder heter Lagranges multiplikatorer och presenteras här i tre varianter som lämpar sig till olika situationer.

Vi ska i fortsättningen studera problemet att maximera eller minimera en funktion under ett eller flera **bivillkor** (*constraints*). Ett typexempel är:

$$\text{maximera } f(x, y) \quad \text{givet att } g(x, y) = C.$$

Bivillkoret $g(x, y) = C$ definierar en kurva i planet. Vi börjar med ett exempel där det, för kurvan $g(x, y) = C$, är lätt att lösa ut y som en funktion av x . Problemet blir då genast endimensionellt.

Exempel 65. Bestäm det kortaste anståndet från origo till kurvan $xy = 1$, $x, y > 0$.

Vi vill minimera $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, eller ekvivalent $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $xy = 1$. Villkoret kan skrivas $y = \frac{1}{x}$, så vi vill alltså minimera

$$g(x) = f(x, \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (\text{för } x > 0)$$

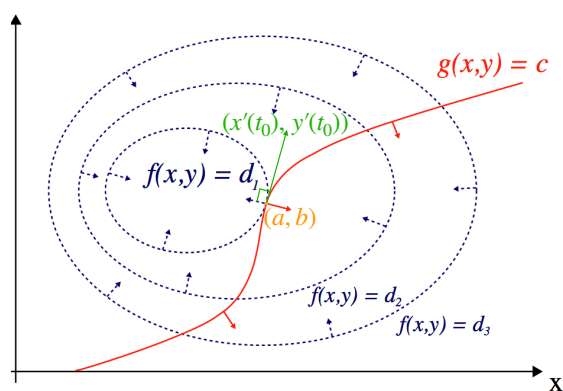
$$g'(x) = 2x - 2x^{-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(1 - \frac{1}{x^4}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

notera att de två första möjliga värdena på x ej uppfyller initialvillkoret $x, y > 0$. I $x = 1$ får vi avståndet $\sqrt{1^2 + (\frac{1}{1})^2} = \sqrt{2}$ och det är det kortaste avståndet eftersom $g''(1) = 2 + \frac{6}{1^4} = 8 > 0$.

Ett alternativ som kan vara användbart om det inte går att lösa ut y som en funktion av x i $g(x, y) = C$ är att använda en parametrisering av $g(x, y) = C$. Om vi exempelvis vill maximera $f(x, y) = (2x + 3y + 1)^2$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ kan vi sätta $x = \cos t$ och $y = \sin t$ och istället försöka maximera $g(t) = f(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Detta envariabelproblem liknar de vi stötte på när vi sökte extremvärden till randen av kompakta områden. Räkningarna blir dock ganska invecklade, så vi ska ta fram en mer generell metod som ger enklare räkningar.

Här börjar vi med Lagranges metod variant 1

Antag att vi på något sätt vet att $f(x, y)$ har ett maximum på kurvan $g(x, y) = 0$. Om maximumet inträffar i punkten (a, b) och $\nabla g(a, b) \neq 0$, så kan kurvan nära (a, b) parametriseras som $(x(t), y(t))$ med $(x(t_0), y(t_0)) = (a, b)$ (följer av implicita funktionssatsen). Funktionen $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ har då maximum i $t = t_0$, så



Figur 41: Den röda kurvan visar bivillkoret $g(x, y) = c$. De blåa kurvorna är nivåkurvor för $f(x, y)$. Punkten där det röda bivillkoret tangerar en blå nivåkurva är det maximipunkten för $f(x, y)$ längs bivillkoret, eftersom $d_1 > d_2$. (Bild: Wikipedia.)

$$0 = \varphi'(t_0) = f'_1(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f'_2(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) = \nabla f(a, b) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Men $(x'(t_0), y'(t_0))$ är tangentvektorn till kurvan $g(x, y) = 0$ i (a, b) . Denna vektor är vinkelrät mot $\nabla g(a, b)$, så enligt ekvationen ovan så är

$$\nabla f(a, b) \text{ och } \nabla g(a, b) \text{ parallella.}$$

Detta är i sin tur ekvivalent med $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$, eller

$$\begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

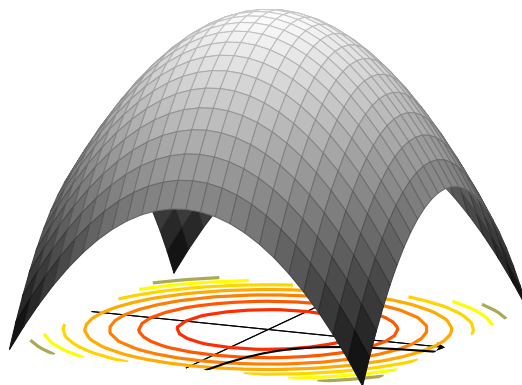
Maximum (minimum) av $f(x, y)$ givet att $g(x, y) = 0$ kan alltså inträffa i följande punkter:

1. Ändpunkter till $g(x, y) = 0$
2. Punkter där $\nabla g(x, y) = \vec{0}$ (eller ej exist.)
3. Punkter som uppfyller ekvationssystemet (metoden i Adams)

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = \lambda g'_1(x, y) \\ f'_2(x, y) = \lambda g'_2(x, y) \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ekvivalent (som på föreläsningar):

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_1(x, y) & f'_2(x, y) \\ g'_1(x, y) & g'_2(x, y) \end{vmatrix} = 0. \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

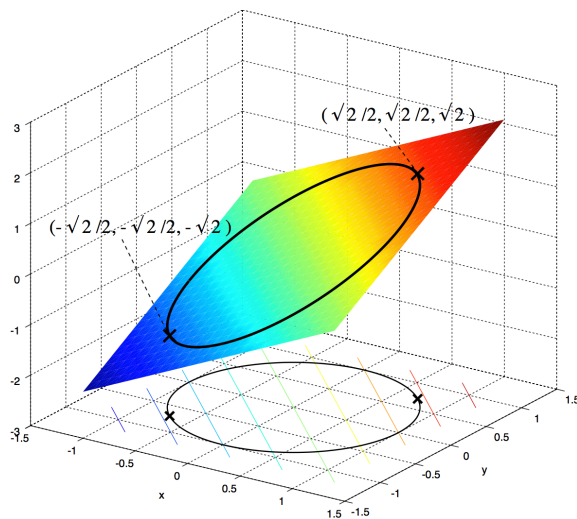


Ekvationssystemet kan också skrivas kortfattat som $\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \vec{0}$ där $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ kallas för **Lagrangefunktionen**. I figuren ovan ser vi paraboloiden som ges av $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 9$ med tillhörande nivåkurvor projicerade på xy -planet. Vi ser även nivåkurvan $g(x, y) = 0$ till funktionen g (svart) som tangerar en av nivåkurvor till f .

Titta också gärna på en alternativ förklaring för metoden, utan den implicita funktionssatsen och parametrisering för bivillkoret i Travis Topic 16, minuterna 19:00–26:00. Bilderna till två följande exemplen kommer från Wikipedia och referensen för källorna finns på:

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier

Exempel 66. (Exempel 60, löst med en ny metod.) Maximera och minimera $f(x, y) = x + y$ på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$, alltså på nivåkurvan $g(x, y) = 0$ till $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

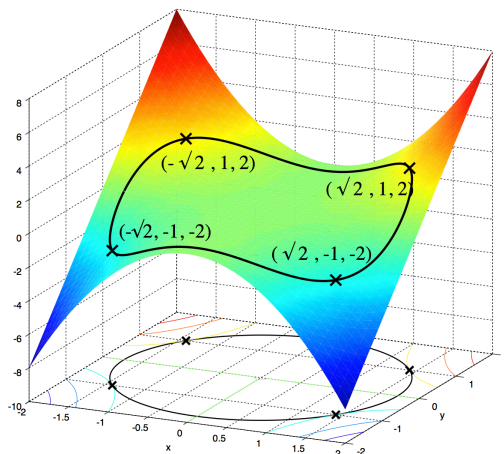


Figur 42: Ex. 66. (Bild: Wikipedia.)

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_1(x, y) & f'_2(x, y) \\ g'_1(x, y) & g'_2(x, y) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ eller } x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Svar: Funktionen max på enhetscirkeln är $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ och min $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$.

Exempel 67. Maximera och minimera $f(x, y) = x^2y$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 3$, alltså på nivåkurvan $g(x, y) = 0$ till $g(x, y) = x^2 + y^2 - 3$.



Figur 43: Ex. 67. (Bild: Wikipedia.)

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_1(x, y) & f'_2(x, y) \\ g'_1(x, y) & g'_2(x, y) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4xy^2 - 2x^3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$4xy^2 - 2x^3 = 2x(2y^2 - x^2) = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ eller } x^2 = 2y^2).$$

Insättning av dessa två möjligheter i villkoret $x^2 + y^2 = 3$ ger sex kritiska punkter:

$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3}), (\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, -1).$$

De första två elimineras direkt, eftersom där är funktionens värde lika med noll, medan det är både positivt och negativt i de övriga fyra, vilket betyder att de första två punkter ger varken det minsta eller det största värdet på cirkeln. Vi beräknar värdena i de övriga fyra punkter (se bilden) och så är vi redo att formulera svaret:

Svar: Funktionen max på cirkeln är 2 (i två punkter) och min -2 (i två punkter). Se bilden!

Exempel 68. Maximera och minimera $f(x, y) = (2x + 3y + 1)^2$ för $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Eftersom enhetscirkeln är en sluten kurva med nollskild gradient, så uppfyller alla extrempunkter ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = \lambda g'_1(x, y) \\ f'_2(x, y) = \lambda g'_2(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2x + 3y + 1)2 = \lambda 2x \\ 2(2x + 3y + 1)3 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Om $\lambda \neq 0$, dividerar vi den andra ekvationen med den första och vi får ekvationen

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = \frac{3}{2}x \Rightarrow x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{13}{4}x^2 = 1 \\ \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} &\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) \text{ eller } \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right). \end{aligned}$$

Ekvationssystemet har också lösningen $\lambda = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$. För denna lösning gäller uppenbarligen $f(x, y) = 0$. De övriga funktionsvärdena är $f(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}) = (\sqrt{13} + 1)^2$ och $f(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}) = (-\sqrt{13} + 1)^2$, så maximum är $(\sqrt{13} + 1)^2$ och minimum är 0.

Till slut några ord om begreppen *inre punkt*, *randpunkt*, *öppen mängd*, *sluten mängd*, *randen* och på vilket sätt dessa begrepp är relativa:

	$\mathbb{R}^1$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
öppen omgivning	 ett intervall utan randen (2 ändpunkter)	 en cirkelskiva utan randen (cirkeln)	 ett klot utan randen (sfären)
	öppen mängd (alla punkter kommer in med en viss omgivning)	 varken öppen eller sluten. Inga punkter kommer in med en omgivning. Två randpunkter saknas. Mängden består enbart av randpunkter i $\mathbb{R}^2$.	 varken öppen eller sluten. Inga punkter kommer in med en omgivning. Två randpunkter saknas. Mängden består enbart av randpunkter i $\mathbb{R}^3$.
	Existerar ej	öppen mängd (alla punkter kommer in med en viss omgivning)	varken öppen eller sluten. Inga punkter kommer in med en omgivning. Många randpunkter saknas. Mängden består enbart av randpunkter i $\mathbb{R}^3$. Varje klot med mittpunkten i en punkt på cirkelskivan innehåller både punkter från cirkelskivan och utanför den (på både "baksidan" och "framsidan"), alltså är per definition en randpunkt!
	Existerar ej	Existerar ej	öppen mängd (alla punkter kommer in med en viss omgivning)

Figur 44: Relativitet av vissa begrepp. Viktigaste budskap: något som är en öppen mängd i $\mathbb{R}^2$ (t.ex. öppen cirkelskiva) är bara randen i $\mathbb{R}^3$ (respektive: ett öppet intervall är öppet i $\mathbb{R}^1$, medan en kurva – trots att den kan vara en kontinuerlig avbildning av intervallet – är bara randmängden i $\mathbb{R}^2$); detta är jätteviktigt, eftersom det bestämmer vilka metoder vi väljer medan vi letar efter extrempunkter till flervariabelfunktioner på olika mängder. Stationära punkter och Hessianen undersöks bara för öppna mängder, på randen är det Lagrange som gäller! (Bild: Hania.)

- **Omgivning**: ett öppet (utan ändpunkter) intervall i $\mathbb{R}$, en cirkelskiva utan rand (cirkeln) i $\mathbb{R}^2$, ett klot utan rand (sfären) i $\mathbb{R}^3$.
- **Inre punkt** i en mängd: en punkt som kommer in i mängden med en viss (hell!) omgivning.
- **Randpunkt** till en mängd: en punkt vars varje omgivning innehåller både element från mängden och utanför mängden.
- **Öppen mängd** består av enbart inre punkter, alltså innehåller **inga randpunkter**
- **Sluten mängd** innehåller **alla sina randpunkter**

Det finns förstås mängder som är **varken öppna eller slutna** (om de innehåller vissa sina randpunkter, men inte alla).

Lagranges metod variant 2

Lagranges multiplikator metod fungerar på samma sätt om vi vill maximera funktionen $f(x, y, z)$ på ytan $g(x, y, z) = 0$, vilket motsvarar att vi maximerar / minimerar en trevariabelfunktion på nivåytan till en annan trevariabelfunktion. Även här är villkoret att gradienterna till båda nivåytorna ska vara parallella i extrempunkter (eftersom nivåytorna måste tangera varandra). Vi får då istället ett ekvationssystem med 4 ekvationer och 4 variabler.

$$\begin{cases} f'_1(x, y, z) = \lambda g'_1(x, y, z) \\ f'_2(x, y, z) = \lambda g'_2(x, y, z) \\ f'_3(x, y, z) = \lambda g'_3(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Även här kan man räkna utan λ , fast det finns ingen möjlighet att skriva upp en determinant (vi har bara två rader med gradienter, medan varje gradient har tre komponenter: helheten är inte kvadratisk!). Man kan ofta ställa upp en proportion som uttrycker faktum att gradienterna är parallella, men **man får aldrig någonsin sätta en variabel i nämnaren utan vidare!** En variabel kan ju vara lika med noll!

Här blir det också extra viktigt att förstå begreppet *rand* och faktum att begreppet är relativt och beror på om vi analyserar en mängd i $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. (Se förklaringen i bilden på s. 95)

Exempel 69. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ med bivillkoret $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, alltså på sfären med mittpunkten i origo och radien $\sqrt{14}$.

Vi använder Lagranges metod variant 2. Extrema finns där gradienterna till f och g är parallella.

$$\nabla f = (1, 2, 3), \quad \nabla g = (2x, 2y, 2z).$$

Att vektorerna är parallella betyder att följande proportion gäller (OBS: bara konstanter i nämnaren!):

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1} = \frac{2y}{2} = \frac{2z}{3}$$

$x = y = z = 0$ uppfyller proportionen, men punkten $(0, 0, 0)$ inte ligger på sfären, är alltså fullständigt ointressant för oss. Om $\nabla g \neq \vec{0}$, då implicerar proportionen att

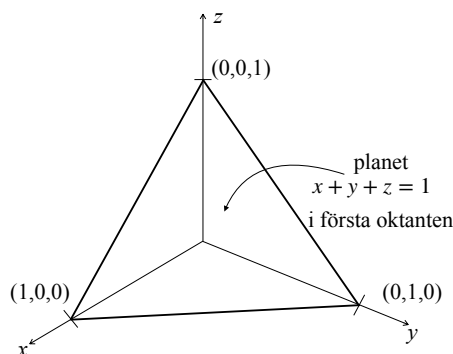
$$2x = y = \frac{2}{3}z \quad \Leftrightarrow \quad (y = 2x \quad \text{och} \quad z = \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x).$$

Insättning av dessa i bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ ger

$$x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad 14x^2 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1 \quad \text{eller} \quad x = -1).$$

$x = 1$ ger punkten $(1, 2, 3)$ och $f(1, 2, 3) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$, medan $x = -1$ ger punkten $(-1, -2, -3)$ och $f(-1, -2, -3) = -14$.

Svar: Funktionens maximum på sfären är 14 och minimum -14 .



Figur 45: Planet i exemplet 70. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Exempel 70. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}^2$ i området D där

$$D = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}.$$

Området D är en (kompakt!) triangel i första oktanten, f är kontinuerlig, alltså uppnår garanterat sina max och min i D .

Vi observerar att i första oktanten (där $x, y, z \geq 0$) funktionen $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}^2$ antar enbart icke-negativa värden och att dessutom $f(x, y, z) = 0$ om åtminstone en av variablerna är lika med noll, och bara då! Detta betyder att

$$\min_D f(x, y, z) = 0.$$

Maximum måste antas i en punkt där

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0.$$

I maximipunkten måste $\nabla f \parallel \nabla g$ (Lagrange!).

$$\nabla f = \left(\frac{yz^2}{2\sqrt{x}}, \sqrt{x}z^2, 2\sqrt{xyz} \right), \quad \nabla g = (1, 1, 1).$$

Att $\nabla f \parallel \nabla g$ betyder att följande proportion gäller:

$$\frac{\frac{yz^2}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{\sqrt{x}z^2}{1} = \frac{2\sqrt{xyz}}{1}.$$

Vi multiplicerar hela proportionen med $\frac{2\sqrt{x}}{z}$ (vi vet redan att alla intressanta för oss variabler är nollskilda!) och får:

$$yz = 2xz = 4xy,$$

vilket ger (ty $x, y, z \neq 0$) $y = 2x$ och $z = 4x$, alltså, från villkoret $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$:

$$1 = x + 2x + 4x = 7x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{7}.$$

Vi har därför den unika lösningen $(x, y, z) = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$, vilken måste vara maximipunkten.

Svar: Det minimala värdet är 0. Det maximala värdet är $f(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}) = \frac{32}{2401}\sqrt{7}$.

Lagranges metod variant 3

Låt oss härnäst undersöka problemet att maximera $f(x, y, z)$ givet två villkor $g(x, y, z) = 0$ och $h(x, y, z) = 0$. De båda villkoren definierar en kurva i rummet (skärningskurvan till nivåytorna till två trevariabelfunktioner). I varje punkt (x, y, z) på kurvan är både $\nabla g(x, y, z)$ och $\nabla h(x, y, z)$ vinkelrät mot kurvan, så vektorn $T(x, y, z) = \nabla g(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z)$ är parallell med kurvans tangent i (x, y, z) . Enligt resonemanget när vi införde multiplikatormetoden, så måste det i extrempunkten (a, b, c) gälla att $\nabla f(a, b, c) \cdot T(a, b, c) = 0$, d.v.s.

$$\nabla f(a, b, c), \quad \nabla g(a, b, c), \quad \nabla h(a, b, c) \quad \text{ligger i samma plan.}$$

De tre gradienterna är linjärt beroende, vilket är ekvivalent med att determinanten av en matris med $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ på var sin rad måste vara noll i ett maximum/minimum:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_1(x, y, z) & f'_2(x, y, z) & f'_3(x, y, z) \\ g'_1(x, y, z) & g'_2(x, y, z) & g'_3(x, y, z) \\ h'_1(x, y, z) & h'_2(x, y, z) & h'_3(x, y, z) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Exempel 71. Maximera och minimera $f(x, y, z) = y$ under bivillkoren

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \quad \text{och} \quad h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Ekvationen $g(x, y, z) = 0$ definierar ett plan och $h(x, y, z) = 0$ en sfär, så skärningskurvan mellan dessa funktioner blir en cirkel, dvs en kompakt mängd. Det sökta maximum och minimum existerar således. Eftersom $\nabla f(x, y, z) = (0, 1, 0)$, $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$ och $\nabla h(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ är linjärt beroende så gäller:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2x - 2z. \quad \begin{array}{l} \text{Vi får } x = z, \text{ vilket insatt i } g \text{ och} \\ h \text{ ger ekvationssystemet} \end{array} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Vi sätter in $y = 1 - 2x$ i $2x^2 + y^2 = 1$ och får då:

$$2x^2 + (1 - 2x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x(6x - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x = 0 \quad \text{ger} \quad z = 0 \quad \text{och} \quad y = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f(0, 1, 0) = 1 \quad (\text{maximum})$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{ger} \quad z = \frac{2}{3} \quad \text{och} \quad y = 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}. \quad (\text{minimum})$$

Svar: Det minimala värdet är $-\frac{1}{3}$. Det maximala värdet är 1.

Rekommenderade uppgifter efter F8

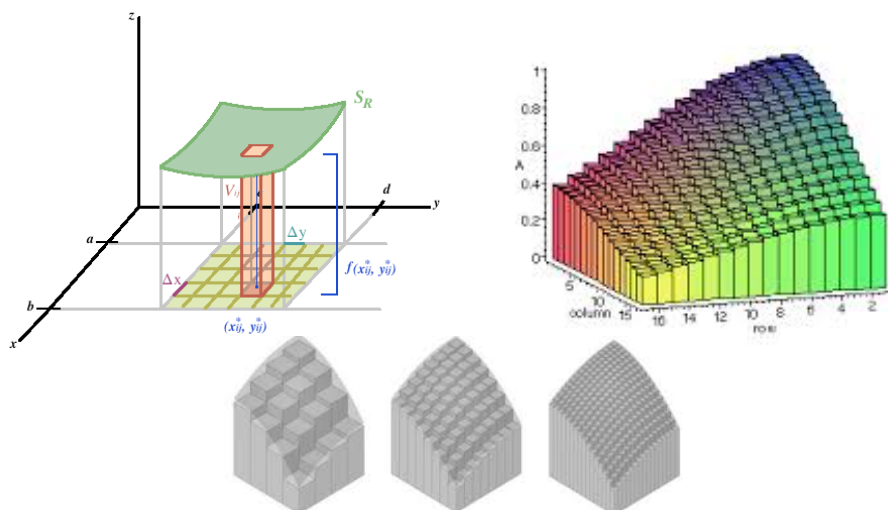
13.1: 1, 5, 9, 19, 26. **13.2:** 1, 3, 5, 9, 17. **13.3:** 1, 3, 5, 9. **Extra upp.: 13.1:** 13, 25, 29. **13.2:** 6, 10, 11, 13. **13.3:** 6, 11.

Föreläsning 9: Dubbelintegraler

Adams 14.1, 14.2, 14.4

Dubbelintegraler

Vi införde integraler för att kunna lösa problemet att räkna ut arean under grafen till en funktion i en variabel. Vi har tidigare sett att grafen till en funktion av två variabler kan tolkas som en yta i rummet. Vi kan använda integraler också för att räkna ut volymen under grafen till en funktion av två variabler. Vi börjar med ett enkelt specialfall.



Figur 46: Riemannkonstruktion: dubbelintegral som ett sätt att beräkna volym (med tecken!) mellan funktionens $z = f(x, y)$ graf och xy -planet. (Bild: Från nätet.)

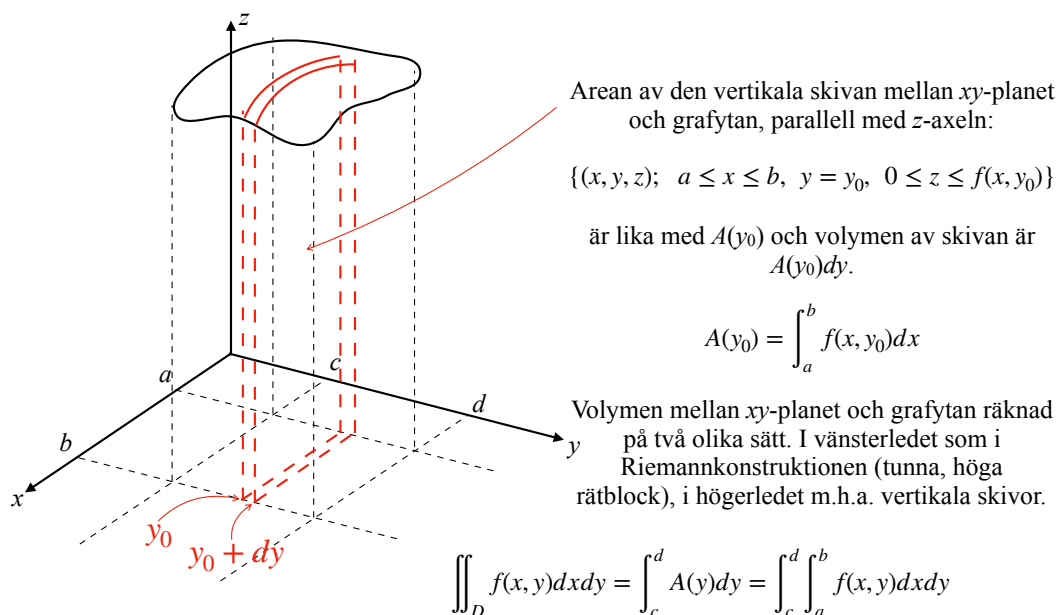
Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en rektangel i $\mathbb{R}^2$. Låt P_1 vara en partition av $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) och låt P_2 vara en partition av $[c, d]$ ($c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$). $P_1 \times P_2$ är en partition av Δ i delrektanglar Δ_{ij} . En funktion $\phi(x, y)$ kallas för en *trappstegsfunktion* om det finns en partition $P_1 \times P_2$ av Δ sådan att $\phi(x, y) = c_{ij}$ för alla $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Volymen under en trappstegsfunktion ges direkt av

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \underbrace{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}_{\text{Arean av } \Delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \quad \text{vilket betecknas} \quad \underbrace{\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy}_{\text{Dubbelintegral}}$$

Dubbelintegraler kan beräknas genom att vi först integrerar över den ena variabeln, och sedan över den andra, d.v.s.:

Sats 18. För trappstegsfunktioner ϕ gäller

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \phi(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \phi(x, y) dx \right) dy.$$



Figur 47: Sambandet mellan dubbelintegral och itererade integraler. (Bild: Hania.)

Beviset följer av att vi först kan summera över i och sedan över j och vice versa:

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right).$$

I det första fallet summerar vi först alla element i varje rad och adderar senare alla dessa summor. I det andra fallet summerar vi alla element i varje kolonn först och senare adderar alla dessa summor. Resultatet blir samma. Notera att integralen $\int_a^b \phi(x, y) dx$ ger tvärsnittsytan av kroppen under grafen till ϕ skuren så att y hålls konstant. Därmed gäller:

$$\int_c^d \left(\int_a^b \phi(x, y) dx \right) dy = \int_c^d A(y) dy,$$

vilket är formeln för volymen av en kropp med tvärsnitt $A(y)$ som vi härledde i envariabelanalysen. För att visa den andra formeln skär vi grafytan med vertikala plan med en konstant x .

Låt nu f vara en godtycklig begränsad funktion definierad på Δ . Då finns det med säkerhet två trappstegsfunktioner ϕ och ψ sådana att

$$\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta.$$

Definition 27. Den begränsade funktionen f sägs vara integrerbar över rektangeln Δ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns trappstegsfunktioner ϕ, ψ som uppfyller olikheten ovan, samt

$$\left| \iint_{\Delta} \psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy \right| < \varepsilon.$$

Dubbelintegralen av ψ blir som en översumma till f och dubbelintegralen av ϕ blir som motsvarande undersumma, så precis som för enkelintegralen är en funktion integrerbar om under-

och översumman kan komma godtyckligt nära varandra.

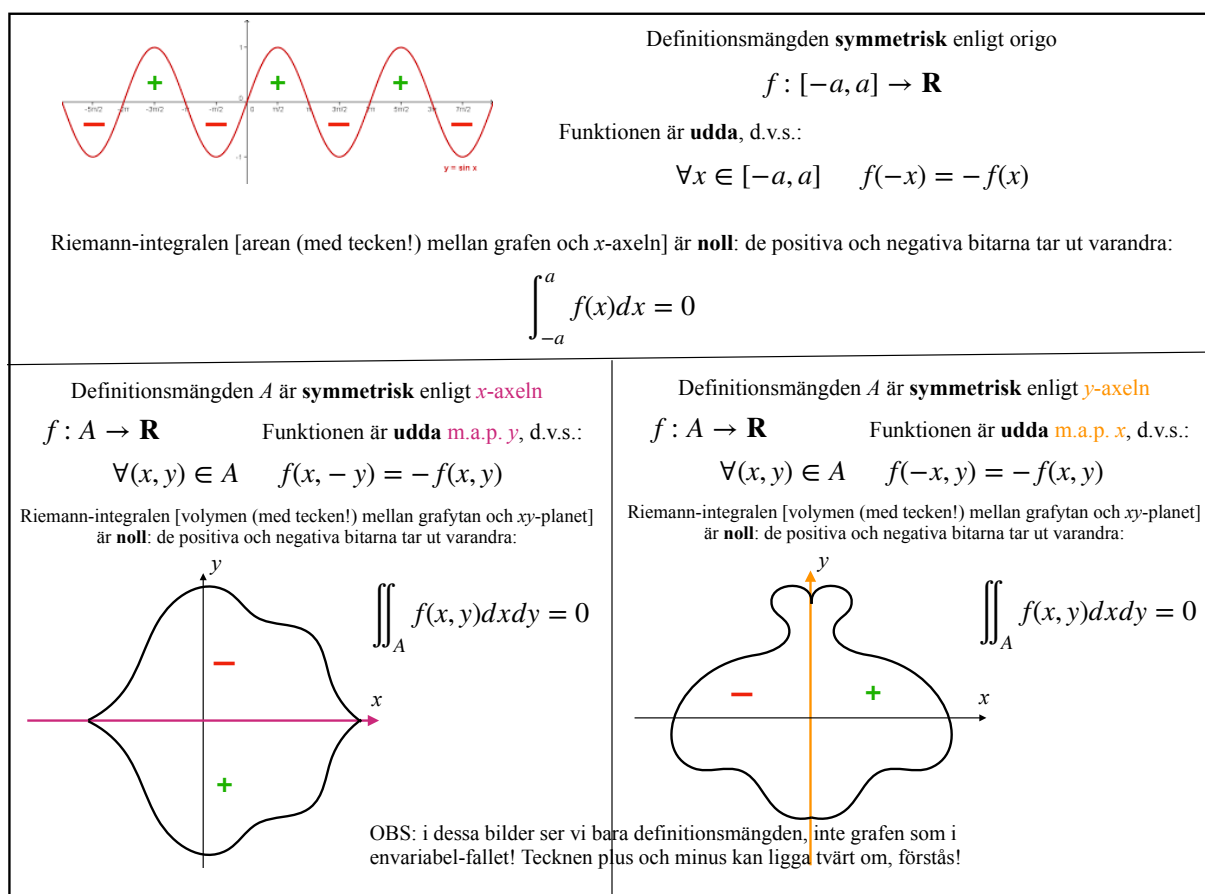
Sats 19. Om f är integrerbar över Δ så finns det exakt ett tal I sådant att

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy \leq I \leq \iint_{\Delta} \psi(x, y) dx dy$$

Vi låter därför talet I i ovanstående sats betecknas $I = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$. Avslutningsvis några egenskaper för dubbelintegraler (av integrerbara funktioner)

1. $\iint_{\Delta} (Af(x, y) + Bg(x, y)) dx dy = A \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy + B \iint_{\Delta} g(x, y) dx dy$
2. $[\forall (x, y) \in \Delta \quad f(x, y) \leq g(x, y)] \Rightarrow \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\Delta} g(x, y) dx dy$
3. $\left| \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| dx dy$ (Bevisas först för trappstegsfunktioner)

Egenskaperna ovan heter *linjäriteten*, *monotoniciteten* och *triangel-olikheten*.



Figur 48: *Integration by inspection* som i Adams 14.1 upp.13–22. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vi skulle vilja veta vilka funktioner som är integrerbara.

Sats 20. Om f är kontinuerlig på Δ , så är f integrerbar över Δ .

Precis som i envariabelfallet bygger beviset på att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd (rektangeln Δ är kompakt) är likformigt kontinuerlig.

Det är ganska enkelt att visa att dubbelintegralen av alla integrerbara funktioner kan beräknas som en upprepande enkelintegral (**Fubinis sats**) och vi tar ett exempel på detta.

Exempel 72. Beräkna

$$\iint_{\Delta} \frac{x}{(1+xy)^2} dx dy, \quad \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1\}.$$

Integranden är kontinuerlig och därmed integrerbar. Vi integrerar först med avseende på y .

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{x}{(1+xy)^2} dx dy &= \int_1^3 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)^2} dy \right) dx = \int_1^3 \left[-\frac{1}{1+xy} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{1}{1+x} + 1 \right) dx = [x - \ln|1+x|]_1^3 \\ &= 3 - 2\ln(2) - 1 + \ln(2) = 2 - \ln(2). \end{aligned}$$

Vi hade lika gärna kunnat börja med att integrera över x , men då hade vi behövt partialbråksuppdelning av integranden och beräkningarna hade blivit mycket mer invecklade.

På samma sätt som **arean mellan graferna** till funktioner $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att $f(x) \geq g(x)$ för alla $x \in [a, b]$ uttrycks med formeln

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

kan **volymen mellan grafytorna** till tvåvariabelfunktioner $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att $f(x, y) \geq g(x, y)$ för alla $(x, y) \in D$ uttryckas med formeln

$$V = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy.$$

Fubinis sats på x - och y -enkla områden

För att kunna integrera funktioner över andra områden än rektanglar inför vi följande definition:

Definition 28. Låt f vara en begränsad funktion på den **begränsade** mängden D . Eftersom D är begränsad så finns det en rektangel R sådan att $D \subset R$. Vi inför den utvidgade funktionen

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

och så säger vi att f är integrerbar på D om $\hat{f}$ är integrerbar på R och vi definierar¹²

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R \hat{f}(x, y) dx dy.$$

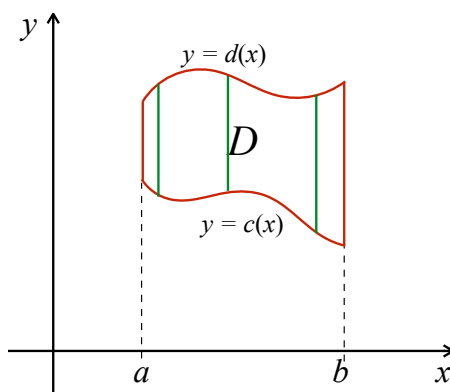
Men även om f är kontinuerlig på D så kommer bara $\hat{f}$ att vara kontinuerlig om $f(x, y) \rightarrow 0$ då (x, y) närmar sig randen ∂D . Funktionen $\hat{f}$ kommer dock ändå att vara integrerbar om randen är en så kallad nollmängd, dvs. en mängd som vi kan täcka med ändligt många rektanglar med total area ε . Man kan visa att grafen till en kontinuerlig funktion är en nollmängd (även detta bevis utnyttjar likformig kontinuitet) och därmed gäller följande, mycket användbar sats.

Sats 21 (Fubini; Adams 14.2.2). *Om f är kontinuerlig på mängden*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

(ett y -enkelt område) för två kontinuerliga funktioner c och d , så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



Figur 49: Ett y -enkelt område D . (Bild: Hania, med KeyNote.)

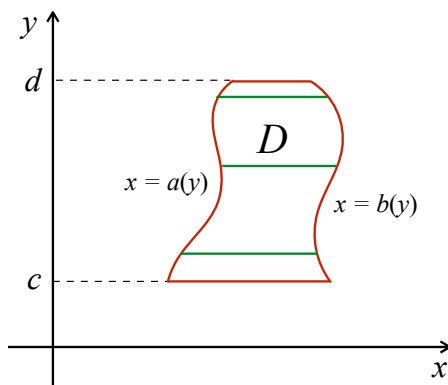
På samma sätt gäller att om det finns två kontinuerliga funktioner a och b , sådana att

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \leq x \leq b(y), \quad c \leq y \leq d\}$$

¹²På mängden D är ju båda funktioner lika varandra, och utanför D har $\hat{f}$ värdet noll. Det är därför rimligt att volymen (med tecken) mellan deras grafer och xy -planet är lika varandra.

(ett x -enkelt område; se bilden) så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



Figur 50: Ett x -enkelt område D . (Bild: Hania, med KeyNote.)

För bra illustrativa förklaringar för satsen ovan se Travis Topic 18.

De flesta områden kan skrivas som en ändlig union av ovanstående två typer av områden, x -enkla och y -enkla. Notera också att om $D = D_1 \cup D_2$ där $D_1 \cap D_2$ är en nollmängd så gäller

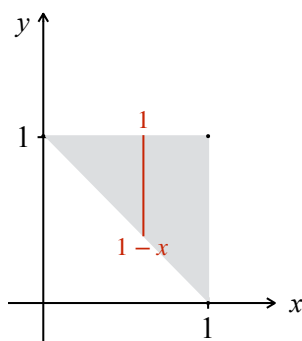
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Vi inleder med två räkneexempel med dubbelintegraler över icke-rektangulära områden i planet.

Exempel 73. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0, 1)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. Se bilden med integreringsområdet.



Figur 51: Integreringsområde D , Exempel 73. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Området begränsas i y -led av $1 - x \leq y \leq 1$ och i x -led av $0 \leq x \leq 1$, så om vi först integrerar med avseende på y och sedan med avseende på x , så får vi:

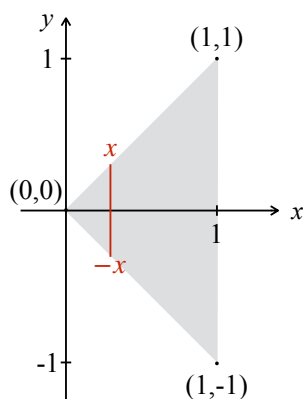
$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{(1-x)^3}{3} + x^3 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{(1-x)^4}{12} + \frac{x^4}{4} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

I exemplet ovan hade vi kunnat använda $1 - y \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och istället först integrerat över x och sedan över y . Räkningarna hade dock blivit identiska fast med y utbytt mot x och vice versa. Som synes i nästa exempel kan det dock vara omöjligt att beräkna vissa integraler om vi börjar med fel variabel.

Exempel 74. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{x^2} dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(1,-1)$. Se bilden med integreringsområdet.



Figur 52: Integreringsområde D , Exempel 74. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Primitiv funktion till $f(x) = e^{x^2}$ kan inte beräknas med metoder som vi behärskar, så vi måste börja med att integrera med avseende på y .

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x}^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[y e^{x^2} \right]_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^1 2x e^{x^2} dx \\ &= \left[e^{x^2} \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1. \end{aligned}$$

Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Precis som i envariabelfallet kan beräkning av dubbelintegraler ibland förenklas avsevärt om vi gör ett variabelbyte från (x, y) till ett annat par av variabler, exempelvis polära koordinater (r, θ) . Då kan man ofta omvandla knepiga integreringsområden i axelparallella rektanglar i variablerna r och θ . En fantastisk motivering av nyttan med detta koordinatbyte finns hos Travis Topic 18, minuterna 39–53. Travis beräknar då utan variabelsubstitution volymen mellan enhetscirkelskivan $D : x^2 + y^2 = 1$ och grafytan till $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Beräkningarna blir alldeles förskräckliga.

För att ta fram formeln för variabelbyte i dubbelintegraler måste vi dock först undersöka Riemannsummor. Låt f vara en funktion som är definierad på en mängd D . En Riemannsumma till f är en summa

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) (\text{Areal av } D_k) \quad \text{där } (x_k, y_k) \in D_k.$$

Man kan visa (återigen med likformig kontinuitet) att om f är kontinuerlig så konvergerar Riemannsumman till f mot

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

när största $\text{diam}(D_k) \rightarrow 0$ (dvs största avståndet mellan två punkter i D_k).

Låt nu $x = x(u, v)$ och $y = y(u, v)$ vara en bijektiv avbildning mellan området E i uv -planet och området D i xy -planet. Varje uppdelning av D i småbitar D_k motsvarar en uppdelning av E i småbitar E_k . Vi undersöker hur arean av D_k och E_k är relaterade.

När vi studerade Jacobimatrisen (Föreläsning 6) såg vi att areaförstoringen vid en avbildning var lika med determinanten av Jacobimatrisen (Jacobianen). Alltså gäller:

$$(\text{Areal av } D_k) = (\text{Areal av } E_k) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}_{\neq 0 \text{ för bijektiva avbildningar}}, \quad \text{där} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

(Absolutbelopp kring Jacobiandeterminanten: arean kan ju inte vara negativ.) Från areaförstöringsformeln får vi följande relation mellan Riemannsummor uttryckta i (x, y) och (u, v) :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) (\text{areal av } D_k)}_{\iint_D f(x, y) dx dy} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^n f(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k)) (\text{areal av } E_k) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}_{\iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv}$$

Sats 22 (Adams 14.4.4). *Om $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ är en bijektiv funktion med kontinuerliga partiella derivator och om $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, $\forall (u, v) \in E$ utom på en nollmängd, så är:*

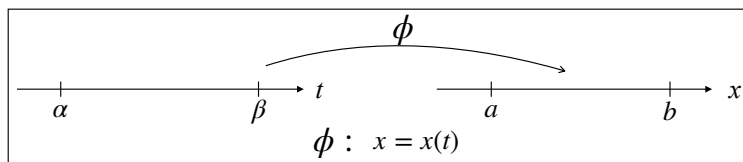
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

för alla integrerbara funktioner f .

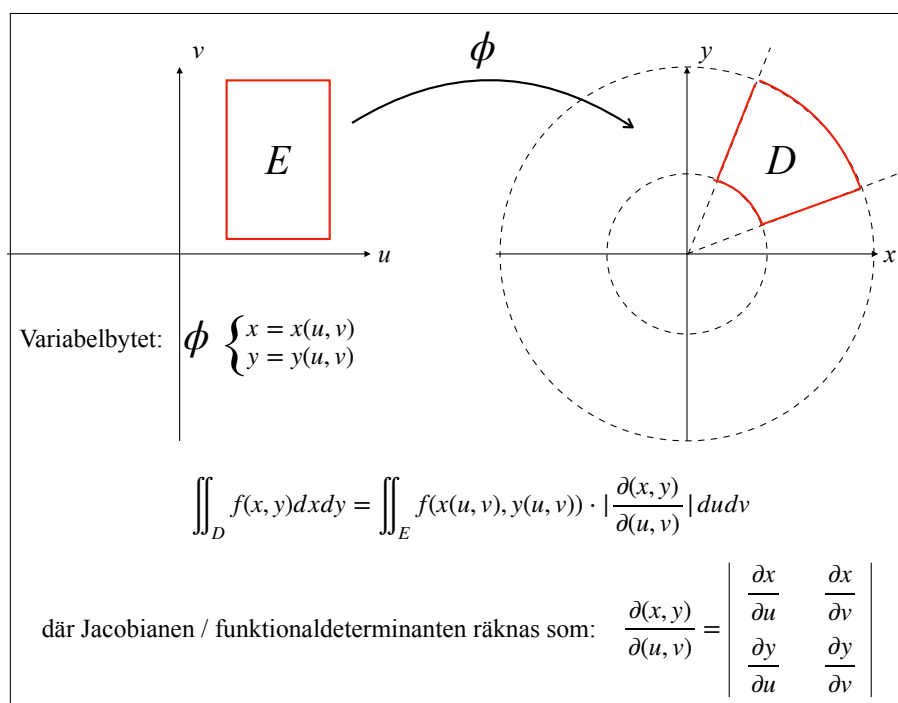
Jämför den endimensionella motsvarigheten

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \underbrace{x'(t)}_{\frac{dx}{dt}} dt$$

för $x = x(t)$ och $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$. OBS: $x'(t) < 0$ om ϕ är avtagande.



Figur 53: Variabelbyte (*invers substitution*) i enkelintegraler. (Bild: Hania, med KeyNote.)



Figur 54: Variabelbyte (*invers substitution*) i dubbelintegraler. Allt som ska uttryckas m.h.a. de nya variablerna: 1. området, 2. funktionen, 3. area-elementet $dx dy$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Vi tar två exempel på variabelbyte för dubbelintegraler.

Exempel 75. Beräkna integralen

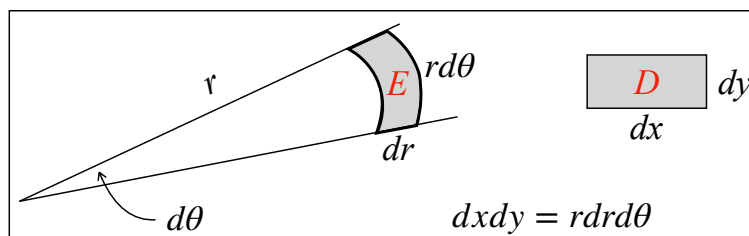
$$\iint_D \frac{x^2 e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dx dy$$

över den halva cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

Vi byter till polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Jacobianen blir då

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta - (-r \sin^2 \theta) = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Man kan alltså skriva areaelementet som $dx dy = r dr d\theta$ och det finns en mycket bra geometrisk tolkning för detta:



Figur 55: Areaelementet vid polärt koordinatbytet; geometrisk tolkning. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Integrationsområdet begränsas i polära koordinater av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, så

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2 e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^\pi \int_0^1 \frac{r^2 \cos^2 \theta \cdot e^{r^2}}{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 \cos^2 \theta \cdot e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 r e^{r^2} dr \right) \end{aligned}$$

När integranden i en dubbelintegral är en produkt av en funktion av den ena variabeln och en funktion av den andra variabeln på en **axelparallell rektangel**, så kan dubbelintegralen skrivas som en produkt av två integraler. Vidare gäller

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 r e^{r^2} dr = \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2},$$

så dubbelintegralen är $\frac{\pi(e-1)}{4}$.

I beräkningen ovan använde vi följande sats, som kommer att vara mycket nyttig ända till slutet av denna kurs:

Sats 23. Om $D = [a, b] \times [c, d]$ är en axelparallell rektangel och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig tvåvariabelfunktion s.a. $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ där g och h är kontinuerliga funktioner, så är:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy.$$

Varför är det så? Detta följer från Fubinis sats och från integralens linjäritet, alltså att man kan bryta ut en konstant framför integralecknet:

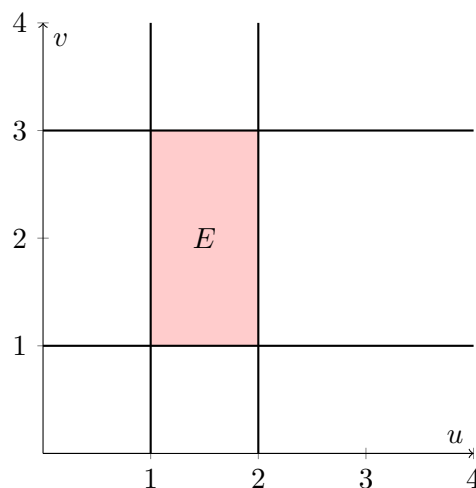
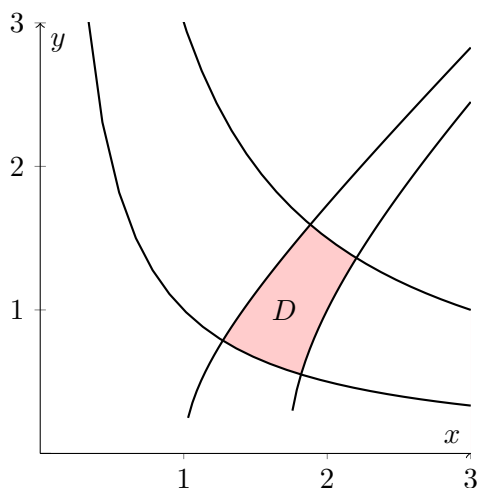
$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y) dx dy &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d g(x) \cdot h(y) dy \right) dx \stackrel{g(x) \text{ är konst. m.a.p. } y}{=} \int_a^b g(x) \cdot \left(\int_c^d h(y) dy \right) dx \\
&\stackrel{\text{int. från } c \text{ till } d \text{ är ett tal!}}{=} \int_c^d h(y) dy \cdot \int_a^b g(x) dx.
\end{aligned}$$

Observera att satsen gäller enbart om vi integrerar över en **axelparallell rektangel** och om integranden är produkt av två funktioner av en variabel (en av x och en av y).

Exempel 76. (Direkt substitution) Beräkna integralen

$$\iint_D (x^4 - y^4) dx dy$$

där D är det område i xy -planet som begränsas av de fyra kurvorna $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2$, $xy = 1$ och $xy = 3$. Om vi byter till koordinaterna $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$ så kan integrationsområdet uttryckas som $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 3$.



Jacobianen blir (man använder här den Inversa Funktionssatsen som formuleras och bevisas i F7; som uppgift 27 från Adams 12.8.):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}^{-1} = (2x^2 + 2y^2)^{-1} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

vilket slutligen ger oss:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^4 - y^4) dx dy &= \iint_D (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) dx dy = \iint_E (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv \\
&= \frac{1}{2} \iint_E u du dv = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 u du \right) \left(\int_1^3 dv \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 [v]_1^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) (3 - 1) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Jämför bilden i detta exempel med bilden på sidan 107. Här går man åt andra hållet, från D till E (axelparallell rektangel), medan man gick från E (axelparallell rektangel) till D i den inversa substitutionen.

Slutsats: Vid inversa substitutioner behöver vi inte den inversa funktionssatsen, men vi behöver den vid direkta substitutioner.

Trigonometriska formler för flervariabelanalys

Beräkning av multipelintegraler (och senare kurvintegraler) kräver ofta grundläggande kunskaper i trigonometri, eftersom sinus och cosinus förekommer i både polärt och rymdspolärt koordinatbyte, och så använder man ofta trigonometriska funktioner vid parametrisering av kurvor.

Här kommer några riktigt viktiga formler som används väldigt ofta vid beräkning av trigonometriska integraler. Memorera dem, eftersom det **inte kommer något formelblad på tentan**:

- **Trigettan**

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

- **Cosinus av dubbelvinkel** (tre formler)

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.$$

- De två senaste formler ger väldigt viktiga formler som hjälper hitta primitiv funktion till $f(x) = \sin^2 x$ och $g(x) = \cos^2 x$:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}.$$

- Här kommer användningen av formlerna ovan:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

- Om man ska bestämma primitiva funktioner till $\sin^{2n+1} x$ eller $\cos^{2n+1} x$, använder man trigettan för att senare kunna tillämpa variabelsubstitution, som i exemplet nedan:

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx \underset{\text{trigettan}}{=} \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = *$$

Substitution: $\cos x = t$, $-\sin x \, dx = dt$ ger vidare:

$$* = - \int (1 - t^2) \, dt = \int (t^2 - 1) \, dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

På samma sätt hittar man primitiv funktion till $f(x) = \cos^3 x$ genom att skriva $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$ och tillämpa variabelbyte $\sin x = t$.

- Ett till riktigt viktigt (och mycket ofta förekommande) problem är att hitta primitiv funktion till $\sin x \cos x$. **Det måste man också absolut kunna hantera.** Jag visar här tre metoder (**M1**, **M2** och **M3**) som ger till synes olika resultat, fast de i själva verket är samma resultat (två primitiva funktioner kan skilja sig med en konstant!):

M1. Metod med **variabelsubstitution**: $\sin x = t$, $\cos x \, dx = dt$:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

M2. Metod med **variabelsubstitution**: $\cos x = t$, $-\sin x \, dx = dt$:

$$\int \cos x \sin x \, dx = - \int t \, dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C.$$

M3. Metod m.h.a. **formeln för sinus av dubbelvinkel**:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Man kan se att de primitiva funktionerna i **M1** och **M2** skiljer sig med konstanten $\frac{1}{2}$ (tillämpa **trigettan!**). De primitiva funktionerna i **M2** och **M3** skiljer sig med konstanten $\frac{1}{4}$ (tillämpa den tredje formeln för **cosinus av dubbelvinkel!**). Ni får använda vilken som helst av de tre metoderna.

- Det mest typiska exemplet från området av dubbelintegraler är när man ska köra polärt koordinatbyte och integranden innehåller $x^2 + y^2$. Trigettan tillämpat till $x = r \cos \phi$ och $y = r \sin \phi$ ger $x^2 + y^2 = r^2$ och därför (Jacobianen $dx dy = r dr d\phi$; se förklaring i nästa stycket!) får vi t.ex.:

$$\iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r \, d\phi dr = 2\pi \cdot \int_0^1 r^3 \, dr = 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

- Den första formeln för cosinus av dubbelvinkel hjälper att beräkna dubbelintegraler med $x^2 - y^2$ i integranden. Efter polärt koordinatbyte: $x^2 - y^2 = r^2 \cos^2 \phi - r^2 \sin^2 \phi = r^2 \cos 2\phi$. Låt oss nu integrera över D : åttondelen av cirkelskivan:

$$\iint_D (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^2 \cos 2\phi \cdot r \, d\phi dr = \left[\frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{\pi/4} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Rekommenderade uppgifter efter F9

14.1: 1, 13, 17. **14.2:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 19. **14.4:** 1, 3, 5, 17, 21. **Extra uppgifter:** **14.1:** 5. **14.2:** 13, 21, 29. **14.4:** 18.

Lycka till på TEN1!

Föreläsning 10: Generaliserade integraler; Trippelintegraler

Adams 14.3, 14.5

Generaliserade dubbelintegraler

Vi har hittills studerat dubbelintegraler av begränsade funktioner över slutna, begränsade områden i planet. Precis som för enkelintegraler kan vi utvidga integralbegreppet till att omfatta även obegränsade integrander och obegränsade integrationsområden.

Definition 29. Låt f vara en funktion av två variabler som är definierad på en, möjligen obegränsad, mängd D i planet och antag att $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in D$. Låt $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D$ vara en följd av mängder med följande egenskaper:

- $\cup_{i=1}^{\infty} D_i = D$
- D_i är begränsad för alla i .
- f är begränsad på D_i för alla i .

(Sådan följd heter **uttömmande följd**.) Den generaliserade integralen av f på området D definieras av

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$

om gränsvärdet existerar.

Exempel 77. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy$$

där D är första kvadranten i xy -planet. Funktionen är begränsad på hela mängden D , men mängden D är obegränsad. Vi kan låta $D_i = [0, i] \times [0, i]$ och får då:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^i \int_0^i \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_0^i \frac{dx}{1+x^2} \right) \left(\int_0^i \frac{dy}{1+y^2} \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_0^i [\arctan(y)]_0^i = \lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{(\arctan(i) - \arctan(0))}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} \underbrace{(\arctan(i) - \arctan(0))}_{=0}^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

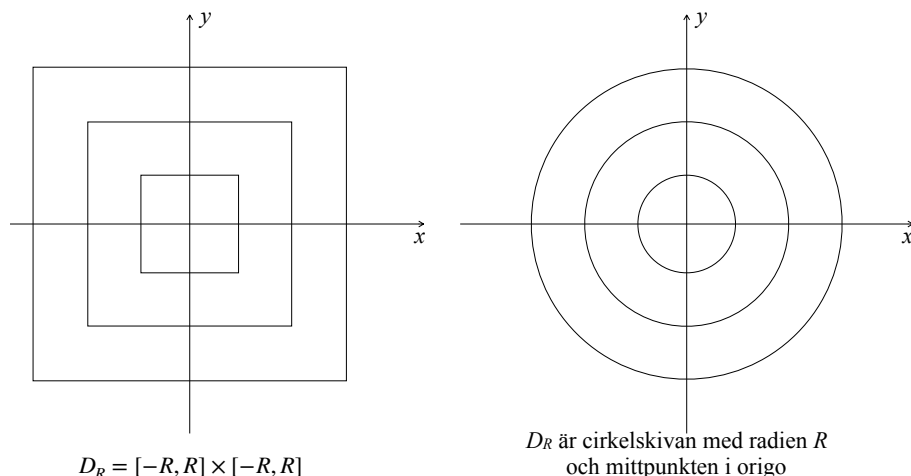
Den generaliserade dubbelintegralen var konvergent med värdet $\frac{\pi^2}{4}$.

Precis som för vanliga dubbelintegraler har vi ofta användning av variabelbyten när vi ska beräkna generaliserade dubbelintegraler. Vi illustrerar med ett mycket viktigt exempel med otaliga tillämpningar.

Exempel 78. Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Vi kan inte beräkna någon primitiv funktion, men genom att gå omvägen via en dubbelintegral kan vi ändå beräkna den bestämda integralen.



Figur 56: Två olika exempel av uttömmande följder som approximerar $\mathbb{R}^2$; vi använder den första i nedanstående beräkningen till vänster och den andra i beräkningen till höger. Teorin (överkurs) säger att värdet på den generaliserade integralen av en positiv integrand är samma oavsett vilka uttömmande följd vi väljer. Exempel 78. (Bild: Hania, med KeyNote.)

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &\stackrel{\text{polära koordinater}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) 2\pi \\ &= \frac{1}{2} (1 - 0) 2\pi = \pi. \end{aligned}$$

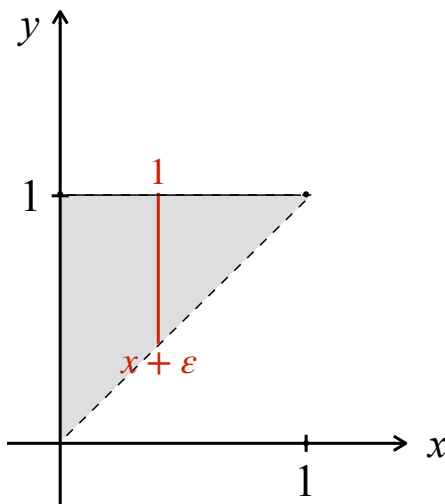
I ovanstående exempel beräknade vi generaliserade dubbelintegraler med hjälp av itererade enkelintegraler.

Om en generaliserad dubbelintegral med positiv integrand är konvergent, så spelar det ingen roll i vilken ordning vi integrerar enkelintegralerna. Om integranden har olika tecken kan värdet dock bero på ordningen. Vi tar ett exempel där integranden är obegränsad.

Exempel 79. Avgör om integralen

$$\iint_D \frac{1}{y-x}$$

är divergent för $D = \{(x, y) : 0 < x < y < 1\}$. Se bilden med integreringsområdet.



Figur 57: Integreringsområde D , Exempel 79. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Integranden är obegränsad nära linjen $y = x$, så

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{y-x} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{1}{y-x} dy dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 [\ln |y-x|]_{y=x+\varepsilon}^1 dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 (\ln |1-x| - \ln(\varepsilon)) dx = \infty \quad \text{eftersom integranden går mot } \infty. \end{aligned}$$

Vi tar ett till exempel på variabelbyte i generaliserade dubbelintegraler:

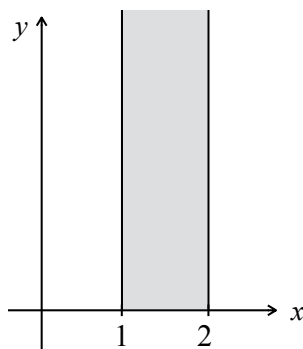
Exempel 80. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D xy e^{-xy} dx dy$$

där D är remsan $1 \leq x \leq 2$, $y \geq 0$. Se bilden med integreringsområdet.

Vägleda av formen på integranden sätter vi $u = xy$, $v = x$. Remsan D kan då skrivas $u \geq 0$, $1 \leq v \leq 2$. Jacobianen blir:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x = -v$$



Figur 58: Integreringsområde D , Exempel 80. (Bild: Hania, med KeyNote.)

så (direkt substitution igen, alltså den Inversa Funktionssatsen som vänder på Jacobianen; dessutom så tar man absolutbeloppet, alltså försvinner minustecknet vid v):

$$\begin{aligned} \iint_D xye^{-xy} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_1^2 ue^{-u} \frac{1}{v} dv du = \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R ue^{-u} du \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{v} dv \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left([-ue^{-u}]_0^R - \int_0^R -e^{-u} du \right) [\ln(v)]_1^2 \\ &= \ln(2) \lim_{R \rightarrow \infty} (-Re^{-R} - e^{-R} + 1) = \ln(2). \end{aligned}$$

För integrander med varierande tecken kunde vi inte dra säkra slutsatser från itererade enkeltintegraler. Dock gäller det att

$$\iint_D f(x, y) dx dy \text{ är konvergent} \iff \iint_D |f(x, y)| dx dy \text{ är konvergent.}$$

Så om vi vill avgöra om en generaliserad dubbelintegral vars integrand f har varierande tecken är konvergent, så behöver vi bara undersöka motsvarande integral av $|f|$. Om vi inte kan hitta primitiva funktioner kan vi använda ett jämförelsekriterium för att avgöra konvergens. För att visa att

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1 + 2 \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \text{ är konvergent på } x^2 + y^2 \geq 1, \text{ så kan vi undersöka} \\ \iint_D \left| \frac{1 + 2 \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| dx dy \leq \iint_D \frac{3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{3r}{(r^2)^{3/2}} dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{3}{r} \right]_1^\infty = 6\pi, \end{aligned}$$

och eftersom integralen av $|f|$ är mindre än en konvergent integral, så måste integralen av $|f|$, och därmed även av f , vara konvergent.

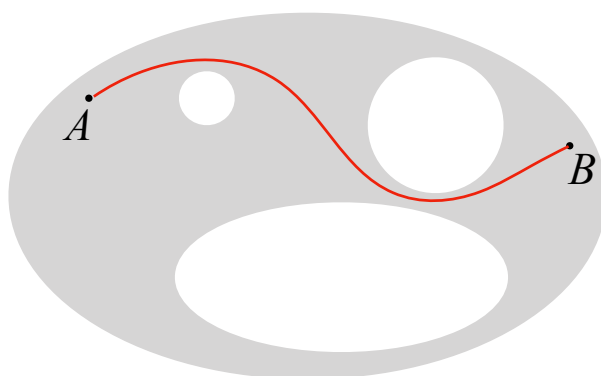
Vi avslutar detta kapitel med att härleda den flerdimensionella motsvarigheten av **integralkalkylens medelvärdessats**. Låt f vara en kontinuerlig funktion av två variabler definierad på ett kompakt område D . Då har f ett största och ett minsta värde M respektive m på D ,

och alltså gäller $m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in D$. Integration över D ger:

$$\begin{aligned} m(\text{arean av } D) &= \iint_D m \, dx dy \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D M \, dx dy = M(\text{arean av } D) \\ \Rightarrow \quad m &\leq \underbrace{\frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x, y) \, dx dy}_{=C} \leq M \end{aligned}$$

Om D är **bågvis sammanhängande**, så finns det en kurva $(x(t), y(t))$ som uppfyller

$$f(x(0), y(0)) = m \quad \text{och} \quad f(x(1), y(1)) = M.$$



Figur 59: En mängd (den gråa delen i bilden; de vita delarna illustrerar hål, alltså tillhör inte mängden) kallas *bågvis sammanhängande* om det för varje par punkter A och B som tillhör mängden finns det en glatt (C^1) kurva (liggande fullständigt i mängden; den röda kurvan i bilden) som förenar punkterna. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Eftersom både f och kurvan är kontinuerliga, så är sammansättningen $g(t) = f(x(t), y(t))$ en kontinuerlig funktion av en variabel med egenskaperna $g(0) = m$ och $g(1) = M$. Enligt satsen om mellanliggande värden (från Envariabelkalkyl) så finns det ett $t \in [0, 1]$, sådant att $g(t) = f(x(t), y(t)) = C$. Det finns alltså en punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att:

$$f(x_0, y_0) = C = \frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

Högerledet kan tolkas som **medelvärdet** av funktionen f på området D . Om D_r är cirkelskivan med radie r och centrum i (a, b) så gäller:

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y) \, dr d\theta \rightarrow f(a, b) \quad \text{då } r \rightarrow 0.$$

För harmoniska funktioner är ovanstående integral lika med $f(a, b) \quad \forall r > 0$.

Trippelintegraler

På precis samma sätt som vi definierade dubbelintegraler över rektanglar i planet, kan vi definiera trippelintegraler över rätblock R i rummet genom att dela in rätblocket i del-rätblock.

Genom att approximera den funktion f som man vill integrera med en trappstegsfunktion som är konstant på varje del-rätblock så får man en Riemannsumma med $c_{ijk} = f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad \text{som konvergerar mot} \quad \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Vi kan också definiera trippelintegraler över kroppar K i rummet som inte är rätblock genom att låta integranden vara noll utanför K och integrera över ett rätblock som innehåller K .

På samma sätt som vi beräknade dubbelintegraler m.h.a. *integration by inspection* på s. 101 (se bilden där), kan vi göra samma sak med trippelintegraler. Här har vi dock så många som **tre** olika fall som omedelbart (utan att räkna) ger

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = 0 :$$

- Integranden är **udda** m.a.p. x (d.v.s. $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$ för alla $(x, y, z) \in K$) och K är **symmetrisk** enligt yz -planet (planet $x = 0$).
- Integranden är **udda** m.a.p. y (d.v.s. $f(x, -y, z) = -f(x, y, z)$ för alla $(x, y, z) \in K$) och K är **symmetrisk** enligt xz -planet (planet $y = 0$).
- Integranden är **udda** m.a.p. z (d.v.s. $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ för alla $(x, y, z) \in K$) och K är **symmetrisk** enligt xy -planet (planet $z = 0$).

I varje av dessa fallen finns det lika många volymelement $\Delta x \Delta y \Delta z$ i integreringsområdet K på båda sidor av symmetriplanet, och varje av dem har sin motsvarighet på andra sidan planet, med funktionens värde som är det motsatta talet (integranden är ju udda!), så att dessa element tar ut varandra i Riemannsumman:

$$c \Delta x \Delta y \Delta z - c \Delta x \Delta y \Delta z = 0.$$

Trippel- och multipelintegraler har ingen geometrisk tolkning, men många fysikaliska tolkningar. Om exempelvis $\rho(x, y, z)$ är densiteten i punkten (x, y, z) så ges massan m och volymen V av en kropp K av

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad V = \iiint_K dx dy dz.$$

Vi kan beräkna trippelintegraler med hjälp av itererad integration eller genom att utnyttja symmetrier och variabelbyten.

Om integrationskroppen K kan skrivas som

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \quad p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$$

(alltså är ett **z -enkelt område**) så kan en trippelintegral över K beräknas

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{p(x, y)}^{q(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Härifrån kan vi ta tre vägar, beroende på hur mängden D ser ut:

1. Om området D är y -enkelt:

$$\iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

2. Om området D är x -enkelt:

$$\iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy$$

3. Om området D är r -enkelt (radiellt): beräkna dubbelintegralen $dx dy$ m.h.a. polär koordinatbyte.

Om vi på ett enkelt sätt kan bestämma tvärsnitten av kroppen vinkelräta mot någon av koordinataxlarna, så kan trippelintegralen beräknas

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_p^q \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

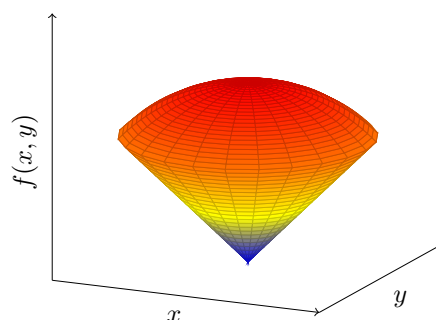
där D_z är tvärsnittet av kroppen vinkelrät mot z -axeln.

Exempel 81. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K z dx dy dz$$

där kroppen K definieras av de tre olikheterna $x^2 + y^2 \leq z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

Den första olikheten motsvarar innandömet av en cirkulär kon med spetsen i origo och de båda andra olikheterna övre halvan av enhetssfären.



Kroppen K har formen av en 'glasstrut'¹³. Vi beräknar trippelintegralen med den tredje metoden ovan och tar fram projektionen av området i xy -planet. Projektionen av skärningskurvan har ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2},$$

så $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$.

Vidare är $p(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $q(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, så

¹³Titta gärna på Travis Topic 20, helt på slutet: där beräknar Travis volymen på glasstruten.

$$\begin{aligned}
\iiint_D z \, dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx dy = \iint_D \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\
&= \frac{1}{2} \iint_D (1 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (1 - 2x^2 - 2y^2) dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 2r^2) r \, dr d\theta = \frac{1}{2} 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Rekommenderade uppgifter efter F10

14.3: 1, 7, 23. **14.5:** 1, 3, 5, 15. **Extra upp.:** **14.5:** 8, 14.

Föreläsning 11: Trippelintegraler; variabelbyte

Adams 14.6, 14.7

Variabelbyte i trippelintegraler

I exemplet ovan så utförde vi ett variabelbyte i den anslutande dubbelintegralen. Vi kan också utföra variabelbyte direkt i trippelintegralen. Om vi byter variabler från (x, y, z) till (u, v, w) så måste vi ta hänsyn till hur volymelement skalas vid avbildningen. Precis som för dubbelintegraler så bestäms detta av absolutbeloppet av Jacobianen, så trippelintegralen kan skrivas:

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw,$$

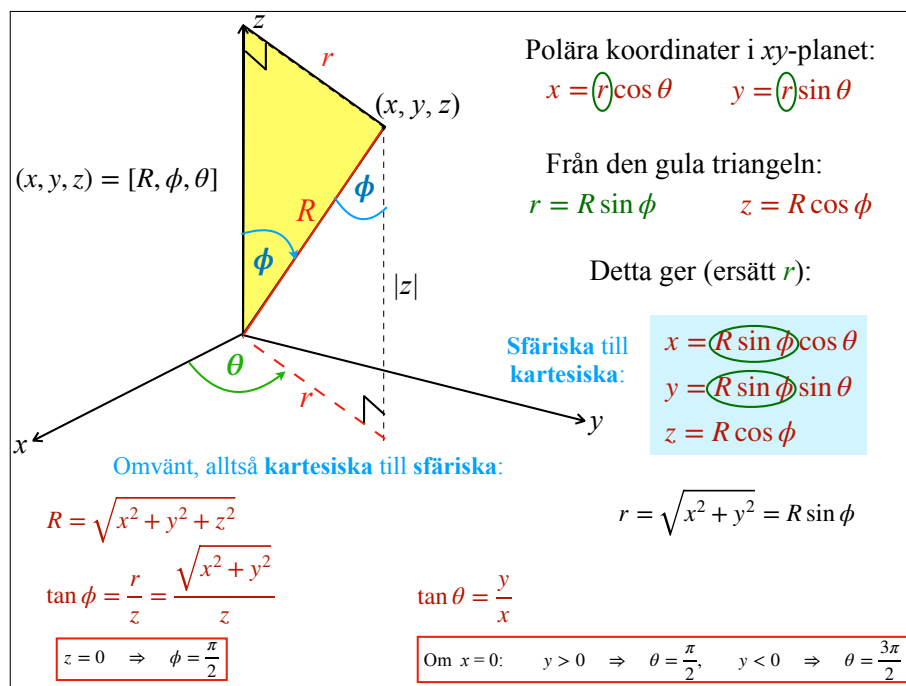
där E är kroppen K uttryckt i variablerna u, v och w . Vi tillämpar formeln på ett exempel.

Exempel 82. Beräkna

$$\iiint_K z \, dx \, dy \, dz$$

där kroppen K är 'glasstruten' i föregående exempel.

Vi kan byta till **sfäriska (rymdpolära)** koordinater. Som vi har sett i början av kursen,



Figur 60: Rymdpolära / sfäriska koordinater i $\mathbb{R}^3$. (Bild: Hania, med KeyNote.)

motsvarar variabeln R avståndet till origo ($R \geq 0$), variabeln θ är vinkeln mellan den positiva x -axeln och projektionen av punkten på xy -planet ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), och variabeln ϕ är vinkeln mot positiva z -axeln ($0 \leq \phi \leq \pi$). Relationen mellan kartesiska och sfäriska koordinater ges av:

$$x = R \sin \phi \cos \theta, \quad y = R \sin \phi \sin \theta, \quad z = R \cos \phi.$$

Jacobiandeterminanten för koordinatbytet är (glöm inte hur man räknar med determinanter: man får bryta en gemensam faktor från hela raden eller kolonnen, och så kan man utveckla enligt rader eller kolonner; glöm inte att vid radutvecklingen multiplicera med $(-1)^{i+j}$ där i och j beskriver positionen av elementen i determinanten! Vi utvecklar enligt den sista raden och använder också triggettan, flera gånger!):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & R \cos \phi \cos \theta & -R \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & R \cos \phi \sin \theta & R \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -R \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot \left((-1)^{3+1} \cos \phi \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-\sin \phi) \cdot \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \right) = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot \left(\cos^2 \phi \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} + \sin^2 \phi \cdot \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \right) = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot (\cos^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \phi \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) = \\ &= R^2 \sin \phi \cdot (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = R^2 \sin \phi.\end{aligned}$$

Detta är något att memorera:

volymelementet vid sfärisk koordinatbyte är:

$$dx dy dz = R^2 \sin \phi dR d\phi d\theta.$$

I sfäriska koordinater kan kroppen ('glasstruten') uttryckas med olikheterna

$$0 \leq R \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

vilket innebär att kroppen är ett **axelparallellt rätblock** (APR) i dessa koordinater. Jacobiandeterminanten för detta variabelbyte är (OBS: absolutbelopp behövs ej, eftersom $R \geq 0$ och $\sin \phi \geq 0$, eftersom $0 \leq \phi \leq \pi$):

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \phi, \theta)} \right| = R^2 \sin \phi$$

och, eftersom $z = R \cos(\phi)$, så får vi:

$$\begin{aligned}\iiint_K z \, dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} R \cos \phi R^2 \sin \phi \, d\theta d\phi dR = \int_0^1 R^3 \, dR \int_0^{\pi/4} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2\phi}{2} d\phi \right) 2\pi = \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos 2\phi}{4} \right]_0^{\pi/4} 2\pi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Nu kan vi också beräkna volymen på ett klot med radien a :

Exempel 83.

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

Under det sfäriska koordinatbytet $x = R \sin \phi \cos \theta$, $y = R \sin \phi \sin \theta$, $z = R \cos \phi$ omvandlas K i följande axelparallellt rätblock (APR) E :

$$E = \{(R, \phi, \theta) : 0 \leq R \leq a, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$\text{Vol}(K) = \iiint_K 1 dx dy dz = \iiint_E R^2 \sin \phi dR d\phi d\theta = \int_0^a \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} R^2 \sin \phi d\theta \right) d\phi \right) dR = (*)$$

Eftersom E är ett APR och integranden är en produkt av envariabelfunktioner (en motsvarighet av Sats 23 från s. 108 gäller även för trippelintegraler på APR där variablerna i integranden kan separeras), kan vi använda formeln med produkt av enkelintegraler:

$$(*) = \int_0^a R^2 dR \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \left[\frac{R^3}{3} \right]_0^a \cdot 2\pi \cdot [-\cos \phi]_0^\pi = \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi \cdot (-(-1) - (-1)) = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Om integrationsområdet har axiell symmetri kan vi dra nytta av cylindriska koordinater. Vi tar ett exempel även på detta.

Exempel 84. Beräkna

$$\iiint_K z dx dy dz$$

där K ges av olikheterna $z^2 \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

I cylindriska koordinater ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$) kan området uttryckas med olikheterna $0 \leq r \leq z$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Jacobianen blir:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

precis som för polära koordinater. Så

$$\begin{aligned} \iiint_K z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z z r dr dz d\theta = 2\pi \int_0^1 \int_0^z z r dr dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[z \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=z} dz = 2\pi \int_0^1 \frac{z^3}{2} dz = 2\pi \left[\frac{z^4}{8} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Många gånger kan beräkningar av trippelintegraler förenklas avsevärt om man tar eventuella symmetrier hos integranden i beaktande. Exempelvis är, av symmetriskäl

$$\iiint_K x dx dy dz = \iiint_K y dx dy dz = 0$$

både om K är konen i föregående exempel och 'glasstruten' i exemplet innan det (jämför med enkelintegralen av en udda funktion över ett symmetriskt intervall $[-a, a]$). Hur svår en trippelintegral är att beräkna kan också påverkas av i vilken ordning vi väljer att beräkna de tre enkelintegralerna. I trippelintegralen. (Se Adams 14.5 Ex. 5 och 6 samt upp. 17 och 18.)

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_0^y f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^y f(x, y, z) \, dx$$

ges området av olikheterna $0 \leq z \leq 1$, $z \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y$. Om vi istället först vill integrera över z och sedan över y och sist över x , så måste vi skriva om området som $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq y$, och får trippelintegralen

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^y f(x, y, z) dz.$$

Varför tillämpar vi variabelbyte i multipelintegraler: I envariabelanalys tillämpar man variabelsubstitution för att det ska bli enklare att beräkna integralen. Där blir **integranden** (funktionen som man integrerar) förvandlad till en form som vi kan hantera. Integreringsintervall anpassas också, fast inte till sin karaktär: det blir kortare eller längre, men det fortsätter att vara ett intervall. I flervariabelanalys är huvudsakliga anledningen till variabelbyte att **integreringsområde blir omvandlat till ett område som är enklare att hantera**. De mest önskvärda områdena är:

- för dubbelintegraler: **axelparallell rektangel**
- för trippelintegraler: **axelparallellt rätblock**.

Det sköna med dessa mängder är att man har ett val medan man använder Fubinis sats: man får välja om man integrerar först m.a.p. x eller m.a.p. y (eller, för trippelintegraler, m.a.p. z). Dessutom kan man använda Sats 23, antingen 2D eller 3D versionen, som gör beräkningarna riktigt enkla.

Tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler

Som vi nämnde i förra kapitlet så ges volymen av en kropp K av

$$\iiint_K dx dy dz = \iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} dz \right) dx dy = \iint_D (q(x, y) - p(x, y)) dx dy$$

där de två sista formlerna gäller i specialfallet då K har formen

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}.$$

Vi tar ett exempel som visar hur vi kan beräkna volymen av en implicit definierad kropp (där vi inte kan göra ovanstående omskrivning till en dubbelintegral).

Exempel 85. Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq y\}$

Eftersom vänsterledet i olikheten är ickenegativt, så vet vi att $y \geq 0$. På grund av termen $x^2 + y^2 + z^2$ så väljer vi att studera kroppen K uttryckt i sfäriska koordinater. Olikheten $y \geq 0$ motsvarar då $0 \leq \theta \leq \pi$. Olikheten $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq y$ innebär då att

$$(R^2)^2 \leq R \sin \phi \sin \theta \quad \Rightarrow \quad R^3 \leq \sin \phi \sin \theta$$

och eftersom Jacobianen i sfäriska koordinater är $R^2 \sin \phi$, så får vi:

$$\begin{aligned} \iiint_K dx dy dz &= \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^{\sqrt[3]{\sin \phi \sin \theta}} R^2 \sin \phi dR = \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \left[\frac{R^3}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{\sin \phi \sin \theta}} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \sin \phi \sin \phi \sin \theta d\phi = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi \\ &= \frac{1}{3} [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} (-(-1) - (-1)) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Alternativt hade vi kunnat göra omskrivningen $x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{y}$ och därefter $x^2 + z^2 \leq \sqrt{y} - y^2$ och använt att projektionen av kroppen på xz -planet är cirklar med radie $\sqrt{\sqrt{y} - y^2}$ och centrum i $x = z = 0$. Tvärsnitt av kroppen med fixt y har alltså arean $A(y) = \pi(\sqrt{y} - y^2)$ och enligt envariabelanalysen så gäller

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \pi \int_0^1 (\sqrt{y} - y^2) dy = \pi \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Vi ska härnäst undersöka problemet att bestämma arean av en yta i rummet. Vi visade i envariabelanalysen att om ytan fås genom rotation av en funktion $y = f(x)$ kring x -axeln så ges arean av

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Vi ska nu studera det mer generella fallet då arean är grafen till en funktion av två variabler. Relationen mellan arean dS av ett ytelement på grafen och arean dA av projektionen av ytelementet på xy -planet är, eftersom båda är approximativt plana,

$$dA = dS \cos \alpha,$$

där α är vinkeln mellan grafens normalvektor och z -axeln. Normalvektorn till grafen av en funktion av två variabler är $(f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1)$, eller dess uppåtriktade motsvarighet $(-f'_1(x, y), -f'_2(x, y), 1)$. Med $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, så får vi då:

$$dA = dS \cos \alpha = dS \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{n}| |\vec{e}_3|} = \frac{dS}{|\vec{n}|} \quad \Rightarrow \quad dS = \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy.$$

Hela grafens yta ges av integralen

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy,$$

där D är funktionens definitionsmängd. Notera likheten med formeln för båglängden av en funktionsgraf $y = f(x)$, som lyder

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Man kan ganska enkelt härleda formeln för arean av en rotationskropp från formeln för arean av en funktionsgraf.

Exempel 86. Bestäm arean av övre halvan av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Vi vill bestämma arean av grafen till funktionen $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ vars partiella derivator ges av:

$$f'_1(x, y) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$f'_2(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Eftersom funktionens definitionsmängd är $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ så får vi:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr \\ &= 2\pi \left[-R\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Vi ägnar resten av kapitlet åt massrelaterade beräkningar. Vi har redan sett att massan av en kropp K vars densitet i punkten (x, y, z) ges av funktionen $\rho(x, y, z)$ kan beräknas med trippelintegralen

$$\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för en kropp K i rummet är den punkt kring vilken kroppen är i momentjämvikt med avseende på en konstant, parallell gravitationskraft riktad åt ett godtyckligt håll. Antag först att gravitationen är riktad i z -riktning. Vridmomentet för ett masselement $\rho(x, y, z) dx dy dz$ kring en axel som är parallell med x -axeln är

$$\underbrace{\rho(x, y, z) dx dy dz}_m \underbrace{g(y - y_T)}_r \quad \text{och hela kroppens vridmoment}$$

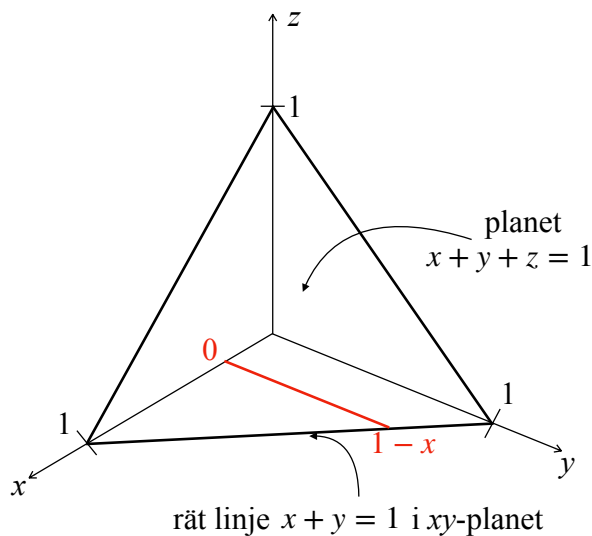
$$\iiint_K g(y - y_T) \rho(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad \text{eftersom vi har momentjämvikt i } (x_T, y_T, z_T)$$

om vi nu låter massan m vara trippelintegralen av funktionen $\rho(x, y, z)$ över kroppen K så får vi ekvationen:

$$\iiint_K y\rho(x, y, z)dx dy dz = my_T \Rightarrow y_T = \frac{1}{m} \iiint_K y\rho(x, y, z)dx dy dz$$

och motsvarande ekvationer gäller även av symmetriskäl för x_T och y_T .

Exempel 87. Bestäm tyngdpunkten till kroppen K som begränsas av $x + y + z \leq 1$ i första oktanten. Se bilden med integreringsområdet.



Figur 61: Bilden till Exempel 87. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Av symmetriskäl $(x_T, y_T, z_T) = k(1, 1, 1)$, så vi behöver bara beräkna en av x_T , y_T , z_T . Kroppen begränsas av

$$0 \leq z \leq 1 - x - y, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

så vi får integralen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz dy dx &= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 x \left(0 + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Samtidigt gäller

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2x+x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

vilket slutligen ger oss att

$$x_T = \frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad (x_T, y_T, z_T) = \frac{1}{4}(1, 1, 1).$$

Rekommenderade uppgifter efter F11

14.6: 1, 3, 5, 9. **14.7:** 1, 3, 9, 13. **Extra uppgifter:** **14.6:** 15, 19.

Föreläsning 12: Vektorfält, konservativa vektorfält

Adams 15.1, 15.2

Vektorfält

Under återstoden av kursen ska vi arbeta med vektorfält. Ett vektorfält är en funktion vars definitions- och värdemängder är delmängder av $\mathbb{R}^3$ eller $\mathbb{R}^2$. Till varje punkt (x, y, z) i rummet ordnar vektorfältet $\vec{F}$ en vektor $\vec{F}(x, y, z)$ som kan skrivas¹⁴

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

där *komponentfunktionerna* $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är trevariabelfunktioner. Många fysikaliska fenomen kan beskrivas med hjälp av vektorfält, exempelvis gravitationskraften kring en massa, det elektriska kraftfältet kring en laddning, eller hastighetsfältet i ett materiaflöde. För att kunna ta fram en fysikalisk teori för dessa fenomen behöver vi utveckla matematiska metoder för vektorfält.

Föreläsningens viktigaste begrepp:

- Vektorfält / Konservativa vektorfält
- Skälärfält / Potential
- Fältlinje
 - linjer som i varje punkt har samma riktning (flöde) som fältet
 - ett generellt begrepp, för alla sorters kontinuerliga vektorfält
- Nivåkurva (*ekvipotentialkurva*) / nivåyta
 - nivåkurvor / ytor för fältets potentialfunktion
 - linjer som i varje punkt är vinkelräta mot fältet
 - ett begrepp som begränsas till de konservativa fält, eftersom bara sådana har en potentialfunktion.
- Gradienttestet: ett nödvändigt villkor för ett fält att vara konservativt.

Om $R(x, y, z) \equiv 0$ och P, Q är oberoende av z , talar man om ett planärt vektorfält.

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Planära vektorfält kan bland annat beskriva magnetfältet kring en lång, rak ledare genomfluten av en konstant elektrisk ström.

¹⁴Ibland betecknas komponentfunktionerna med F_1, F_2, F_3 i.s.f. med P, Q, R , vilket vi undviker, eftersom det kan förvirras med första ordningens partiella derivatorna m.a.p. x, y och z .

Exempel 88. En punktmassa m_0 i punkten $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ger upphov till ett vektorfält för gravitationskraften. En massa m i $\vec{r} = (x, y, z)$ påverkas av kraften

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= -\frac{km_0m}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ &= -km_0m \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\end{aligned}$$

med belopp

$$|\vec{F}| = \frac{km_0m}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}$$

Så kraften avtar, som bekant, med kvadraten på avståndet $|\vec{r}-\vec{r}_0|$.

En massa m_0 som placeras i gravitationsfältet till en punktmassa kommer, om $m_0 \ll m$, att röra sig längs en rät linje mot punkten (x_0, y_0, z_0) . Dessa rätta linjer är så kallade *fältlinjer* för kraftfältet. **En fältlinje är en kurva vars tangent i varje punkt är parallell med kraftfältet.**

Vi ska ta fram en metod för att bestämma fältlinjer till ett vektorfält $\vec{F}$ och antar att fältlinjerna har parametreringen $\vec{r}(t)$. Per definition gäller

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda(t)\vec{F}(\vec{r}(t))$$

för någon funktion $\lambda(t)$. Det är inte alltid som detta system av differentialekvationer kan lösas, men vi tar ett exempel när så är fallet. Uppgifter hos Adams som handlar om fältlinjer: 15.1 (1–16). I dessa uppgifter får vi alltid en **separabel** ODE som är möjlig för oss att lösa.

Exempel 89. Bestäm en ekvation för den fältlinje till det planära vektorfältet $\vec{F}(x, y) = (1, \sin x)$, som går genom origo.

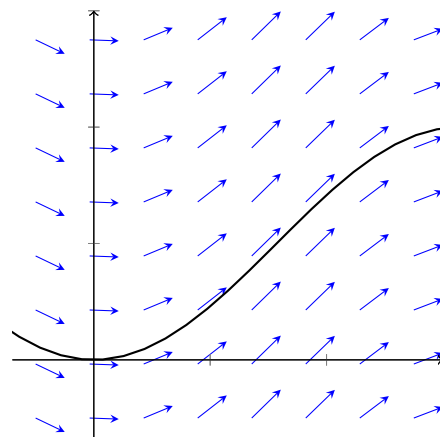
Fältlinjerna $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ uppfyller ekvationerna:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda(t) \cdot 1, & \frac{dy}{dt} &= \lambda(t) \sin x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\lambda(t) \sin x}{\lambda(t) \cdot 1} = \sin x \\ \Rightarrow y(x) &= \int \sin x \, dx = -\cos x + C.\end{aligned}$$

Insättning av villkoret $y(0) = 0$ ger därefter

$$0 = -\cos 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

så fältlinjen genom origo har ekvationen $y = 1 - \cos x$, och därmed gäller $0 \leq y \leq 2$.



Lite geometri av vektorfält och nivåkurvor (optionellt)

Om fältet är konservativt då är **gradienten** i varje punkt i definitionsmängden av funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ **vinkelrät mot nivåkurvan** genom denna punkt. Varför? Svaret ligger i kedjeregeln för den sammansatta funktionen $f \circ \vec{r}$ där $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ är en parametrisering för nivåkurvan $f(x, y) = f(x_0, y_0) = C$ på nivå C . Sammansättningen

$$f \circ \vec{r} : \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{r}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

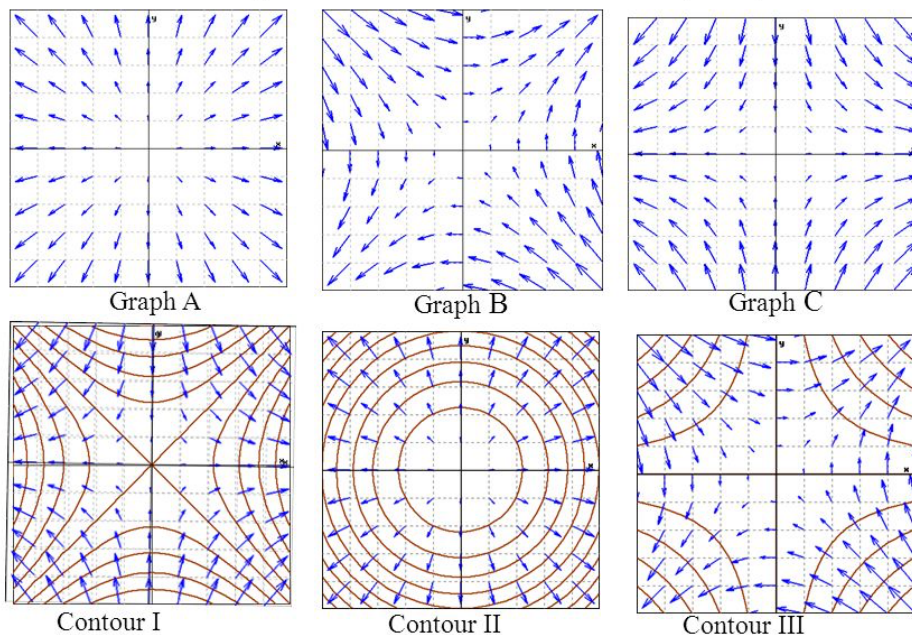
är en konstant funktion eftersom f är konstant på nivåkurvan: $f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t)) = C$. Detta medför att derivatan till sammansättningen är lika med noll:

$$0 = \frac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) = f'_1(\vec{r}(t))x'(t) + f'_2(\vec{r}(t))y'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

Skalärprodukt till två vektorer är noll om och endast om vektorerna är vinkelräta, vilket betyder att gradienten till f är i varje punkt (x_0, y_0) i D_f vinkelrät mot nivåkurvan $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ (vars riktning bestäms av hastighetsvektorn till kurvan i (x_0, y_0)).

Vector Fields

Gradients are orthogonal to level curves. **Answer:** A-II, B-III, C-I



Figur 62: Gradient i varje punkt i definitionsmängden av funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är vinkelrät mot nivåkurvan genom denna punkt. A: $\vec{F}(x, y) = (x, y)$, II: $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$; B: $\vec{F}(x, y) = (y, x)$, III: $f(x, y) = xy$; C: $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$, I: $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$.

Konservativa vektorfält

Funktioner $\Phi(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kallas ibland för *skalärfält*. Gradienten $\nabla\Phi(x, y, z)$ av ett godtyckligt skalärfält är ett vektorfält. Däremot gäller det inte i allmänhet att ett godtyckligt vektorfält $\vec{F}$ kan skrivas som gradienten av ett skalärfält.

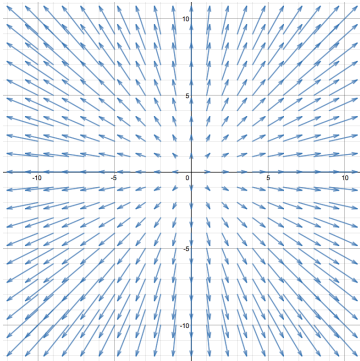
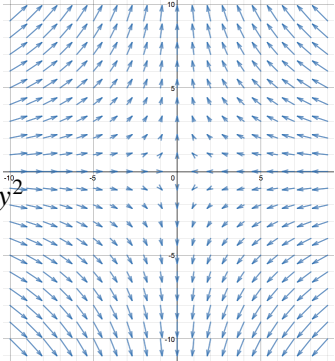
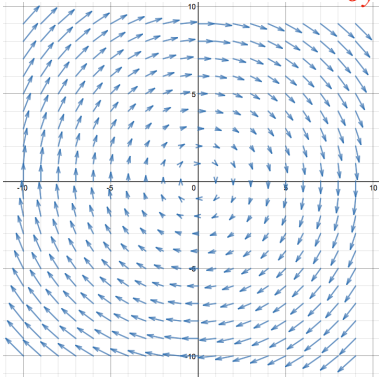
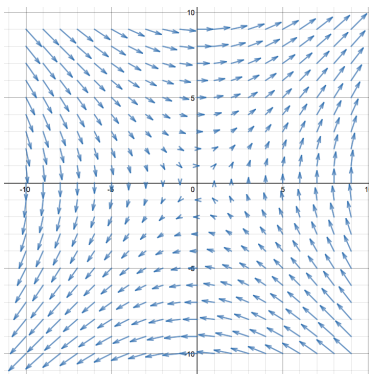
Definition 30. Vektorfältet $\vec{F}(x, y, z)$ sägs vara **konservativt** i det öppna området D om det finns ett C^2 (två gånger kontinuerligt deriverbart) skalärfält $\Phi(x, y, z)$ sådant att $\vec{F}(x, y, z) = \nabla\Phi(x, y, z)$. Funktionen Φ kallas för **potentialen** till $\vec{F}$ (definitionen är analog i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^n$).

Potentialen till ett konservativt vektorfält är inte entydigt bestämd. Om Φ är en potential till $\vec{F}$, så är också $\Phi + C$ en potential för varje konstant C eftersom $\nabla(\Phi + C) = \nabla\Phi + \nabla C = \vec{F} + \vec{0} = \vec{F}$. Två potentialer Φ_1, Φ_2 till ett och samma vektorfält uppfyller dock alltid $\Phi_1 = \Phi_2 + C$, för någon konstant C , så alla potentialer till ett vektorfält är identiska, så när som på en konstant (precis som primitiva funktioner till en funktion). En potential till gravitationskraftfältet kring en punktmassa m i punkten $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ges av

$$\Phi(x, y, z) = \frac{km}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Undersök på egen hand att $\nabla\Phi(x, y, z)$ blir vektorfältet från förra kapitlet.

För att visa att ett vektorfält är konservativt kan man försöka **hitta en potential** till det. Först några riktigt enkla exempel. Potentialfunktioner brukar betecknas Φ eller U .

$\vec{F}(x, y) = (2x, 2y)$  konservativt Potentialen: $U(x, y) = x^2 + y^2$	$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ konservativt Potentialen: $U(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$	$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ $\vec{F}(x, y) = (-x, y)$  konservativt Potentialen: $U(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$
$\vec{F}(x, y) = (y, -x)$  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ ej konservativt	$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ konservativt Potentialen: $U(x, y) = xy$	$\vec{F}(x, y) = (y, x)$  konservativt Potentialen: $U(x, y) = xy$

Se också Travis
Topic 22

Figur 63: Tre konservativa och ett ej konservativt vektorfält.

Nu tar vi två svårare exempel:

Exempel 90. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x + e^y + \cos(x + y^2), xe^y + 2y \cos(x + y^2) + 1).$$

Visa att det är konservativt genom att hitta en potential till det.

Sätt $P(x, y) = 2x + e^y + \cos(x + y^2)$ och $Q(x, y) = xe^y + 2y \cos(x + y^2) + 1$. Varje potentialfunktion $\Phi(x, y)$ ska uppfylla

$$\nabla\Phi = \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = P \quad \text{och} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q.$$

Detta ger följande två villkor för Φ :

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + e^y + \cos(x + y^2) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xe^y + 2y \cos(x + y^2) + 1 \end{cases}$$

Det första villkoret ger

$$\Phi(x, y) = x^2 + xe^y + \sin(x + y^2) + \varphi(y)$$

där φ är en deriverbar funktion av en variabel. Vi sätter in detta i det andra villkoret och vi får:

$$xe^y + 2y \cos(x + y^2) + 1 = \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, y) = xe^y + 2y \cos(x + y^2) + \varphi'(y).$$

Jämförelse av de två uttryck (för partiella derivata av Φ m.a.p. y) ovan ger $\varphi'(y) = 1$, vilket ger $\varphi(y) = y + C$ där C är en godtycklig konstant. En potentialfunktion till fältet $\mathbf{F}$ är alltså

$$\Phi(x, y) = x^2 + xe^y + \sin(x + y^2) + y.$$

Exempel 91. Visa att vektorfältet $\vec{F} = (3x^2y^2z + 2xy, 2x^3yz + x^2 + 1, x^3y^2)$ är konservativt och bestäm en potential till det.

En eventuell potential Φ uppfyller $\nabla\Phi = \vec{F}$, d.v.s.

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2xy \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^3yz + x^2 + 1 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = x^3y^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Den sista ekvationen ger } \Phi(x, y, z) = x^3y^2z + f(x, y). \text{ Partiell} \\ \text{derivering med avseende på } x \text{ ger sedan} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2y^2z + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \text{och efter jämförelse med första ekvationen inser vi att} \\ f'_x = 2xy, \text{ vilket implicerar att } f(x, y) = x^2y + g(y). \end{array}$$

Partiell derivering av $\Phi(x, y, z) = x^3y^2z + x^2y + g(y)$ med avseende på y ger slutligen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^3yz + x^2 + g'(y) \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = y + C$$

Så vektorfältet är konservativt med potentialen $\Phi(x, y, z) = x^3y^2z + x^2y + y + C$.

Att bestämma potentialen till ett vektorfält kan leda till ganska komplicerade räkningar. Som tur är finns det ett enkelt villkor som måste vara uppfyllt för att ett vektorfält ska vara konservativt (**villkoret är lokalt och inte tillräckligt** för att visa att fältet ska vara konservativt). (d.v.s. **fältet är konservativt $\Rightarrow$ villkoret är uppfyllt, men villkoret är uppfyllt $\nRightarrow$ fältet är konservativt**).

Om ett planärt vektorfält $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ är konservativt så gäller, för varje potential $\Phi(x, y)$ till $\vec{F}$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F} : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^3 & \vec{F}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\
P, Q, R : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R} \\
\Phi : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R} \text{ är fältets (skalär)potential om: } P = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ och } Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ och } R = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\
\text{Schwarz sats ger då följande nödvändigt villkor för fältet att vara konservativt (att ha en potential):} \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} \\
\text{Det är så, eftersom potentialens Hessian är symmetrisk (Schwarz!) och den är lik med fältets Jacobian:} \\
\mathcal{H}(\Phi) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} = D\vec{F}
\end{aligned}$$

Figur 64: Motivering för de nödvändiga villkoren för ett 3D-vektorfält att vara konservativt; för 2D-vektorfält är motiveringen samma, men respektive matriserna är 2×2 -matriser. (Bild: Hania, med KeyNote.)

eftersom blandade partiella derivator är lika (Schwarz sats 5). Ett planärt vektorvält kan alltså bara vara konservativt på D om villkoret $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ är uppfyllt i alla punkter $(x, y) \in D$. För vektorfält $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ i rummet ges motsvarande nödvändiga villkor för att $\vec{F}$ ska vara konservativt av de tre ekvationerna

$$\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}}_{\text{Tänk } \nabla \times \vec{F} = \vec{0}}$$

som alla måste vara uppfyllda för att $\vec{F}$ ska vara konservativt.

Rekommenderade uppgifter efter F12

15.1: 1, 3, 7. **15.2:** 1, 3, 4, 21.

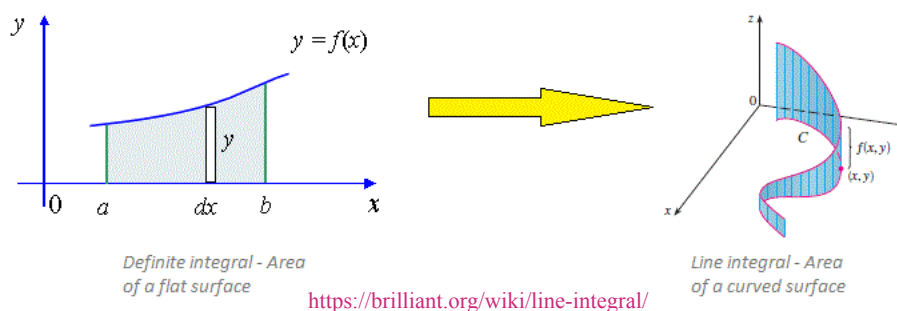
Föreläsning 13: Linjeintegraler (kurvintegraler)

Adams 15.3, 15.4

Kurvintegraler av funktioner

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och låt kurvan γ ligga i f 's definitionsområde. Vi kommer att beräkna en integral av funktionen f längs kurvan γ . Den används till två beräkningar:

- av den vertikala arean mellan kurvan och kurvans skugga på f 's graf $z = f(x, y)$
- (om f antar bara positiva värden): av kurvans massa, om kurvans densitet i varje punkt definieras av f 's värde i denna punkt.



Figur 65: Kurvintegral av en tvåvariabelfunktion beräknar den vertikala arean (med tecken, alltså negativa värden under xy -planet) mellan kurvan och kurvans skugga på grafytan.

Vi parametriserar kurvan γ så att $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ längs kurvan. Välj sedan en partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ av parameterintervallet och betrakta delintervallet $[t_{k-1}, t_k]$. Om intervallet är kort, så kan vi betrakta funktionen $f(\vec{r}(t))$ som konstant för $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Beteckna båglängden för kurvbiten mellan $\vec{r}(t_{k-1})$ och $\vec{r}(t_k)$ med l_k . På delintervallet $[t_{k-1}, t_k]$ är den vertikala arean ungefär lika med *Beräkning precis som på F2, från Pythagoras sats.*

$$\begin{aligned} f(\vec{r}(t_k)) \cdot l_k &\approx f(\vec{r}(t_k)) \cdot \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\ &= f(\vec{r}(t_k)) \cdot \sqrt{\left(\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} \cdot (t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Den totala arean blir Riemannsumman

$$\sum_{k=1}^n f(\vec{r}(t_k)) \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2} \cdot \Delta t_k$$

som konvergerar mot integralen

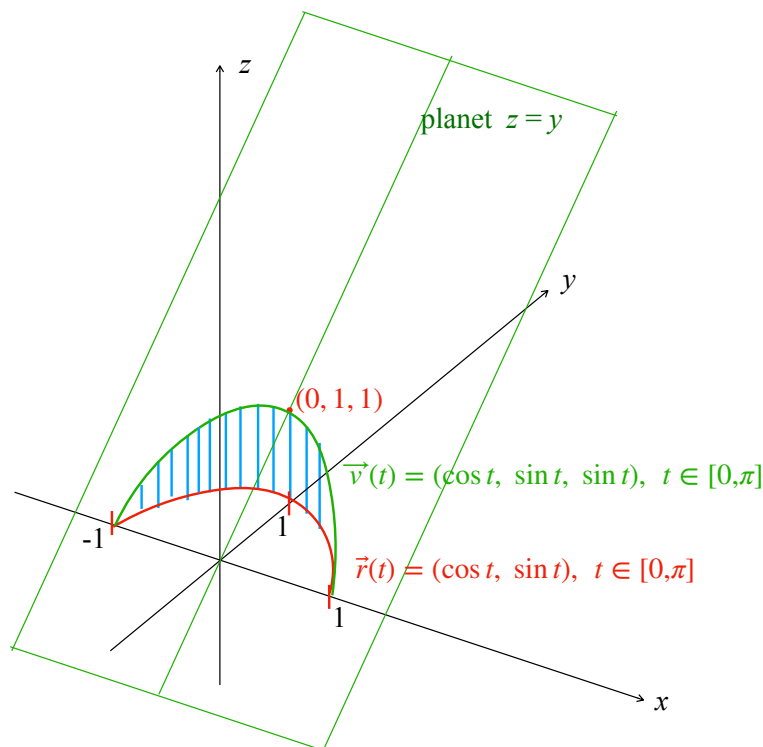
$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| \, dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$$

när vi låter n gå mot oändligheten och därmed längden av delintervallen i partitionen gå mot noll. Differentialen $ds = |\vec{r}'(t)| \, dt$ kallas **bågelement**.

Exempel 92. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} y \, ds,$$

där γ är halvcirkeln $\gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$.



Figur 66: Kurvintegralen av $f(x, y) = y$ längs kurvan γ beräknar den vertikala arean (i blått) mellan kurvan γ (i rött) och kurvans skugga på grafytan (i grönt). Bild till Exempel 92.

Vi väljer att parametrisera halvcirkeln med $x(t) = \cos t$ och $y(t) = \sin t$ för $t \in [0, \pi]$. Integranden är förstås $f(x, y) = y$. Dessutom är $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$. Enligt definitionen blir då kurvintegralen:

$$\int_0^{\pi} \sin t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt = \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{1} \, dt = [-\cos t]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Vi använde **trigettan** i beräkningen ovan. **Svar:** Kurvintegralen är lika med 2.

Kurvintegraler av vektorfält

Betrakta en partikel som rör sig längs en kurva γ i ett kraftfält som påverkar partikeln med kraften $\vec{F}(\vec{r})$ där $\vec{r}$ är partikelns läge. Vi vill beräkna det arbete som fältet uträttar vid partikelns förflyttning längs γ . Vi parametriserar kurvan γ så att $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ längs kurvan. Välj sedan en partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ av parameterintervallet och betrakta delintervallet $[t_{k-1}, t_k]$. Om intervallet är kort, så kan vi betrakta kraften $\vec{F}(\vec{r}(t))$ som konstant för $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Under delintervallet $[t_{k-1}, t_k]$ utför fältet arbetet

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})) \approx \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \Delta t_k.$$

Det totala arbetet blir Riemannsumman

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \Delta t_k$$

som konvergerar mot integralen

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

när vi låter längden av delintervallen i partitionen gå mot noll.

För ett infinitesimalt tidsintervall dt , så blir $\vec{r}'(t)dt$ en infinitesimal sträcka längs kurvan som vi skulle kunna beteckna $d\vec{r}$. Man använder därför beteckningen

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad \text{för en parametrisering } \vec{r}(t) \text{ av } \gamma.$$

Eftersom

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)), & d\vec{r} &= (dx, dy, dz) \\ \vec{F}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \end{aligned}$$

så kan kurvintegralen av ett vektorfält också skrivas

$$\underbrace{\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Differentialform}} = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

vilket motiverar en annan beteckning för kurvintegralen:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

Senaste formeln (i 2D-variant) använd med fördel till uppgifter som Adams 15.4 uppgift 8:

Exempel 93. (Adams 15.4 uppgift 8) Evaluera

$$\oint_{\gamma} x^2 y^2 dx + x^3 y dy$$

där γ är kvadraten med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ orienterade moturs.

Vi delar upp kurvan γ i fyra kurvor: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ som i bilden. (T.ex. på kurvan γ_1 har vi: $dy = 0$ eftersom kurvan är horisontell, vilket betyder ingen förändring i y -ledet, dessutom $y = 0$ på hela kurvan, och x varierar mellan 0 och 1; likadant resonemang på de övriga kurvbitarna.) Sedan räknar vi kurvintegralerna på varje del-kurva och summerar resultaten:

$$\gamma_1 : y = 0, \, dy = 0, \, 0 \leq x \leq 1, \text{ alltså } \int_{\gamma_1} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = \int_0^1 x^2 \cdot 0 dx = 0.$$

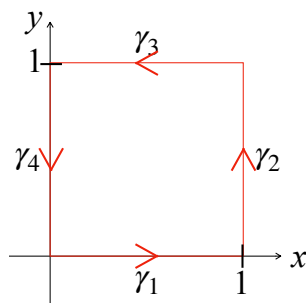
$$\gamma_2 : x = 1, \, dx = 0, \, 0 \leq y \leq 1, \text{ alltså } \int_{\gamma_2} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\gamma_3 : y = 1, \, dy = 0, \, x \text{ varierar från } 1 \text{ till } 0, \text{ alltså } \int_{\gamma_3} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = \int_1^0 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^0 = -\frac{1}{3}.$$

$$\gamma_4 : x = 0, \, dx = 0, \, y \text{ varierar från } 1 \text{ till } 0, \text{ alltså } \int_{\gamma_4} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = \int_1^0 0 \cdot y dy = 0.$$

Sammanfattningsvis:

$$\oint_{\gamma} x^2 y^2 dx + x^3 y dy = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{6}.$$



Figur 67: Exempel 93, kurvan γ . (Bild: Hania, med KeyNote.)

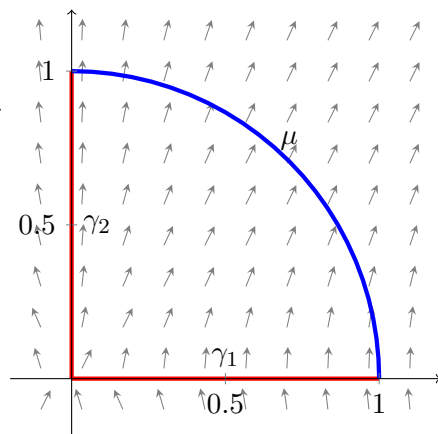
Kurvintegraler längs två olika kurvor mellan ett par punkter har i allmänhet olika värden som vi ser i nästa exempel.

Exempel 94. Beräkna kurvintegralen av differentialformen $xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$ från $(1, 0)$ till $(0, 1)$ längs kurvan μ respektive kurvan $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (se bilden).

För μ väljer vi parametriseringen

$(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$ och får enligt definitionen

$$\begin{aligned} \int_{\mu} xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy &= \int_0^{\pi/2} (-\sin^2 t \cos t + \cos t) \, dt \\ &= \left[-\frac{1}{3} \sin^3 t + \sin t \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



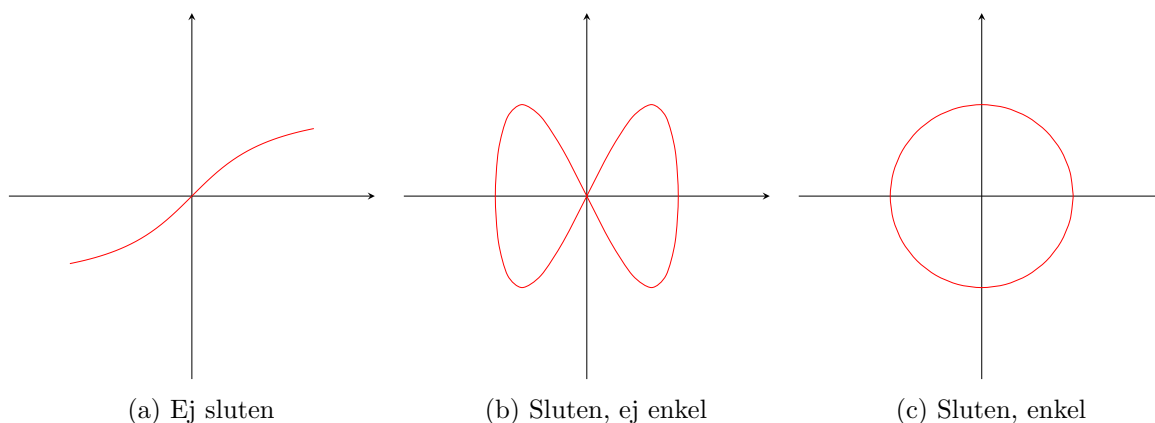
För γ_1 respektive γ_2 tar vi parametriseringarna¹⁵ $(x, y) = (1 - t, 0)$, $t \in [0, 1]$ respektive

¹⁵OBS: I stället för att parametrisera, kan man tillämpa samma metod som i föregående exempel, eftersom kurvbitarna är horisontella eller vertikala!

$(x, y) = (0, t), \quad t \in [0, 1]$. Vi får

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy &= \int_0^1 \underbrace{((1-t) \cdot 0 \cdot (-1))}_0 + \underbrace{((1-t)^2 + 0^2) \cdot 0}_0 \, dt + \int_0^1 \underbrace{0 \cdot t \cdot 0}_0 + \underbrace{(0^2 + t^2) \cdot 1}_{t^2} \, dt \\ &= 0 + \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Innan vi går vidare behöver vi ett par definitioner. En kurva vars start- och slutpunkt sammanfaller kallas en *sluten kurva*. Kurvan $\gamma_1 + \gamma_2 - \mu$ i exemplet ovan är således sluten. Om en sluten kurva inte skär sig själv i någon ytterligare punkt kallas den *enkel*, så kurvan i exemplet ovan är också enkel.



Vi ska nu visa att för konservativa vektorfält så är kurvintegralen mellan två punkter **oberoende** av vilken kurva mellan dessa båda punkter man väljer och att beräkning av kurvintegraler enkelt kan göras med hjälp av vektorfältets potential.

Sats 24. Låt $\vec{F}$ vara ett konservativt vektorfält i D med potential Φ . För varje kurva $\gamma \in D$ mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$ gäller:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}).$$

Notera likheten med **Analysens Huvudsats**. Potentialen är motsvarigheten till den primitiva funktionen. Satsen implicerar att kurvintegralen mellan två punkter är oberoende av val av kurva. För slutna kurvor γ kallas kurvintegralen av $\vec{F}$ längs γ för **cirkulationen** av $\vec{F}$ längs γ och betecknas

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Om fältet är konservativt gäller alltså att ovanstående integral är lika med noll (då ändpunkterna sammanfaller med varandra).

Bevis. (Formuleras här för 3D-fält, men beviset är identiskt för alla dimensioner!) Låt $\vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ vara en parametrisering av kurvan γ från $\vec{a} = \vec{r}(\alpha)$ till $\vec{b} = \vec{r}(\beta)$. Enligt **kedjeregeln** för sammansättningen av $\Phi = \Phi(x, y, z)$ med $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ gäller

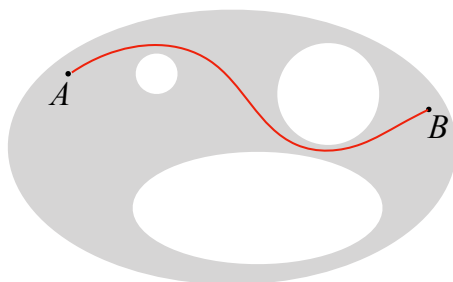
$$\frac{d}{dt}\Phi(\vec{r}(t)) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\vec{r}(t))x'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\vec{r}(t))y'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\vec{r}(t))z'(t) = \nabla\Phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

Insättning av detta samband i kurvintegralen av $\vec{F}$ ger då (enligt Analysens Huvudsats):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla\Phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\Phi(\vec{r}(t)) dt \\ &= \Phi(\vec{r}(\beta)) - \Phi(\vec{r}(\alpha)) = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}) \end{aligned}$$

□

Det är bara för konservativa vektorfält som kurvintegraler är vägoberoende. Låt $\vec{F}$ vara ett vektorfält definierat på ett **bågvis sammanhängande** område D .



Figur 69: En mängd (den gråa delen i bilden; de vita delarna illustrerar hål, alltså tillhör inte mängden) kallas *bågvis sammanhängande* om det för varje par punkter A och B som tillhör mängden finns det en glatt (C^1) kurva (liggande fullständigt i mängden; den röda kurvan i bilden) som förenar punkterna.

Antag att kurvintegralen mellan två punkter är vägoberoende. Fixera punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och definiera, för varje $(x, y, z) \in D$ funktionen

$$\Phi(x, y, z) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där γ är en godtycklig kurva i D mellan (x_0, y_0, z_0) och (x, y, z) . Välj $x_1 < x$ s.a. $(x_1, y, z) \in D$ och låt $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, där γ_1 går mellan (x_0, y_0, z_0) och (x_1, y, z) och γ_2 är en rät linje mellan (x_1, y, z) och (x, y, z) (Fig. 15.15, Adams 15.4). Integralen över γ_1 är oberoende av x , så

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y, z) dt = P(x, y, z).$$

Analogt inses att $\Phi'_y = Q$ och $\Phi'_z = R$, så $\nabla\Phi = \vec{F}$. Vi har alltså visat att **om kurvintegralen av $\vec{F}$ är vägoberoende på D så måste $\vec{F}$ vara konservativt på D .** (Se också Sats 1 i Adams 15.4: *Path independence*.)

Sats 25. $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ är vägoberoende på $D \iff \vec{F}$ är konservativt på D .

Exempel 95. Beräkna $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ om γ är halvcirkeln $\vec{r}(t) = (2 + \cos t, 1 + \sin t)$, $t \in [0, \pi]$ och $\vec{F}(x, y) = (y + 2x, x)$.

Eftersom $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, så misstänker vi att fältet är konservativt och vi vill därför hitta en potential Φ .

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = y + 2x \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{Andra ekvationen ger } \Phi(x, y) = xy + f(x), \text{ vilket efter} \\ \text{insättning i första ekvationen ger} \\ \Phi'_x = y + f'(x) = y + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow \\ f(x) = x^2 + C. \end{array} \end{array}$$

Vi har alltså $\Phi(x, y) = xy + x^2 + C$. Kurvans startpunkt är $(3, 1)$ och dess slutpunkt är $(1, 1)$, och eftersom $\vec{F}$ är konservativt på $\mathbb{R}^2$, så gäller:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(1, 1) - \Phi(3, 1) = 1 \cdot 1 + 1^2 - (3 \cdot 1 + 3^2) = -10.$$

Sammanfattning: Idag har vi lärt oss tre metoder för att beräkna kurvintegraler av vektorfält, och dessa metoder tillämpas i olika situationer (fast ibland kan flera metoder passa samma uppgift!):

- Direkt från definitionen, m.h.a. parametrisering av kurvan och skalärprodukt, som i Exempel 94. Metoden fungerar teoretiskt alltid vid integrering över kurvor med känd parametrisering, men i praktiken måste fältets komponentsfunktioner vara någorlunda enkla, annars får vi en riktigt hemsk enkel integral att lösa, vilket kan vara problematiskt. Fältet kan vara 2D eller 3D, behöver inte vara konservativt.
- Enligt formeln $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$: fungerar bäst om kurvan består av flera vertikala och horisontella bitar som i Exempel 93, där vi kan reducera problemet till flera envariabel-problem. Fungerar för alla sorters 2D-vektorfält.
- Med användning av Huvudsatsen som i Exempel 95. Metoden fungerar **enbart för konservativa fält**, både i 2D och 3D. När ska man börja misstänka att det är metoden som ska användas? Om det är tydligt från uppgiftens text att värdet på integralen inte beror på den konkreta vägen, utan enbart på start- och ändpunkten, alltså när man bara nämner var kurvan börjar och var den slutar, eller om det står *längs en godtycklig kurva mellan punkterna...* eller om man bara ritar en krumelur som i Travis Topic 23, minuterna 16:27–21:28. Innan du börjar tillämpa metoden, försäkra dig dock att fältet verkligen är konservativt! Annars kan man ju inte hitta någon potential, vilket behövs till beräkningen.

Under Föreläsningar 15 (*Greens formel*) och 17 (*Stokes' sats*) kommer vi att lära oss två till metoder för att beräkna kurvintegraler av vektorfält. Villkoren för deras användning är listade på sista sidan av F15 och i sammanfattningen av F17.

Rekommenderade uppgifter efter F13

15.3: 1, 3, 5, 9. **15.4:** 1, 5, 9, 11, 15, 17. **Extra uppgifter:** **15.3:** 15, 17. **15.4:** 22, 23, 24.

Föreläsning 14: Ytintegraler

Adams 15.5, 15.6

Ytintegraler

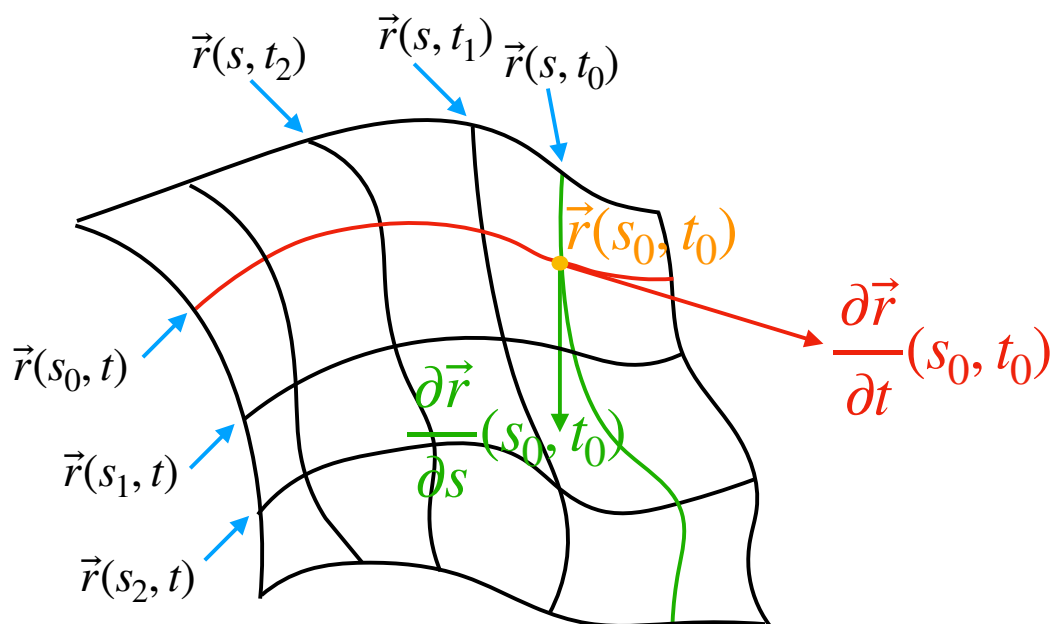
Precis som vi kunde utvidga enkelintegraler från att vara definierade på intervall till att vara definierade på krökta kurvor så kan vi utvidga dubbelintegraler från att vara definierade på mängder i planet till att vara definierade på krökta ytor. Vi får då ytintegraler.

OBS: det är viktigt att skilja på olika sorters integraler som vi lär oss om under kursens gång. För att hjälpa er hålla isär dem, försöker jag att hålla mig till följande **beteckningar** för integreringsområden:

- K : en **kropp** i $\mathbb{R}^3$
- Y (eller S): en **yta** (*surface*) i $\mathbb{R}^3$
- D : ett **område** (*domain*) i $\mathbb{R}^2$
- γ (eller C): en **kurva** (*curve*) i $\mathbb{R}^2$ eller i $\mathbb{R}^3$.

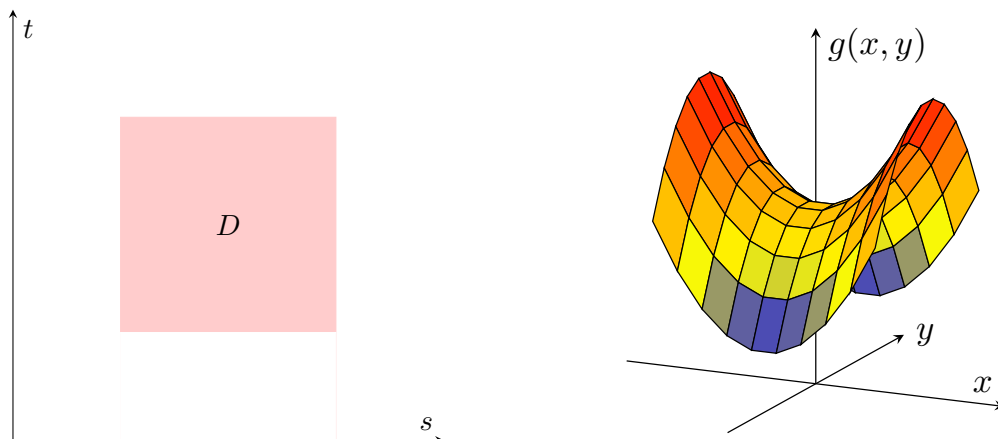
Vi har tidigare under kursen stött på ytor i form av grafen till en funktion $g(x, y)$ av två variabler och också som nivåytor $g(x, y, z) = C$ till en funktion av tre variabler. Vi kan även definiera ytor med hjälp av en parametrisering. Eftersom ytor är tvådimensionella objekt, så behövs två parametrar för att beskriva en yta.

Definition 31. En **parametriserad yta** bestäms är värdemängden till en tvåvariabelfunktion med värden i $\mathbb{R}^3$, d.v.s. till en funktion $\vec{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ med en definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^2$ för parametrarna (s, t) .



Figur 70: Bilden till Definition 31. Tänk på $t_0, t_1, t_2, s_0, s_1, s_2$ som konstanter; parametern s ger kurvor i en riktning och parametern t i den andra. (Bild: Hania, efter Jonas Månsson.)

Notera att om vi fixerar en av parametrarna så får vi funktioner av typen $\vec{r}(s, t_0)$ och $\vec{r}(s_0, t)$, som båda beskriver kurvor på ytan (se figuren på sidan 141). Ytan i skissen är inte grafen av en funktion $g(x, y)$ eftersom vissa värden på (x, y) motsvaras av flera olika z -värden. Grafen till en funktion $g(x, y)$ kan parametreras med $\vec{r}(s, t) = (s, t, g(s, t))$, dvs. genom att vi identifierar ena parametern med x och den andra med y .



Exempel 96. Parametreringen

$$\vec{r}(s, t) = (R \sin s \cos t, R \sin s \sin t, R \cos s), \quad 0 \leq s \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

motsvarar en sfär med radie R och centrum i origo (sfäriska koordinater). Kurvorna $\vec{r}(s, t_0)$ är kurvor med konstant längdgrad och kurvorna $\vec{r}(s_0, t)$ är kurvor med konstant breddgrad.

Låt nu Y vara en yta i rummet och f en funktion som är definierad i alla punkter på ytan Y . En ytintegral av f över Y betecknas

$$\iint_Y f(x, y, z) dS.$$

Hur ska vi göra för att beräkna denna? Dela in S i n stycken delytor med areorna $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots$ och låt (x_i, y_i, z_i) vara en punkt på ytan Y_i . Ytintegralen har då Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \rightarrow \iint_Y f(x, y, z) dS.$$

Vi kan uttrycka (x_i, y_i, z_i) med hjälp av en parametrering av ytan och skulle vilja kunna uttrycka även ΔS_i med parametreringen. Enligt samma resonemang som vi använde när vi visade att Jacobianen kunde tolkas som areaförstoringen för en avbildning, så gäller

$$\Delta S_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \Delta s \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Delta t \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| \Delta s \Delta t.$$

Alltså kan ytintegralen uttryckas med hjälp av parametreringen av Y som

$$\iint_Y f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt \quad \left(dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt \right)$$

vektorprodukten i integranden kan beräknas med hjälp av en determinant

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| &= \left\| \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} \right\| = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right)^2}. \end{aligned}$$

Formeln för arean av grafen till en funktion av två variabler som vi tog fram som en tillämpning av dubbelintegraler är ett specialfall av formeln ovan. Grafen till en funktion har parametreringen $\vec{r}(s, t) = (s, t, g(s, t))$ så

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = (1, 0, g'_1(s, t)), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = (0, 1, g'_2(s, t))$$

och

$$\begin{aligned} dS &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt = \left\| \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & g'_1(s, t) \\ 0 & 1 & g'_2(s, t) \end{pmatrix} \right\| ds dt = |(-g'_1, -g'_2, 1)| ds dt \\ &= \sqrt{(g'_1(s, t))^2 + (g'_2(s, t))^2 + 1^2} ds dt \end{aligned}$$

precis som förväntat. Om $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$ är en annan normalvektor till ytan Y , då

$$(-g'_1, -g'_2, 1) = \vec{n} = \lambda \vec{N} = (\lambda N_1, \lambda N_2, \lambda N_3)$$

vilket ger $\lambda N_3 = 1$, alltså $\lambda = \frac{1}{N_3}$. Då:

$$|\vec{n}| = |\lambda \vec{N}| = |\lambda| \cdot |\vec{N}| = \frac{|\vec{N}|}{|N_3|}$$

och

$$\iint_Y f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{|\vec{N}|}{|N_3|} dx dy,$$

alltså är **ytelementet**:

$$dS = \frac{|\vec{N}|}{|N_3|} dx dy.$$

Detta gäller om Y är en graf av en funktion $z = z(x, y)$ och $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$ är en normalvektor till ytan Y . I varje punkt (x, y, z) på ytan Y har vi $\vec{N} = \vec{N}(x, y, z)$.

Notera också att arean av en parametriserad yta ges av

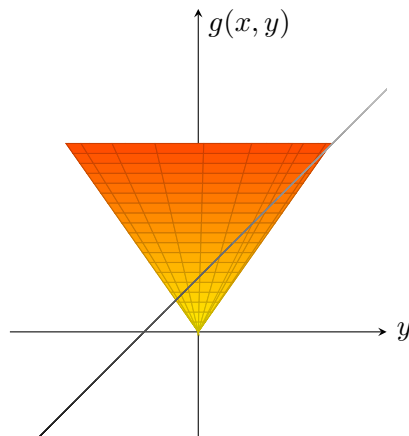
$$A = \iint_Y dS = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt.$$

Exempel 97. Antag att konen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ har ytdensiteten $\rho(x, y, z) = y^2$. Bestäm massan för den del av konen som ligger under planet $z = 1 + y$.

Den sökta massan ges av ytintegralen

$$\iint_Y y^2 dS$$

där Y är delen av konen som ligger under planet $z = 1 + y$. Eftersom konen är grafen av en funktion $z = g(x, y)$, där $g(x, y) = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$, så kan vi bestämma dS med hjälp av de partiella derivatorna av funktionen f .



$$\begin{aligned} g'_1(x, y) &= \frac{1}{2}(2(x^2 + y^2))^{-1/2}4x = \frac{2x}{z}, & g'_2(x, y) &= \frac{2y}{z} \Rightarrow \\ dS &= \sqrt{1 + (g'_1)^2 + (g'_2)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{z}\right)^2 + \left(\frac{2y}{z}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + 2} dx dy = \sqrt{3} dx dy. \end{aligned}$$

För att veta vilken yta D i xy -planet vi ska integrera över så bestämmer vi projektionen av skärningskurvan mellan konen och planet i fråga.

$$\begin{aligned} 1 + y &= \sqrt{2(x^2 + y^2)} \Rightarrow 1 + 2y + y^2 = 2(x^2 + y^2) \Rightarrow 2x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \\ &\Rightarrow 2x^2 + (y - 1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{(y - 1)^2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Integrationsområdet kan parametreras $(x, y) = (r \cos \theta, 1 + \sqrt{2}r \sin \theta)$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Variabelbytet från (x, y) till (r, θ) har Jacobianen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sqrt{2} \sin \theta & \sqrt{2}r \cos \theta \end{vmatrix} = \sqrt{2}r \cos^2 \theta + \sqrt{2}r \sin^2 \theta = \sqrt{2}r$$

så

$$\begin{aligned} \iint_Y y^2 dS &= \iint_D y^2 \sqrt{3} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \sqrt{2}r \sin \theta)^2 \sqrt{3} \sqrt{2}r dr d\theta \\ &= \sqrt{6} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + 2\sqrt{2}r^2 \sin \theta + 2r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta = \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \right\} \\ &= \sqrt{6} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r + 2r^3 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) dr d\theta = \left\{ \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = 0 \right\} \\ &= 2\pi \sqrt{6} \int_0^1 (r + r^3) dr = 2\pi \sqrt{6} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{2} \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Om ytan som vi vill integrera över är en nivåyta $g(x, y, z) = 0$ till en funktion av tre variabler, så är det inte säkert att det går att parametrisera ytan på ett lätt sätt. Vi har dock tidigare under kursen sett att, om α är vinkeln mellan ytans normalvektor och z -axeln, så gäller:

$$dxdy = |\cos \alpha| dS \quad \Rightarrow \quad dS = \left| \frac{1}{\cos \alpha} \right| dxdy = \frac{|\vec{n}||\vec{e}_3|}{|\vec{n} \cdot \vec{e}_3|} dxdy.$$

Normalvektorn till en nivåyta $g(x, y, z) = 0$ är gradienten $\nabla g(x, y, z)$, så i detta fall blir $\vec{n} \cdot \vec{e}_3 = g'_3(x, y, z)$, så ytelementet dS kan skrivas

$$dS = \frac{|\nabla g(x, y, z)|}{|g'_3(x, y, z)|} dxdy.$$

Flödesintegraler

Flödesintegraler är en speciell typ av ytintegraler som används för att beräkna flöden av exempelvis materia eller energi genom en yta. För att definiera flödesintegraler måste vi först införa begreppet orientering av en yta.

Definition 32. En slät yta är **orienterbar** om det finns ett enhetsvektorfält $\hat{N}$ som varierar kontinuerligt och som för varje punkt X på ytan uppfyller att $\hat{N}(X)$ är vinkelrät mot ytan. $\hat{N}$ ger upphov till en orientering av ytan. Vi kallar den sida som $\hat{N}$ pekar ut för den **positiva sidan** av ytan och den andra sidan av ytan för den **negativa sidan** av ytan.

En yta kan vara *sluten* och sakna randpunkter (som sfären) eller ha en rand. För en sluten yta väljer man ofta $\hat{N}$ så att den positiva sidan blir utsidan av ytan. För en orienterad yta med rand, så ger orienteringen upphov till en orientering av randen. Randen γ är **positivt orienterad** om γ är en kurva som genomlöper hela ∂D och för vilken D , sett från positiva sidan av ytan, alltid ligger på vänster sida av γ ($\hat{N}$ och γ är relaterade med högerhandsregeln, där högerhandens tumme är normalvektorns riktning, och pekfingeret är riktningen i vilken γ genomlöper randen till ytan).

Även styckvis släta ytor är orienterbara (till exempel en kub i rummet) om $\hat{N}$ ger upphov till olika orienteringar på randstyckena. Notera att alla ytor inte är orienterbara. Möbiusbandet, exempelvis, har bara en enda sida.

Vi såg i förra kapitlet att en yta kunde parametriseras som $\vec{r}(s, t)$ och att de partiella derivatorna var parallella med ytan. Vektorn

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

är således en normalvektor till ytan. Alltså kan vi sätta

$$\hat{N} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|}.$$

Om $\hat{N}$ med denna definition skulle visa sig peka åt fel håll så kan helt enkelt byta plats på parametrarna s och t , varvid $\hat{N}$ pekar åt motsatt håll.

Låt nu $\vec{F}$ vara ett vektorfält som betecknar ett flöde av materia (enhet kg/m^2s). Vi vill bestämma den mängd materia som flödar genom ytan Y per tidsenhet. Betrakta ett infinitesimalt

ytelement dS på ytan. Under tidsintervallet Δt så strömmar genom ytelementet dS den materia som ryms i en cylinder med basarea dS och höjd

$$|\vec{F}(X)|\Delta t \cos \alpha = |\vec{F}(X)|\Delta t \frac{\vec{F}(X) \cdot \vec{N}}{|\vec{F}(X)||\vec{N}|} = \vec{F}(X) \cdot \hat{N} \Delta t.$$

Cylindern innehåller massan $\vec{F}(X) \cdot \hat{N} \Delta t dS$, så flödet per tidsenhet genom ytelementet dS är $\vec{F}(X) \cdot \hat{N} dS$. Flödet av $\vec{F}$ genom hela ytan Y ges av ytintegralen

$$\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS \quad \text{vilket ibland betecknas} \quad \iint_Y \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{så } d\vec{S} = \hat{N} dS.$$

Ovanstående integraler är **flödesintegraler**. Om ytan Y är sluten används ofta beteckningarna

$$\oiint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS \quad \text{och} \quad \oiint_Y \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{jämför med kurvintegraler})$$

Från formeln för $\hat{N}$ ovan och formeln för dS från förra kapitlet får vi:

$$\begin{aligned} \iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|} \right) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt. \end{aligned}$$

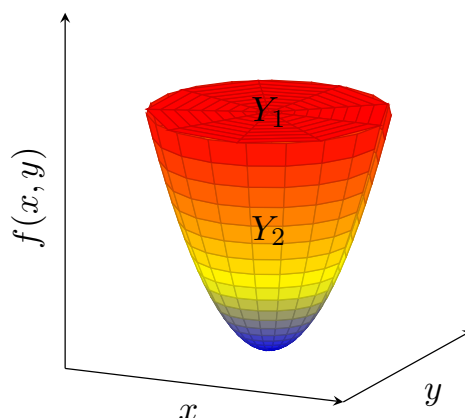
där D är projektionen av ytan Y på xy -planet.

Vi ägnar resten av kapitlet till att räkna några exempel på flödesintegraler.

Exempel 98. Beräkna földet ut ur området $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$ för fältet $\vec{F} = (x, y, 3)$.

Området begränsas av två ytor. Dels planet $z = 4$, och dels av paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Totala flödet är summan av flödesintegralerna över dessa båda ytor. För planet är den utåtriktade normalen $\hat{N} = (0, 0, 1)$ och flödesintegralen blir

$$\begin{aligned} \iint_{Y_1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \iint_{Y_1} (x, y, 3) \cdot (0, 0, 1) dS = \iint_{Y_1} 3 dS \\ &= 3 \iint_{Y_1} dS = 3\pi 2^2 = 12\pi \end{aligned}$$



eftersom Y_1 är en cirkelskiva med radie 2.

Paraboloidytan Y_2 har parametriseringen $\vec{r}(s, t) = (s, t, s^2 + t^2)$ där parametrarnas definitions-mängd är $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 4\}$. Nu gäller

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = (1, 0, 2s), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = (0, 1, 2t), \quad \text{och} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2s \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = (-2s, -2t, 1).$$

Eftersom z -komponenten är positiv är denna vektor dock riktad in i området K . Den motsvarande yttre normalen är $(2s, 2t, -1)$. Flödesintegralen över Y_2 blir:

$$\begin{aligned}\iint_{Y_2} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS &= - \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \, ds dt = \iint_D (s, t, 3) \cdot (2s, 2t, -1) \, ds dt \\ &= \iint_D (2s^2 + 2t^2 - 3) \, ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^2 - 3)r \, dr d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{2r^4}{4} - \frac{3r^2}{2} \right]_0^2 = 2\pi \left(\frac{2^4}{2} - \frac{3}{2} \cdot 2^2 \right) = 4\pi.\end{aligned}$$

Det totala flödet är $12\pi + 4\pi = 16\pi$.

Exempel 99. Beräkna flödet av fältet $\vec{F} = (x + y, z, 0)$ ut ur sfären S med radie R och centrum i origo.

Den yttre enhetsnormalen i en punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ på sfären kan skrivas $\hat{N} = \vec{r}/R$. (Varför? Eftersom $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ på sfären.) Alltså blir flödesintegralen

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_S (x + y, z, 0) \cdot (x, y, z) \frac{1}{R} \, dS = \iint_S (x^2 + xy + yz) \frac{1}{R} \, dS.$$

Av symmetriskäl så måste

$$\iint_S xy \, dS = \iint_S yz \, dS = 0,$$

så bara integralen av x^2 återstår. Vi hade här kunnat parametrisera ytan med sfäriska koordinater, man använder istället ett knep. Av symmetriskäl så gäller:

$$\begin{aligned}\iint_S x^2 \, dS &= \iint_S y^2 \, dS = \iint_S z^2 \, dS = \frac{1}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS \\ \Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS &= \frac{1}{3} \iint_S \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{R^2} \frac{1}{R} \, dS = \frac{R}{3} \underbrace{\iint_S dS}_{\text{Arean av } S} \\ &= \frac{R}{3} 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

I det första exemplet behövde vi bara parametrisera den ena ytan eftersom det var lätt att bestämma den plana ytans gradient. Eftersom den välvda ytan var grafen till en funktion av två variabler, hade vi kunnat bestämma normalen utan parametrisering eftersom vi tidigare visat att normalen till en graf $z = f(x, y)$ ges av $(f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1) = (2x, 2y, -1)$. I förra kapitlet visade vi också att

$$dS = \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} \, dx dy,$$

så

$$\begin{aligned}\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS &= \pm \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{(f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1)}{\sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2}} \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} \, dxdy \\ &= \pm \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1) \, dxdy.\end{aligned}$$

I det andra exemplet behövde vi inte heller använda någon parametrisering tack vare alla symmetrier som problemet hade. Om ytan ges av $f(x, y, z) = 0$ kan följande formel användas:

$$\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_D \vec{F} \cdot \frac{\nabla f}{|f'_3|} \, dxdy.$$

Rekommenderade uppgifter efter F14

15.5: 3, 5, 7, 13. **15.6:** 1, 3, 7, 11, 13.

Föreläsning 15: Gradient, divergens och rotation; Greens sats

Adams 16.1, 16.2, 16.3

Divergens och rotation

Vi har under kursen sett att ur många aspekter så utgör **gradienten** $\nabla\Phi(x, y, z)$ av ett skalärfält $\Phi(x, y, z)$ motsvarighet till derivata.

För vektorfält $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ finns nio olika partiella derivator av första ordningen. Vi ska nu studera två speciella kombinationer av dessa partiella derivator lite mer noggrant, eftersom de, liksom gradienten, visar sig ha många användningsområden.

Definition 33. För ett vektorfält $\vec{F}(x, y, z)$ så definieras **divergensen** och **rotationen** av

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{resp.} \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Notera att sista komponenten i rotationsvektorn är samma som integranden i Greens formel. Vi återkommer till detta senare. Gradienten, divergensen och rotationen kan alla uttryckas enkelt med hjälp av symbolen *nabla*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

som är en vektorvärd differentialoperator. En operator är en funktion vars definitions- och värdemängder är mängder av funktioner. En differentialoperator deriverar elementen i definitionsmängden på något lämpligt sätt (i fallet med nabla partiellt).

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} \Phi \\ \nabla \cdot \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R)^T = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F} \\ \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \operatorname{rot} \vec{F}. \end{aligned}$$

Gradienten av ett skalärfält kunde tolkas som den riktning i vilken skalärfältet snabbast ökade. Vi ska nu titta på hur divergensen av ett vektorfält kan ges fysikalisk mening.

Sats 26. Låt $\vec{F}$ vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält. Låt X vara en punkt i rummet och låt V vara ett område med volym ΔV som omger X .

$$(\operatorname{div} \vec{F})(X) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS \quad (\text{HL är utflödet per volymenhet})$$

Bevis. Man kan visa att satsen gäller oavsett vilken form V har, så vi antar att V är ett rätblock med sidor Δx , Δy , Δz . Flödet i z -led är:

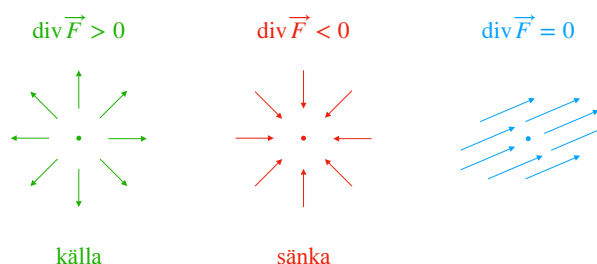
$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot (-\vec{e}_3) dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{e}_3 dS$$

S_1 och S_2 kan projiceras på S_z i xy -planet

$$\begin{aligned} &= \iint_{S_z} \left(R(x, y, z_0 + \frac{\Delta z}{z}) - R(x, y, z_0 - \frac{\Delta z}{z}) \right) dx dy \\ &= \left(R(x_1, y_1, z_0 + \frac{\Delta z}{z}) - R(x_1, y_1, z_0 - \frac{\Delta z}{z}) \right) \Delta x \Delta y \\ &= \frac{\partial R}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial R}{\partial z}(X') \Delta V, \end{aligned}$$

för någon punkt $X' \in V$. Om vi krymper volymen ΔV så kommer $X' \rightarrow X$, så flödet i z -led per volymenhet konvergerar mot $\partial R / \partial z(X)$. På samma sätt konvergerar flödet i y -led mot $\partial Q / \partial y(X)$ o.s.v., så totala utflödet per volymenhet blir $\operatorname{div} \vec{F}(X)$. $\square$

Divergensen av ett vektorfält motsvarar alltså **utflödet per volymenhet**. Om vektorfältet beskriver hastighetsfältet för en strömmande vätska, så innebär ett positivt utflöde ur ett område V att vätska måste produceras inuti området. Divergensen är alltså ett mått på produktionen per volymenhet, även kallad **källtätheten**, i en punkt. Om $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ i punkten X så är X en **källa**. Om $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ i punkten X så är X en **sänka**.



Figur 72: Divergens är en funktion som anger hur mycket vätska tenderar att divergera ifrån varje punkt. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Definition 34. Ett vektorfält $\vec{F}$ är **källfritt (solenoidalt)** i D om $\operatorname{div} \vec{F}(X) = 0$, $\forall X \in D$

I F16 visar vi Gauss' sats som relaterar utflödet ur en sluten yta i rummet till trippelintegralen av källtätheten (divergensen) över området som innesluts av ytan. Vi ska härnäst ge även rotationen an ett vektorfält fysikalisk mening.

Sats 27. Låt $\vec{F}$ vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält. Låt X vara en punkt i rummet, och låt S vara en plan disk i rummet med centrum i X , area ΔS , normal $\hat{N}$ och positivt orienterad rand C . Då gäller

$$\hat{N} \cdot (\text{rot } \vec{F})(X) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{HL är cirkulationen per areaenhet})$$

Bevis. Vi visar ett specialfall med Greens formel (som kommer i nästa stycke; därför markeras beviset som överkurs). Om normalvektorn $\hat{N} = \vec{e}_3$, så är cirkulationen

$$\oint_{C_z} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_z} P dx + Q dy = \iint_{S_z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (X') \Delta S_z$$

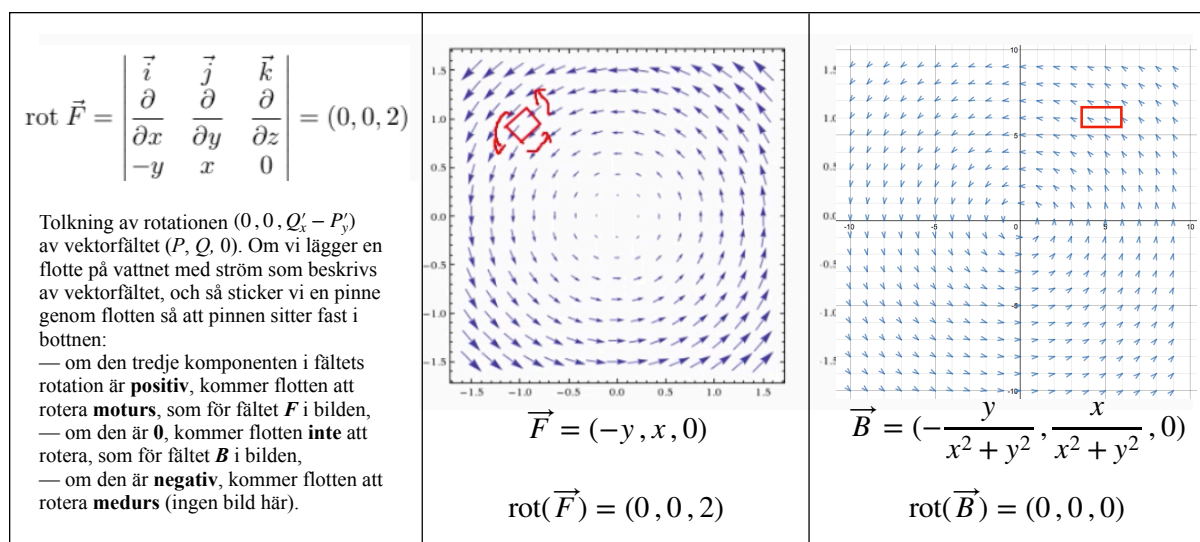
Om vi nu krymper arean ΔS_z , så kommer $X' \rightarrow X$ och

$$\frac{1}{\Delta S_z} \oint_{C_z} \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (X) = \vec{e}_3 \cdot (\text{rot } \vec{F})(X) = \hat{N} \cdot (\text{rot } \vec{F})(X).$$

□

Rotationen av ett vektorfält motsvarar alltså **cirkulationen per areaenhet**. Det är naturligt att tala om $(\text{rot } \vec{F})(X)$ som **virveldensiteten** av fältet $\vec{F}$ i punkten X . Riktningen av $(\text{rot } \vec{F})(X)$ indikerar den axel kring vilken rotationen sker och beloppen av $|(\text{rot } \vec{F})(X)|$ är ett mått på virvelns styrka. Uttrycket $\hat{N} \cdot (\text{rot } \vec{F})(X)$ beskriver om ett litet skovelhjul i X med normalvektor $\hat{N}$ börjar rotera kring sin axel.

Exempel 100. Fälten $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ och $\vec{B}(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$ har samma fältlinjer men ger inte båda upphov till rotation.



Figur 73: En tolkning av rotationen.

För fältet $\vec{F}$ har vi

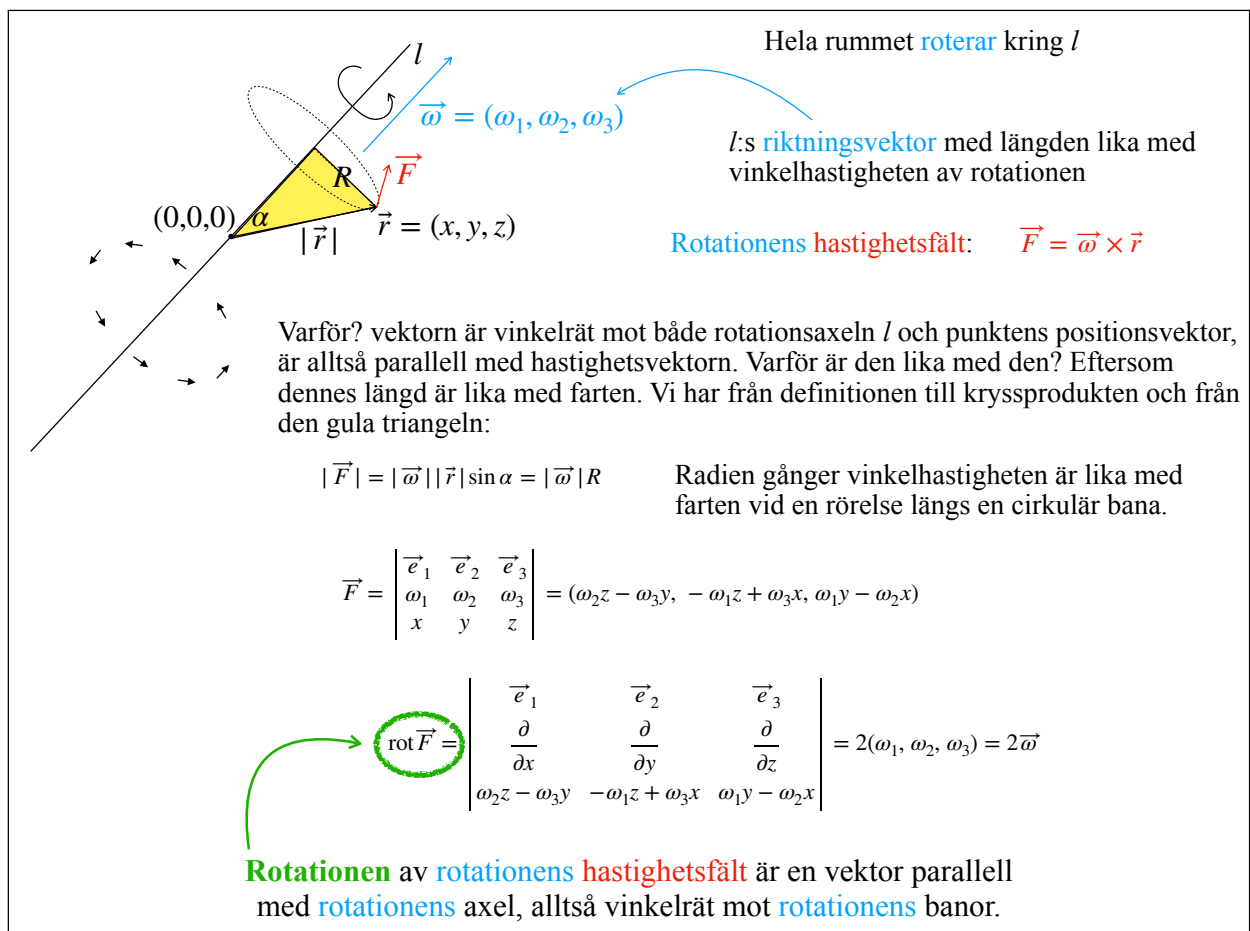
$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2),$$

så ett skovelhjul i xy -planet (med normalvektor $\vec{e}_3$) kommer att börja rotera om det utsätts för fältet $\vec{F}$. Rotationen kommer att bli den samma oavsett vilken punkt vi placerar skovelhjulet i. För fältet $\vec{B}$ har vi istället

$$\text{rot } \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) \right).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

alltså gäller $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$ i alla punkter X (utom origo). Ett skovelhjul som utsätts för fältet $\vec{B}$ kommer alltså inte att börja rotera.



Figur 74: Ett riktigt tjuvigt exempel: rotationen av hastighetsfältet till en rotation.

Definition 35. Ett vektorfält $\vec{F}$ är **virvelfritt (irrotational)** i D om $\forall X \in D \quad \text{rot } \vec{F}(X) = \vec{0}$.

Vi har tidigare visat att konservativa vektorfält har denna egenskap (omvändningen gäller för enkelt sammanhängande områden).

Sammanfattning

Gradienten av ett skalärfält tolkas som den riktning i vilken skalärfältet **ökar snabbast**.

Divergensen av ett vektorfält motsvarar **utflödet per volymenhet**. Om vektorfältet beskriver hastighetsfältet för en strömmande vätska, så innebär ett positivt utflöde ur ett område V att vätska måste produceras inuti området. Divergensen är alltså ett mått på produktionen per volymenhet, även kallad **källtätheten**, i en punkt. Om $\text{div } \vec{F} > 0$ i punkten X så är X en **källa**. Om $\text{div } \vec{F} < 0$ i punkten X så är X en **sänka**. Ett vektorfält $\vec{F}$ är **källfritt (solenoidalt)** i D om $\text{div } \vec{F}(X) = 0, \quad \forall X \in D$.

Rotationen av ett vektorfält motsvarar **cirkulationen per areaenhet**. Det är naturligt att tala om $(\text{rot } \vec{F})(X)$ som **virveldensiteten** av fältet $\vec{F}$ i punkten X . Riktningen av $(\text{rot } \vec{F})(X)$ indikerar den axel kring vilken rotationen sker och beloppen av $|(\text{rot } \vec{F})(X)|$ är ett mått på virvelns styrka.

Låt Φ vara ett skalärfält och $\vec{F}$ ett vektorfält. Då gäller:

- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \quad (\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0, \text{ rotation av varje vektorfält är solenoidal})$
- $\nabla \times (\nabla \Phi) = \vec{0} \quad (\text{rot } \nabla \Phi = \vec{0}, \text{ konservativa vektorfält är virvelfria}).$

Greens formel

Vi ska nu visa ett samband mellan kurvintegraler för slutna kurvor i planet och dubbelintegraler över området som innesluts av kurvan i fråga.

Definition 36. För ett kompakt område D i planet, så sägs γ vara den **positivt orienterade** randen till D om γ är en kurva som genomlöper hela ∂D och för vilken D alltid ligger till vänster om γ .

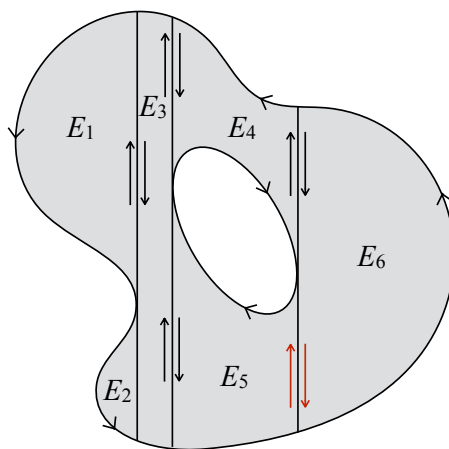
Sats 28. *Greens Formel. Låt $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ vara ett planärt vektorfält definierat på en öppen mängd Ω i planet och låt $D \subset \Omega$ vara ett kompakt, regelbundet område vars rand ∂D är en positivt orienterad, styckvis glatt (C^1), enkel (skär inte sig själv) och sluten kurva. Om $\vec{F}$ har kontinuerliga partiella derivator på hela D , då gäller:*

$$\oint_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{e}_3 dx dy.$$

Bevis. Ett område är **regelbundet** om det kan delas upp i ett ändligt antal x -enkla och ett ändligt antal y -enkla delområden. För att bevisa "P-delen" av satsen, delar vi upp området D i ändligt många delområden på formen

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

alltså y -enkla områden (se bilden).



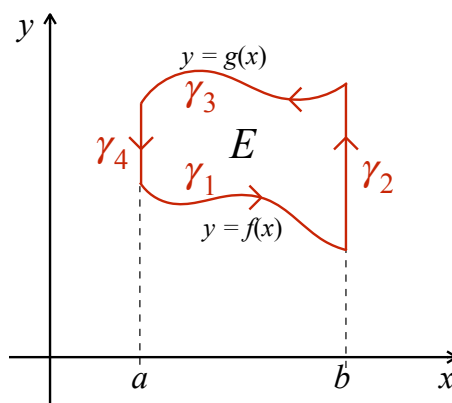
Figur 75: Beviset för Greens formel. Område D är en ändlig union av y -enkla områden E_i .

Vi börjar med att på valfritt delområde E visa "P-delen" av satsen, dvs.

$$\oint_{\gamma_E} P(x, y) dx = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (*)$$

Vi beräknar dubbelintegralen i högerledet:

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (-P(x, g(x)) + P(x, f(x))) dx.$$



Figur 76: Beviset för Greens formel. Område E är y -enkelt. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Å andra sidan kan kurvan γ_1 parametreras som $\vec{r}(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$ och kurvan $-\gamma_3$ kan parametreras som $\vec{r}(t) = (t, g(t))$, $t \in [a, b]$, så

$$\int_{\gamma_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt, \quad \int_{\gamma_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(t, g(t)) dt.$$

Eftersom integralerna över kurvorna γ_4 (med ekvationen $x = a$) och γ_2 (med ekvationen $x = b$) båda är lika med noll (ty $dx = 0$), så har vi visat (*) för varje delområde E .

"P-delen" av satsen gäller på hela D eftersom dubbelintegralerna adderas och kurvintegralerna över de linjer som tillhör randen av två delområden men inte randen av D tar ut varandra, så summan av integralerna över de interna linjerna är lika med noll och vad som är kvar är kurvintegralen över randen.

För att visa "Q-delen" av satsen delar man upp D i ändligt många delområden på formen

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(y) \leq x \leq g(y), \quad c \leq y \leq d\},$$

alltså x -enkla områden. Man utför samma beräkningar som nyss för "P-delen" av satsen.

□

Observera att man kan använda Greens sats även om områdets rand är negativt orienterad, alltså medurs. Man beräknar då fältets arbete vid förflyttning av partikeln längs samma kurva, men åt andra hållet, och detta ger ju samma resultat till absolutbelopp, men med det motsatta tecknet. Det ser man också från definitionen av kurvintegralen av ett vektorfält. Om kurvan är negativt orienterad, tillämpa alltså Greens sats, men sätt ett minustecken framför resultatet. Sådan situation har vi t.ex. i uppgiften Adams 16.3-4.

Ibland händer det också att man använder Greens sats för en kurva som inte är sluten, som t.ex. integrering längs halvcirkelbågen: $x^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$. Man kan då *stänga* området med sträckan: $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$ och tillämpa Greens sats på hela slutna kurvan. Då måste man beräkna separat kurvintegralen över sträckan (tillämpa beräkningssätt som i exemplet 93 i F13), vilket inte är så svårt. Sedan använder man sig av detta att kurvintegralen över en summa av kurvor är lika med summan av kurvintegralerna på varje kurva för sig.

Exempel 101. Bestäm arean under cykloiden

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Eftersom vi inte kan lösa ut y som en funktion av x så fungerar inte tidigare metoder. Greens formel (Se Exemplet 1 i Adams 16.3. Använd sedan den tredje formeln till rekommenderade uppgiften Adams 16.3-5.) ger dock att

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} y \, dx &= \iint_D -1 \, dx \, dy = -(\text{Arean av } D). \quad \text{Så arean är:} \\ A &= - \int_{\gamma} y \, dx = - \int_{2\pi}^0 \underbrace{(1 - \cos t)}_y \underbrace{(1 - \cos t) dt}_{dx} + \int_0^{2\pi} \underbrace{0}_y \underbrace{(-1) dt}_{dx} \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2t}{2} - 2 \cos t \right) \, dt \\ &= \left[\frac{3t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} - 2 \sin t \right]_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

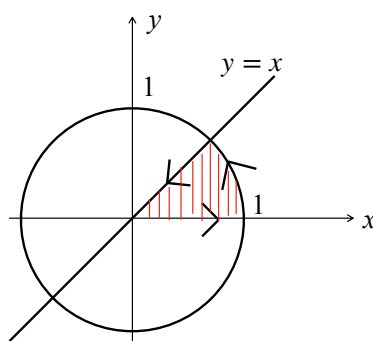
Vi tar nu ett exempel på hur beräkning av kurvintegraler kan förenklas med hjälp av Greens formel.

Exempel 102. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} -y^3 \, dx + x^3 \, dy,$$

där γ är den positivt orienterade randen till cirkelsektorn $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq x$. Se bilden.

Problemet kan lösas genom att parametrisera de tre randstyckena, men med Greens formel blir räkningarna mycket enklare.



Figur 77: Greens formel, Exempel 102. (Bild: Hania, med KeyNote.)

$$\int_{\gamma} \underbrace{-y^3}_{P} \, dx + \underbrace{x^3}_{Q} \, dy = \iint_D \underbrace{3x^2}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} - \underbrace{(-3y^2)}_{\frac{\partial P}{\partial y}} \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 3r^2 r \, dr = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{16}.$$

OBS: uppgiften skulle räknas på ett identiskt sätt om $P(x, y) = -y^3 + f(x)$ och $Q(x, y) = x^3 + g(y)$, där f och g är godtyckliga C^1 -funktioner av en variabel i hela området inom kurvan γ , t.ex. $f(x) = \cos x + x^4 - e^{5x} - 25$ och $g(y) = \sin y + e^{3y+5} - 46$. Sådant *skräp* i formlerna för P och Q försvinner ju vid partiell derivering! Skräpets närvaro gör det också tydligt att man inte ska lösa uppgiften direkt från definitionen av kurvintegraler, alltså m.h.a. parametrisering av kurvan. Det skulle bli hemska beräkningar efter insättningen...

Vi har tidigare sett att om ett planärt vektorfält är konservativt i D , så gäller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i alla punkter i D (Greens formel ger då $\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$).

Definition 37. En öppen mängd D är **enkelt sammanhängande** om den är *bågväs sammanhängande* och om varje enkel sluten kurva $\gamma \in D$ avgränsar ett område som helt ligger i D (med andra ord om D "saknar hål").

Sats 29. Om det planära vektorfältet $\vec{F}$ uppfyller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i en enkelt sammanhängande mängd D , så är $\vec{F}$ konservativt i D .

Bevis. Tag en godtycklig kurva γ i D . Eftersom D är enkelt sammanhängande så är mängden Ω , som innesluts av γ , en delmängd av D . Alltså gäller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i alla punkter i Ω och Greens formel ger:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Kurvintegralen är vägoberoende} \\ \vec{F} \text{ är konservativt i } D. \end{array}$$

□

Vi avslutar med att undersöka det planära **magnetfältet** kring en oändligt lång ledare genomfluten av en konstant ström. Bortsett från en konstant ges fältet av

$$\vec{B}(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

utanför origo gäller:

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial B_1}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

så $\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{\partial B_1}{\partial y}$ utanför origo. På en kompakt, enkelt sammanhängande mängd som inte innehåller origo, så är $\vec{B}$ alltså konservativt och integralen över randen av denna mängd är således

lika med noll. På en cirkel med radie R och centrum i origo gäller, eftersom cirkeln har parametriseringen $(x, y) = (R \cos t, R \sin t)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{B} \cdot d\vec{r} &= - \int_0^{2\pi} \frac{(-R \sin t, R \cos t)}{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

oberoende av cirkelns radie R . Detta betyder att kurvintegraler av fältet inte är vägoberoende och därmed (sats 25 på sidan 140 och sats 1 hos Adams 15.4) vet vi att fältet inte är konservativt på hela planet. Detta exempel visar att villkoret för fältet att vara konservativt inte är tillräckligt, utan enbart nödvändigt.

Låt nu γ vara en godtyckligt enkel sluten kurva som går ett varv runt origo i positiv riktning (dvs. moturs). Kurvan omsluter då en cirkulär kurva σ kring origo. Greens formel ger:

$$\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right)}_{0 \text{ överallt i } D \text{ som ej innehåller origo}} dx dy - \int_{\sigma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{-\sigma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Observera att samma beräkning för det **elektrostatiska fältet**

$$\vec{E}(x, y) = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

ger ett annat resultat vid integrering längs samma cirkel som ovan:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos t, R \sin t)}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-R^2 \cos t \sin t + R^2 \cos t \sin t}{R^2} dt = 0 \end{aligned}$$

oberoende av cirkelns radie R . Kontrollera själv att fältet uppfyller det nödvändiga villkoret för att vara konservativt (utanför origo). Glöm inte att tillämpa både produkt- och kvotregeln och kedjeregeln! Vi beräknar en potential för fältet $\vec{E}$ (se också uppgift 4 i Adams 15.2):

$$\nabla \Phi = (P, Q) \Rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Det första villkoret ger (substitution! täljaren är nästan derivatan till nämnaren!):

$$\Phi(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \psi(y).$$

Insättning av detta i det andra villkoret ger:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \psi(y) \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \psi'(y)$$

vilket ger $\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = C$ och alla potentialfunktioner till $\vec{E}$ har formen:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Detta betyder i synnerhet att ekvipotentialkurvor för detta fält är cirkelar med mittpunkten i origo. Dessutom, om γ är en kurva med startpunkten i $\vec{a} = (a_1, a_2)$ och slutpunkten i $\vec{b} = (b_1, b_2)$, ger Huvudsatsen att:

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \Phi(b_1, b_2) - \Phi(a_1, a_2) = \frac{1}{2} \ln(b_1^2 + b_2^2) - \frac{1}{2} \ln(a_1^2 + a_2^2).$$

Sammanfattningsvis: Greens sats kan tillämpas bara för **2D-fält**, alltså $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Satsen omvandlar kurvintegralen av ett vektorfält över en sluten kurva till dubbelintegralen av fältets (2D)-rotation över (det platta) området D inom kurvan.

Antaganden som ska kontrolleras för att veta om det är OK att använda satsen:

- **kurvan** som vi integrerar över är enkel och **sluten**. Om detta inte är fallet, “stänger” vi den och tillämpar Greens sats ändå på summan av kurvorna.
- **kurvan** är **positivt orienterad** (moturs omkring D ; medurs runt eventuella hål i D). Om orienteringen är negativ, tillämpar vi satsen ändå, men vi måste sätta minus framför dubbelintegralen (ty kurvintegralen i omvänd riktning är lika med minus kurvintegralen i den ursprungliga riktningen; tänk att kurvintegralen beskriver arbetet! Puttar man partikeln i den motsatta riktningen, blir även arbetets tecken motsatt.); kurvan måste också vara stycksvis C^1 , men det är alltid fallet i uppgifterna, så det måste man inte kontrollera.
- **området** D måste vara **regelbundet**, alltså sådant att vi *kan* räkna dubbelintegraler på det (alltså D är antingen en axelparallell rektangel, eller x -enkelt eller y -enkelt område; eller cirkulär, så att vi kan m.h.a. polärt variabelbyte omvandla det till en axelparallell rektangel; eller är D en union av sådana områden). Området måste också vara **slutet**, alltså innehålla hela sin rand ∂D , eftersom omvandlingsformeln gäller kurvintegralen över hela randen till D .
- **fältet** ska vara C^1 (alltså dess komponentfunktioner P och Q måste vara **kontinuerligt deriverbara**) inom **hela** området D ! Oftast är P och Q uppbyggda av polynomfunktioner, exponentialfunktioner, sinus och cosinus, och då är de t.o.m. oändligt många gånger deriverbara. Problemet uppstår oftast om man har division i formeln för P eller Q och uttrycket i nämnaren är noll någonstans i D (som i exemplet med **magnetfältet** ovan). Då “omsluter man singulariteter” och tillämpar Greens sats ändå på D utan cirkelskivorna som innehåller singulariteterna. Glöm inte att orienteringen på cirkelarna som omsluter singulariteterna måste vara *medurs*! (orientering positiv betyder ju att vi har området D till vänster om vi vandrar längs randen, vilket ger moturs på den yttre randen och medurs kring “hål” inom området D).

På slutet av anteckningarna finns det en illustration som visar på vilket sätt man kan se både Greens formel och Huvudsatsen för Konservativa Vektorfält som generaliseringar av Analysens Huvudsats från envariabelanalys. Båda bevisas också m.h.a. Analysens Huvudsats. Jämför med texten som står i början av delkapitlet 16.3 hos Adams.

Rekommenderade uppgifter efter F15

16.1: 1, 3, 5, 7, 13. **16.2:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9. **16.3:** 1, 3, 5, 7. **Extra upp.: 16.2:** 13, 14, 15.

Föreläsning 16: Gauss' sats (divergenssatsen)

Adams 16.4

Senast introducerade vi ytingegraler av funktioner och ytingegraler av vektorfält och idag kommer vi att fortsätta med de senaste. Vi har sett tre olika metoder för beräkning av flödesintegraler av vektorfält

$$\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS$$

- **Direkt från definitionen**, där vi tar fram (normerade!) normal vektorfält till ytan och multiplicerar det skalärt med fältet $\vec{F}$, och sedan integrerar skalärfältet $\vec{F} \cdot \hat{N}$ över ytan Y . Metoden fungerar om ytan är så att man enkelt kan bestämma normalvektorfältet, t.ex. en sfär eller en cylinder eller en kon. **Man får inte glömma att normera normalen.**
- Om ytan är **parametriserad** m.h.a. $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, kan vi använda en formel (se nedan) där man inte normerar normalvektorn, eftersom normeringen försvinner i härledningen: Från formeln för $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ och formeln för $dS = |\vec{N}| ds dt$ får vi:

$$\begin{aligned} \iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt, \end{aligned}$$

där D är parametriseringens definitionsmängd och

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

- Om ytan är en **grafyta till en tvåvariabelfunktion** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, kan vi också använda en formel utan normering. (Ibland måste man dock semi-normera: om man i stället för normalvektorn med sista komponenten 1 eller -1 har en annan normalvektor $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$, måste man skala normalvektorn med $\frac{1}{N_3}$ innan man använder formeln.). Normalen till grafen $z = f(x, y)$ uttrycks som $(f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1)$ (plus 1 och minus vid de partiella derivatorna vid en motsatt orientering av ytan). Det gäller också att

$$dS = \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy,$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \pm \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{(f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1)}{\sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2}} \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy \\ &= \pm \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1) dx dy.\end{aligned}$$

Vi ska nu visa ett fjärde, och ofta det trevligaste¹⁶, sätt att beräkna ytintegraler av vektorfält. Gauss' sats, Gauss-Ostrogradski sats eller Divergenssatsen uttrycker relationen mellan flödet genom en sluten yta och källtätheten i området som innesluts av ytan. Vi minns att för ett vektorfält $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ divergensen definieras av:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

vilket betyder att $\operatorname{div} \vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är ett skalärfält (trevariabelfunktion).

Gauss' sats relaterar utflödet ur en sluten yta i rummet till trippelintegralen av källtätheten (divergensen) över området som innesluts av ytan:

Sats 30. Ostrogradski–Gauss' sats / Divergenssatsen. Låt $\vec{F}$ vara ett kontinuerligt deriverbart (C^1) vektorfält definierat på en öppen mängd Ω i rummet och låt $K \subset \Omega$ vara en kompakt, regelbunden kropp vars rand $\partial K = Y$ är en orienterad, sluten yta, styckvis slät (C^1), med utåtriktad normal $\hat{N}$. Då gäller

$$\oiint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K (\operatorname{div} \vec{F}) dV.$$

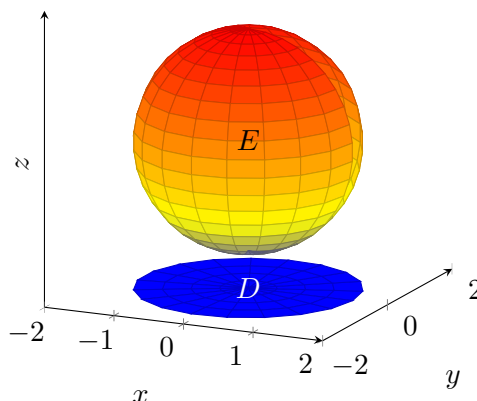
Bevis. Området K är regelbundet, vilket betyder att det kan delas upp i områden på formen

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

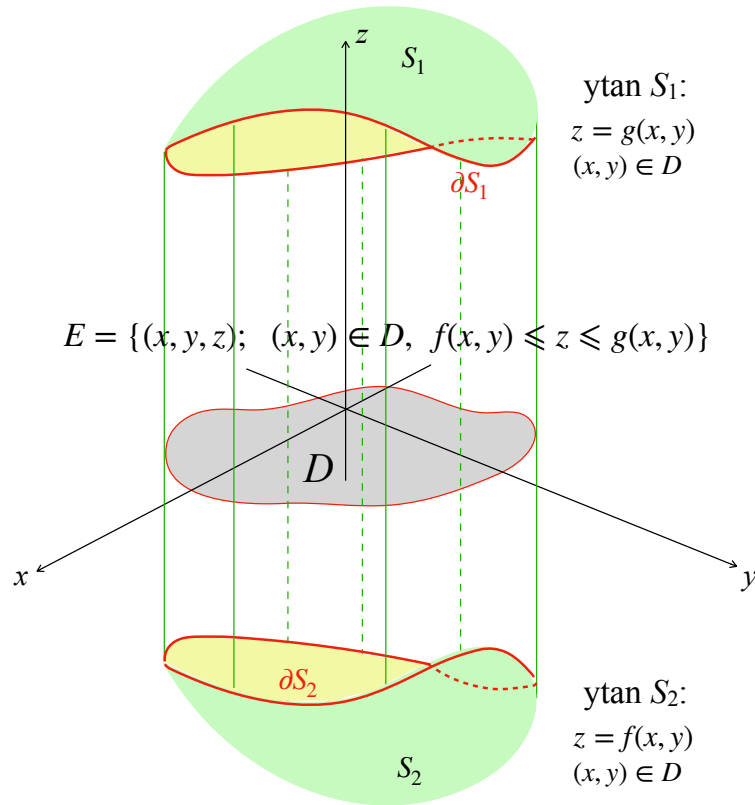
och att motsvarande uppdelningar kan göras längs de andra koordinatriktningarna. Om vi lyckas visa att

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} (0, 0, R) \cdot \hat{N} dS, \quad (*)$$

så kan vi sedan göra motsvarande bevis för P , och Q och satsen följer eftersom flödena mellan två delområden med gemensam rand tar ut varandra (jämför beviset av Greens formel).



¹⁶Trevligaste, eftersom det ofta är enklare att räkna trippelintegraler i.f.s. ytintegraler. Beräkningarna blir också ofta riktigt enkla om divergensen är konstant eller har ett betydligt enklare formeln än själva fältet. Det finns också många sätt för trippelintegraler att komma undan och inte behöver räkna alls p.g.a. symmetrier och integrander som är udda funktioner. Vi kommer dock att fortsätta behöva dessa tre metoderna som nämns i början av kapitlet, om ytan inte är sluten: då måste vi kombinera Gauss' sats med någon av de tre metoderna på den extra ytan som kompletterar vår yta till en sluten yta.



Figur 78: Ett exempel på området E i beviset för Gauss' sats. (Bild: Hania, med KeyNote.)

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D (R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, f(x, y))) dx dy.$$

Ytan S_1 kan parametreras $(x, y, z) = (x, y, g(x, y))$ för $(x, y) \in D$, så vi får

$$\hat{N} dS = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \Rightarrow \iint_{S_1} (0, 0, R) \cdot \hat{N} dS = \iint_D R(x, y, g(x, y)) dx dy$$

och på motsvarande sätt gäller det att på ytan S_2 får vi:

$$\hat{N} dS = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) dx dy \Rightarrow \iint_{S_2} (0, 0, R) \cdot \hat{N} dS = - \iint_D R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

På sidoytan S_3 är $\hat{N}$ riktad i $\vec{e}_1$ -led eller $\vec{e}_2$ -led, så där gäller $(0, 0, R) \cdot \hat{N} dS = 0$ och dessa ytor ger inget bidrag till flödesintegralen av $(0, 0, R)$. Vi har visat (*) och därmed hela satsen.

□

Exempel 103. Bestäm flödet av vektorfältet $\vec{F}$ ut genom det axelparallella rätblocket

$$K = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}, \quad \text{då :}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z + x + z \cos y, -x^2 y + e^{2x+3z}, z^2 + 4xy - \sin y^2 + 15e^{2x+y}).$$

Divergensen av $\vec{F}$ ges av

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 - x^2 + 2z \quad \text{så Gauss' sats ger}$$

$$\oiint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \cdot \vec{F} dxdydz = \iiint_K (1 - x^2 + 2z) dxdydz.$$

Vi beräknar integralen m.h.a. Fubinis sats på axelparallella rätblock:

$$\iiint_K (1 - x^2 + 2z) dxdydz = \int_0^3 \left(\int_0^4 \left(\int_0^1 (1 - x^2 + 2z) dz \right) dy \right) dx = 4 \cdot \int_0^3 [z - zx^2 + z^2]_{z=0}^{z=1} dx =$$

(Integranden beror ej på y och därför kunde vi i sista steget uppe bryta ut integreringsintervalllets längd i y -ledet, alltså faktorn 4.)

$$= 4 \cdot \int_0^3 (1 - x^2 + 1) dx = 4 \cdot \int_0^3 (2 - x^2) dx = 4 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 4 \cdot (6 - 9) = 4 \cdot (-3) = -12.$$

Observera att trippelintegrera över ett axelparallellt rätblock går enkelt och snabbt, medan att beräkna flödet på ett annat sätt skulle kräva sex olika beräkningar (en för varje sida).

Exempel 104. Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F} = (\cos y + e^z + xz^2, xz^3 + 2xy, x^5 y^7 + z^2 + 2)$ ut ur enhetssfären.

Divergensen av $\vec{F}$ ges av

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z^2 + 2x + 2z \quad \text{så Gauss' sats ger}$$

$$\oiint_{z^2+y^2+z^2=1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \nabla \cdot \vec{F} dxdydz = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (z^2 + 2x + 2z) dxdydz.$$

Funktionerna $2x$ och $2z$ är udda i x - respektive z -led och eftersom enhetssfären är symmetrisk både enligt yz - och xy -planet, så blir trippelintegralen av dessa funktioner noll. Sfäriska koordinater ger nu: $(x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi,$$

så

$$\begin{aligned} \iiint_{x^2+y^2+z^2=1} z^2 dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (\rho \cos \phi)^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) \left(\int_0^\pi \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \left[-\frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^\pi [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

(Direkt beräkning hade blivit mycket mer komplicerat.)

I första två exempel var ytorna slutna. Nu tar vi ett exempel som visar att Gauss' sats kan vara användbar för att beräkna flödesintegraler även genom ytor som inte är slutna, men som går att "sluta till" genom att lägga till ett ytstycke med enkel geometri.

Exempel 105. Beräkna flödet av $\vec{F} = (-e^{yz}, e^{xz}, z^2)$ ut ur den koniska ytan T som bestäms av $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

Ytan T är inte sluten. Däremot innesluter T tillsammans med "locket" $L = \{(x, y, z) \in T : z = 1\}$ en konisk kropp K . Vi kan använda Gauss' sats på kroppen K :

$$\iint_T \vec{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_L \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

Divergensen av $\vec{F}$ ges av

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + 0 + 2z$$

och om D betecknar enhetsskivan i xy -planet så får vi:

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dV &= \iiint_K 2z dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 2z dz \right) dx dy = \iint_D [z^2]_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dx dy \\ &= \iint_D (1 - (x^2 + y^2)) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vidare gäller det på L att $\hat{N} = (0, 0, 1)$, och $z = 1$ så:

$$\iint_L \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iint_L (-e^{yz}, e^{xz}, z^2) \cdot (0, 0, 1) dS = \iint_L z^2 dS = \iint_D 1^2 dx dy = \pi.$$

Det sökta flödet blir slutligen:

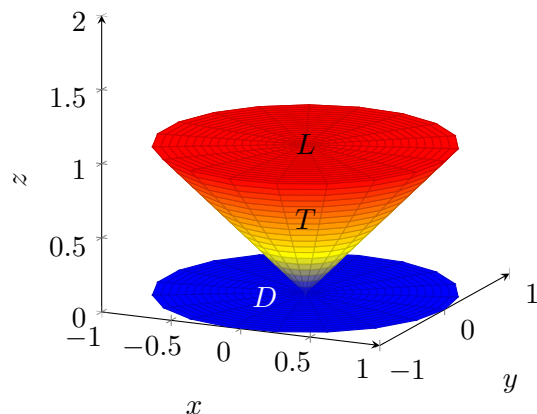
$$\iint_T \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \cdot \vec{F} dV - \iint_L \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Nu tar vi ett exempel där man behöver omsluta en singularitet:

Exempel 106. (Se Armins fil Uppgift 8) Beräkna flödet av

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

ut ur följande kroppar:



- a) Klotet $K_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \leq 1\}$ med mittpunkten i $(2, 3, 4)$ och radien 1.
- b) Klotet $K_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ med mittpunkten i $(0, 0, 0)$ och radien 1.
- c) Ellipsoiden $K_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} \leq 1\}$ med mittpunkten i $(0, 0, 0)$ och halvaxlarna 3, 4 och 5.

Först beräknar vi partiella derivator (produktregeln och kedjeregeln!):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

och ser att divergensen av $\vec{F}$ ges av

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

Fältet är definierat och C^1 i varje kropp som inte innehåller origo. Detta betyder att svaren blir följande:

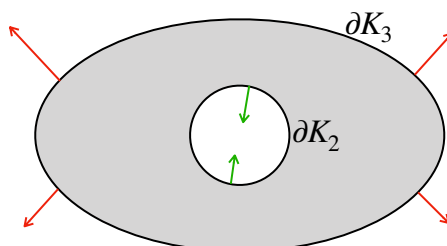
- a) Eftersom origo ligger **utanför** K_1 , kan vi använda Gauss' sats:

$$\iint_{\partial K_1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_{K_1} \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_{K_1} 0 dV = 0.$$

- b) Eftersom origo ligger **inom** K_2 , måste vi räkna m.h.a. metoderna från tidigare föreläsningar. För detaljer: se Armins fil. Resultatet:

$$\iint_{\partial K_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = 4\pi.$$

- c) Origo ligger inuti ellipsoiden K_3 och därför kan vi inte tillämpa Gauss' sats utan vidare. Vi kan dock tillämpa Gauss' sats på kroppen K mellan ellipsoidens yta ∂K_3 och sfären ∂K_2 , eftersom det inte finns någon singularitet inuti kroppen.



Figur 79: Deluppgiften c). Kroppen K mellan ellipsoidens yta ∂K_3 och sfären ∂K_2 som omsluter singulariteten. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Kroppens yta $\partial K = \partial K_3 \cup \partial K_2$, där K_3 och K_2 är orienterade ifrån kroppen K som visas i bilden. Vi vet också från divergenssatsen att ytintegralen på hela K är lika med noll.

$$0 = \iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iint_{\partial K_3} \vec{F} \cdot \hat{N} dS - \iint_{\partial K_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS$$

Vilket ger

$$\iint_{\partial K_3} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_{\partial K_2} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = 4\pi$$

från deluppgiften b).

Och, till slut, ett exempel där ingenting hjälper:

Exempel 107. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{z}{x^2 + y^2} \right)$$

ut genom cylinderns C sidoyta (*mantelyta*), dvs den ytan vars normalvektor pekar bort från z -axeln.

$$C : x^2 + y^2 = 2, \quad -2 \leq z \leq 2.$$

Här är fältet odefinierat på **hela** z -axeln! Där gäller ju att $x^2 + y^2 = 0$ för alla punkter, och vi får ju inte ha noll i nämnaren. Därför går det **inte** att omsluta singulariteten inom cylindern och tillämpa Gauss' sats, utan man måste beräkna flödesintegralen direkt från definitionen eller m.h.a. en parametrisering av cylindern.

Sammanfattningsvis: Gauss' sats kan tillämpas bara för **3D-fält**, alltså

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Satsen omvandlar ytintegralen av ett vektorfält över en sluten yta till trippelintegralen av fältets divergens över (den 3D) kroppen K inom ytan. Vad som beräknas är flödet ut från kroppen K genom K 's rand ∂K .

Antaganden som ska kontrolleras för att veta om det är OK att använda satsen:

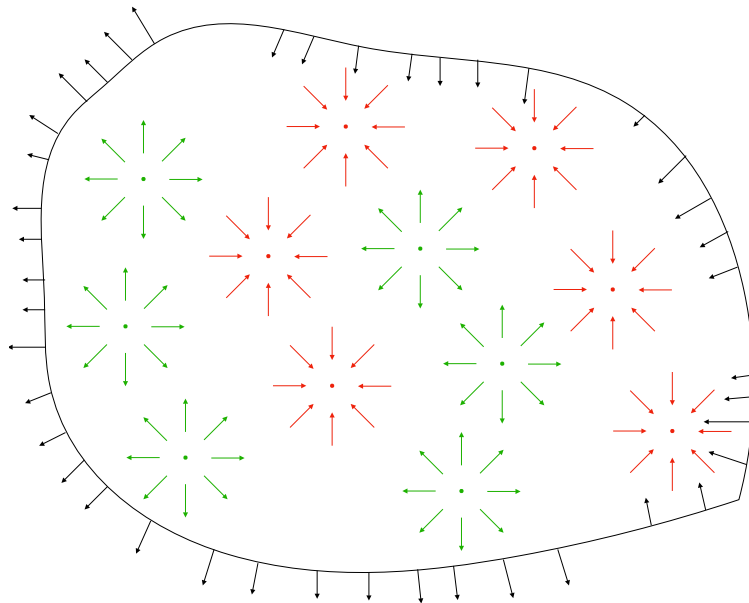
- **ytan** som vi integrerar över är **sluten**. Om detta inte är fallet, "stänger" vi den och tillämpar Gauss' sats ändå på summan av ytorna. På kompletteringen av ytan till en sluten yta tillämpar vi då en av metoderna som nämns i början av anteckningarna.
- **ytan** är **orienterad utåt** ifrån kroppen K . Om orienteringen är inåt (alltså beräknar vi flödet in i kroppen), tillämpar vi satsen ändå, men vi måste sätta minus framför trippelintegralen; ytan måste också vara stycksvis C^1 , men det är alltid fallet i uppgifterna, så det måste man inte kontrollera.
- **området** K måste vara **regelbundet**, alltså sådant att vi *kan* räkna trippelintegraler på det (alltså är K antingen ett axelparallellt rätblock, eller z -enkelt område; eller runt, så att vi kan m.h.a. sfäriskt variabelbyte omvandla det till ett axelparallellt rätblock; eller är K en union av sådana områden). Området måste också vara **slutet**, alltså innehålla hela sin rand ∂K , eftersom omvandlingsformeln gäller ytintegralen över hela randen till K .
- (Fortsättning på nästa sida.)

- **fältet** ska vara C^1 (alltså måste dess komponentfunktioner P , Q och R vara **kontinuerligt deriverbara**) inom **hela** området K ! Oftast är P , Q och R uppbyggda av polynomfunktioner, exponentialfunktioner, sinus och cosinus, och då är de t.o.m. oändligt många gånger deriverbara. Problemet uppstår oftast om man har division i formeln för P , Q eller R och uttrycket i nämnaren är noll någonstans i K . Då “omsluter man singulariteter” och tillämpar Gauss’ sats ändå på K utan kloten som innehåller singulariteterna. Glöm inte att orienteringen på sfärena som omsluter singulariteterna måste vara *inåt*! (orientering ifrån kroppen K betyder ju att den är utåt på den yttre randen och inåt kring “hål” inom området K). Ibland går det dock inte att omsluta singulariteter, som i sista exemplet ovan. Då kan man inte använda Gauss’ sats över huvud taget.

Gauss’ sats är en flerdimensionell motsvarighet till analysens fundamentalsats

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

vänsterledet är, precis som i Gauss’ sats, en integral av en derivata på ett område $[a, b]$ och högerledet bestäms, precis som i Gauss’ sats, av funktionens värden i randpunkterna a och b . Se illustrationen på sista sidan i dessa anteckningar.



Figur 80: En tolkning av Divergenssatsen: flödet ut genom ytan av kroppen är lika med summan av divergensen (källstyrkan!) över alla källor och sänkor inom hela kroppen. Divergensen i en punkt mäter ju vätskan som tillkommer eller försvinner i varje punkt. (Bild: Hania, med KeyNote.)

(**ÖVERKURS**): Med hjälp av räkneregler för partiella derivator så kan man härleda många samband mellan gradienten, divergensen och rotationen, och därigenom härleda olika varianter av Gauss' sats (se sats 9 i kapitel 16.4 i kursboken).

Sats 31. Låt Φ vara ett skalärfält och $\vec{F}$ ett vektorfält. Då gäller:

1. $\nabla \cdot (\Phi \vec{F}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{F} + \Phi(\nabla \cdot \vec{F})$
2. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \quad (\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0)$
3. $\nabla \times (\Phi \vec{F}) = (\nabla \Phi) \times \vec{F} + \Phi(\nabla \times \vec{F})$
4. $\nabla \times (\nabla \Phi) = \vec{0} \quad (\text{rot } \nabla \Phi = \vec{0})$

Det fjärde påståendet implicerar att konservativa vektorfält är virvelfria och det andra implicerar att rotation av varje vektorfält är källfri (solenoidal). Notera att Laplacianen $\Delta \Phi$ kan skrivas $\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \text{grad div } \Phi$.

Exempel 108. Första sambandet i satsen kombinerat med Gauss' sats ger:

$$\oint_Y (\Phi \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K \nabla \cdot (\Phi \vec{F}) \, dV = \iiint_K \nabla \Phi \cdot \vec{F} \, dV + \iiint_K \Phi (\nabla \cdot \vec{F}) \, dV$$

Exempel 109. Låt Φ vara ett skalärfält som är harmoniskt på K ($\Delta \Phi = 0$) och som är identiskt lika med 0 på randen Y till K . Visa att $\Phi = 0$ på hela K . Sätt $\vec{F} = \nabla \Phi$ i satsen i förra exemplet:

$$\oint_Y \Phi \nabla \Phi \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K |\nabla \Phi|^2 \, dV + \iiint_K \Phi \Delta \Phi \, dV \Rightarrow |\nabla \Phi|^2 = 0 \Rightarrow \Phi = \text{konstant}$$

men $\Phi = 0$ på randen, så $\Phi = 0$ i K .

Rekommenderade uppgifter efter F16

16.4: 1, 3, 5, 7, 11. **Extra uppgifter:** 16.4. 24, 25, 28.

Föreläsning 17: Stokes' sats

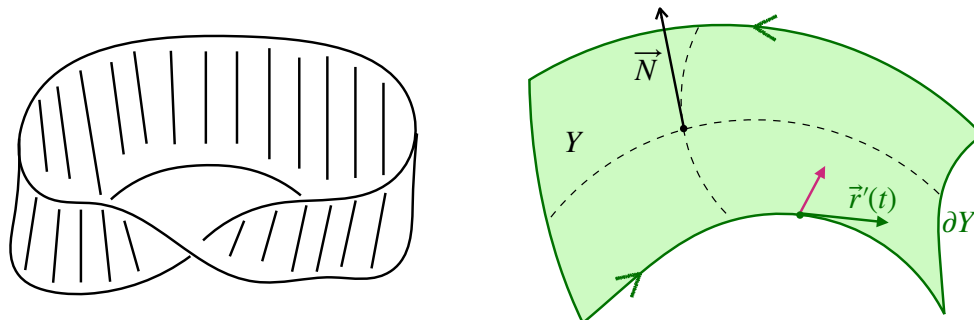
Adams 16.5

Stokes' sats med bevis och med ett motiverande exempel

Gauss sats gav ett samband mellan flödesintegralen över en sluten yta och trippelintegralen över kroppen som inneslöt av ytan. Vi ska nu undersöka vilket samband som gäller mellan kurvintegraler längs en sluten kurva i rummet och flödesintegralen över en yta som har den slutna kurvan som rand. I planet har vi tidigare visat Greens formel, som säger att

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dx dy.$$

Stokes' sats säger att detta samband gäller för alla C^2 -ytor Y i rummet med positivt orienterad rand $\gamma = \partial D$ (och inte bara för den plana ytan D med $\hat{N} = (0, 0, 1)$). Observera att till den slutna ytan i Gauss sats fanns bara en motsvarande kropp, men till den slutna kurvan i Stokes' sats finns oändligt många motsvarande ytor.



Figur 81: Bilden till vänster: **Möbiusband**, en **icke orienterbar** yta (det går inte att kontinuerligt välja normal till ytan i varje punkt); ytan har bara en sida. Bilden till höger: en **orienterbar** yta (har två sidor: utsidan/uppsidan och insidan/undersidan). **Orienteringen** av ytan och randen i Stokes' sats måste vara enligt **högerhandsregeln**, alltså antingen är ytan orienterad uppåt och randen positivt (moturs), eller är ytan orienterad nedåt och randen negativt (medurs). Promenerar man längs ytans rand ∂Y i riktning med randens orientering och med huvudet i riktning med ytans orientering, så ska man ha ytan på vänster sida (som den röda vektorn i bilden). En yta är en C^2 -yta om parametreringen är två gånger kontinuerligt deriverbar. Detta försäkrar oss om att ytan **i en omgivning av varje punkt påminner om ett plan**, d.v.s. kan approximeras bra med värdena på tangentplanet i punkten.

Sats 32. Stokes. Låt $\vec{F}$ vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält definierat på ett öppet område Ω i rummet. Låt Y vara en kompakt (sluten och begränsad) C^2 -yta i Ω orienterad uppåt, med normal $\hat{N}$ och positivt orienterad rand $\partial Y = \gamma$ som är styckvis C^1 . Då gäller:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_Y (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dS.$$

Eftersom det kan kännas ganska osannolikt att ett byte av en kurvintegral mot en ytintegral kan vara till någon fördel, illustrerar jag direkt med ett exempel att det faktiskt kan vara det:

Exempel 110. Låt

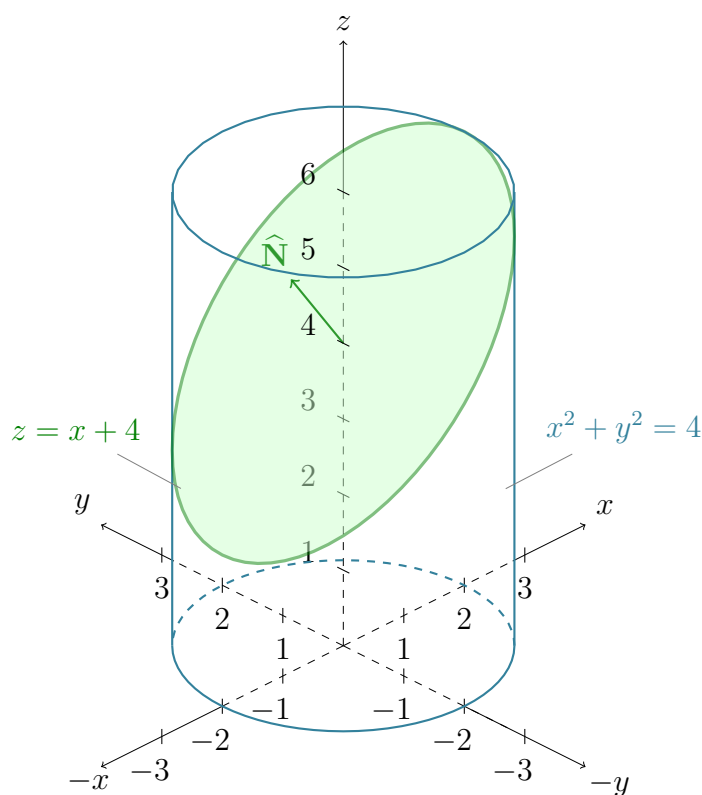
$$\vec{F}(x, y, z) = (-2y + x^2 \sin x, -7z + e^{y^2}, 5x - \cos^2 z)$$

och låt γ vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 4$ och planet $z = x + 4$, orienterad moturs sett uppifrån. Bestäm kurvintegralen $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Vi beräknar rotationen av vektorfältet:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y + x^2 \sin x & -7z + e^{y^2} & 5x - \cos^2 z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(5x - \cos^2 z) - \frac{\partial}{\partial z}(-7z + e^{y^2}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-2y + x^2 \sin x) - \frac{\partial}{\partial x}(5x - \cos^2 z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-7z + e^{y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(-2y + x^2 \sin x) \end{pmatrix}^T \\ &= (0 - (-7), 0 - 5, 0 - (-2)) = (7, -5, 2). \end{aligned}$$

I det här fallet blir det mycket enklare att beräkna ytintegralen än det skulle vara att beräkna kurvintegralen direkt från definitionen, och detta eftersom både **rotationen** av vektorfältet och ytans **normalvektorfält** är **konstanta**, och dessutom så är det **enkelt att bestämma D 's area** (där D är Y 's projektion på xy -planet; detta visas på nästa sida).



Ytan Y är ett ellipsområde i planet $z = x + 4$. Områdets projektion på xy -planet är cirkelskivan D : $x^2 + y^2 \leq 4$ med radien 2 och mittpunkten i origo. Vi kommer att använda detta strax, för att beräkna en ytintegral över Y enligt formeln för beräkning av ytintegraler över grafytan till en tvåvariabelfunktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Normalvektorn (som pekar uppåt) till planet $-x + z = 4$ är $\hat{N} = (-1, 0, 1)$. Stokes' sats ger nu:

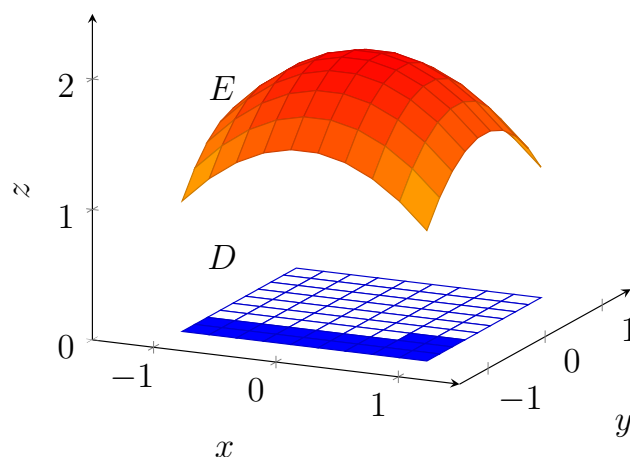
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_Y (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} dS \\ &= \iint_D (7, -5, 2) \cdot (-1, 0, 1) dx dy \\ &= \iint_D (-5) dx dy = -5 \cdot (\text{Arean av } D) = -20\pi. \end{aligned}$$

Och nu kommer satsens bevis:

Bevis. Vi visar satsen under det extra villkoret att ytan Y kan delas i delytor på formen

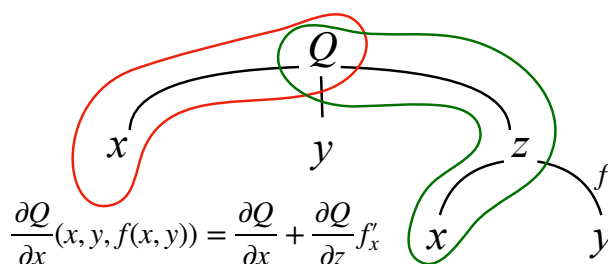
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

Om vi lyckas visa satsen på varje delyta så gäller satsen på hela ytan eftersom kurvintegralerna över de kurvor som skiljer två delytor åt tar ut varandra så att bara kurvintegralen över γ återstår (vilket illustreras i Figur 4, s.172). Vi visar satsen genom att överföra integralerna från den krökta delytan E till det plana området D . Ytan E har parametriseringen $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ för $(x, y) \in D$. Om γ_E parametriserar ∂D med $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ då parametriserar ∂D med $(x(t), y(t))$. Om $\vec{F} = (P, Q, R)$, då kan kurvintegralen längs γ_E skrivas som:^a



^aGlöm inte att $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ och $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_E} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma_E} \vec{F} \cdot (dx, dy, f'_x dx + f'_y dy) = \int_{\partial D} (P + f'_x R) dx + (Q + f'_y R) dy \\ &= [\text{GREEN}] = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (Q + f'_y R) - \frac{\partial}{\partial y} (P + f'_x R) \right) dx dy = (*) \end{aligned}$$



Figur 82: Kedjeregeln enligt diagrammet. På samma sätt beräknas övriga derivator.

I beräkningar som följer kommer vi att använda kedjeregeln (enligt diagrammet i Figur 3) på följande sätt:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, f(x, y)) = (P(x, y, f(x, y)), Q(x, y, f(x, y)), R(x, y, f(x, y))), \quad \text{alltså :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x, y, f(x, y))}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot f'_x \\ \frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot f'_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(x, y, f(x, y))}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot f'_x \\ \frac{\partial R(x, y, f(x, y))}{\partial y} &= \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot f'_y.\end{aligned}$$

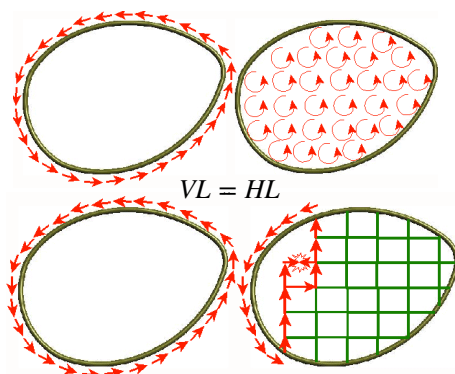
Kedjeregeln (som förklarat ovan) samt produktregeln och Schwarz sats ($f''_{xy} = f''_{yx}$) ger oss nu:

$$\begin{aligned} (*) &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} f'_x + \cancel{f''_{yx} R} + f'_y \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial R}{\partial z} f'_x} \right) \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f'_y + \cancel{f''_{xy} R} + f'_x \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial R}{\partial z} f'_y} \right) \right) dxdy \\ &= \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + f'_x \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + f'_y \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right)}_{(**)} dxdy.\end{aligned}$$

Å andra sidan så ges $\hat{N} dS$ av $(-f'_x, -f'_y, 1) dxdy$ så flödesintegralen över E kan skrivas som en dubbelintegral över D med integrand

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot (-f'_x, -f'_y, 1) = (**)$$

så kurv- och flödesintegralerna är lika och vi har visat Stokes' sats på delytan E och därmed även på hela ytan Y (enligt motiveringen i Figur 4 på sidan 172).



Figur 83: Stokes' sats: en illustration i första raden och en skiss för beviset i den andra raden.

□

Verifiering av satsen på ett exempel

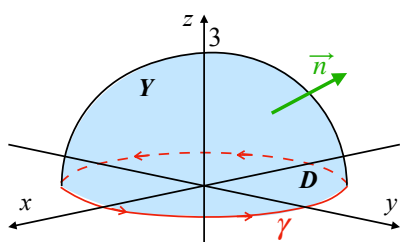
Vi kommer nu att verifiera Stokes' sats på ett exempel. Detta är förstås inget bevis för satsen, utan en illustration som gör det trovärdigt att satsen kan vara sann.

Här måste vi förstås ta ett exempel då båda integraler beräknas på ett enkelt sätt (alltså kommer man inte se nyttan av satsen, men den visades ju med det introducerade exemplet Ex. 110).

Vi ska visa att om ytan Y beskrivs som $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0\}$ (Y är alltså halvsfären med radien 3 och mittpunkten i origo, liggande i det övre halvrummet $z \geq 0$) och $\gamma = \partial Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 9\}$ är ytans rand orienterad moturs, och fältet $\vec{F}$ är definierat som $\vec{F} = (y, -x)$, då gäller

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_Y (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dS.$$

HL: För att beräkna ytintegralen i högerledet, behöver vi ta fram fältets rotation:



Figur 84: Halvsfären.

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2).$$

Eftersom Y är grafytan $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ till en tvåvariabelsfunktion på cirkelskivan $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9\}$, kan vi beräkna ytintegralen över Y med hjälp av formeln:

$$\iint_Y (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dS = \iint_D (0, 0, -2) \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) dx dy = \iint_D (-2) dx dy = -2 \cdot \text{Area}(D) = -18\pi.$$

Observera att vi inte behövde beräkna de partiella derivatorna i formeln ovan eftersom de ändå skulle multipliceras med noll. Normalens z -komponent är 1 p.g.a. orientering uppåt.

VL: Vi beräknar kurvintegralen i vänsterledet direkt från definitionen. Det är enklast att använda följande parametrisering för γ :

$$\vec{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad \vec{r}'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t).$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} \vec{F}(3 \cos t, 3 \sin t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (3 \sin t, -3 \cos t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t) dt = - \int_0^{2\pi} (9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t) dt = -9 \int_0^{2\pi} 1 dt = -18\pi. \end{aligned}$$

Vid övergången från rad 1 till rad 2 i beräkningen ovan har vi använt fältets definition: $\vec{F} = (y, -x)$, och helt på slutet den trigonometriska ettan.

Slutsatser

Från Stokes' sats är det enkelt att visa att **konservativa fält måste vara rotationsfria**. Vi har nämligen att:

$$\begin{aligned} \vec{F} \text{ konservativt} &\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{för alla slutna kurvor } \gamma \\ &\Rightarrow \iint_Y (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dS = 0 \quad \text{för alla ytor } Y \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Det är dock ingen överraskning; vi visste det redan från Schwarz sats (fältets Jacobian är lika med potentialens Hessian vilken är symmetrisk; se bilden nedan).

$$\begin{aligned} \vec{F} : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^3 & \vec{F}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ P, Q, R : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R} \\ \Phi : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{är fältets (skalär)potential om: } P = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{och} \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{och} \quad R = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned}$$

Schwarz sats ger då följande nödvändigt villkor för fältet att vara konservativt (att ha en potential):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

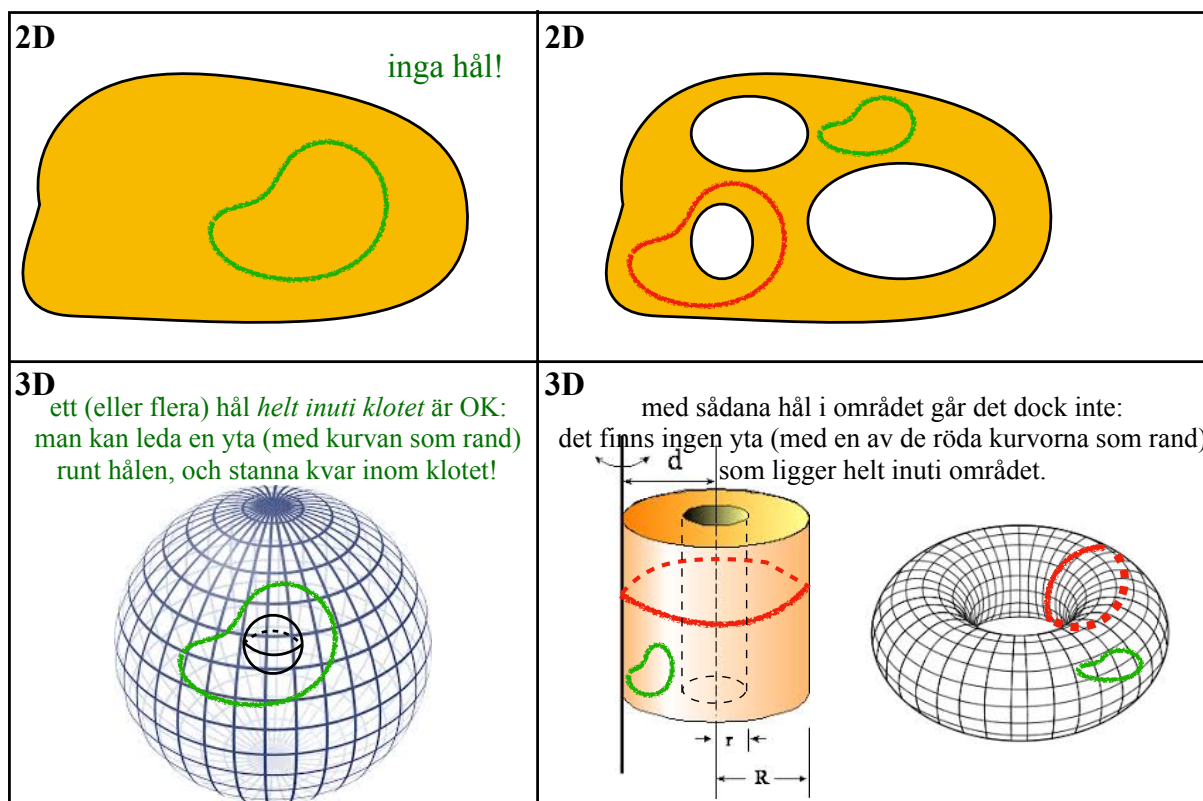
Det är så, eftersom potentialens Hessian är symmetrisk (Schwarz!) och den är lik med fältets Jacobian:

$$\mathcal{H}(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} = D\vec{F}$$

Figur 85: Motivering för de nödvändiga villkoren för ett 3D-vektorfält att vara konservativt.

Det omvända gäller, som tidigare nämnts, på enkelt sammanhängande områden. (Ett område kallas **enkelt sammanhängande** om varje sluten enkel kurva i området kan, inom området, kontinuerligt deformeras till en punkt.) Nu kan vi bevisa detta:

Sats 33. (Ett tillräckligt villkor för **konservativa vektorfält i enkelt sammanhängande områden**) Låt $\vec{F}$ vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält definierat på ett öppet och enkelt sammanhängande område Ω i rummet. Om $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ i hela Ω , då är fältet



Figur 86: Till vänster i bilden: enkelt sammanhängande områden i 2D och 3D; till höger i bilden: icke enkelt sammanhängande områden i 2D och 3D (de röda kurvorna går inte att kontinuerligt, inom området, deformera till en punkt).

tet konservativt; det finns alltså en (skalär) potential för fältet: $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $\nabla\Phi = \vec{F}$.

Bevis. Det räcker att visa att kurvintegralen av fältet över en godtycklig sluten kurva i Ω är lika med noll. Låt γ vara en glatt sluten kurva i Ω . Eftersom Ω är enkelt sammanhängande, då finns det en (glatt) yta Y s.a. $\gamma = \partial Y$, alltså sådan att γ är Y :s rand. (Hur så?: Ta vilken som helst C^2 yta i Ω längs vilken γ kontinuerligt deformeras till en punkt!). Då gäller det från Stokes' sats och från antagandet att fältets rotation är noll:

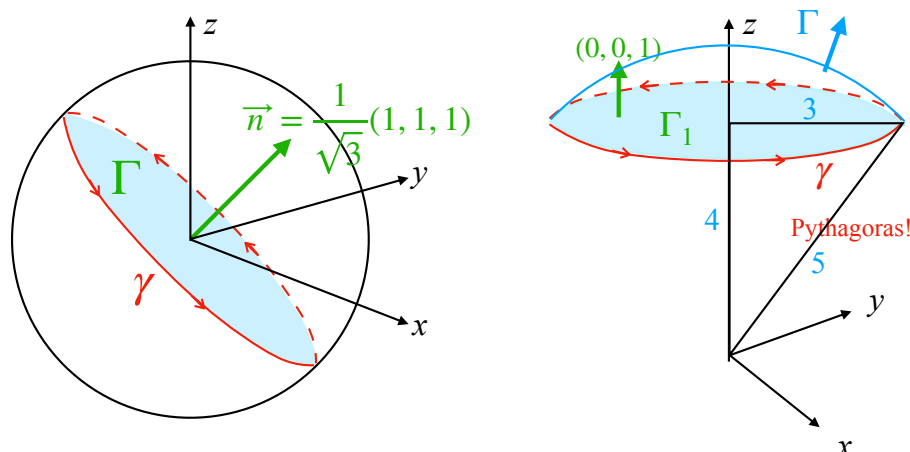
$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = [\text{Stokes}] = \pm \iint_Y (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dS = [\text{rot } \vec{F} = \vec{0}] = 0.$$

□

Detta med det tillräckliga villkoret är överkurs. Man ska dock veta att villkoret $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ bara är nödvändigt för att fältet $\vec{F}$ ska vara konservativt. För att definitivt visa att fältet är konservativt (utan att blanda in enkelt sammanhängande områden) räcker det att beräkna fältets potential.

Vanliga räkneexempel

I de vanligaste räkneexemplen beräknar man kurvintegraler av ett vektorfält genom att omvandla dem till flödesintegraler över en yta med kurvan som rand. Det brukar vara enkelt att beräkna ytintegralen i stället eftersom man kan välja ytan så att den är enkelt hanterbar. Ofta är också fältets rotation antingen konstant eller så försvinner de icke-konstanta komponenterna av rotationen i multiplikationen med noll från normalvektorn.



Figur 87: Bilder till uppgifter 10.23 och 10.28 från *Flerdimensionell analys*, Jonas Månsson.

Exempel 111. Uppgift 10.23. Geometrisk tolkning av ytintegraler. Kurvan γ utgörs av skärningen mellan enhetssfären och planet $x + y + z = 0$. Beräkna det arbete W kraftfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$$

uträttar längs γ . Välj själv och ange orienteringen på γ .

Eftersom planet $x + y + z = 0$ passerar origo och enhetssfären har mittpunkten i origo, blir skärningskurvan mellan dessa två den stora enhetscirkeln i planet $x + y + z = 0$. Kalla den plana cirkelskivan som har cirkeln som rand för Γ . (Se bilden ovan, den till vänster.) Ytans enhetsnormal är $\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Väljer man γ 's riktning som positiv, måste man välja den positiva enhetsnormalen. Till Stokes' sats behöver vi fältets rotation: rot $\vec{F} = (1 + 1, 2 + 2, 3 + 3) = (2, 4, 6)$.

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Gamma} (2, 4, 6) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) dS = 4\sqrt{3} \iint_{\Gamma} dS = 4\sqrt{3} \cdot \text{Area}(\Gamma) = 4\sqrt{3}\pi.$$

Observera att det vore svårare att gå över till xy -planet och använda γ 's projektion på detta plan (ellips!). Det är enklare att använda den geometriska tolkningen av ytintegraler av konstanta funktioner (som konstanten gånger ytans area) som vi har lärt oss tidigare. Detta eftersom det är enklare att beräkna Γ 's area (enhetsskivans) än arean för ett ellipsområde.

Exempel 112. Uppgift 10.28. Byte av ytan mot en enklare hanterbar yta. Fältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = (x + yz - z^2, x + yz - z^2, x + yz - z^2)$. Beräkna

$$\iint_{\Gamma} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS,$$

där Γ är ytan $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 9$, orienterad så att normalen får positiv z -koordinat. (Se bilden på sida 176, den till höger.)

Stokes' sats ger

$$\iint_{\Gamma} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där γ är randen till Γ (se bilden på sida 176). Ytan Γ_1 : cirkelskivan med radien 3 i planet $z = 4$, alltså ytan definierad med $x^2 + y^2 \leq 9$, $z = 4$, har också kurvan γ som rand. Från Stokes' sats till den nya ytan får vi alltså

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Gamma_1} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS.$$

Den andra ytintegralen är enklare att beräkna än den vi skulle beräkna, eftersom den nya ytan är platt och därför har en konstant enhetsnormal. Enhetsnormalen med positiv z -koordinat är $(0, 0, 1)$ och fältets rotation är $\operatorname{rot} \vec{F} = (3z - y, y - 2z - 1, 1 - z)$. Eftersom Γ_1 's normal är $(0, 0, 1)$ och $z = 4$ på Γ_1 , får vi skalärprodukten $(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} = 1 - z = -3$. Nu kan vi beräkna vår ursprungliga ytintegral:

$$\iint_{\Gamma} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS = \iint_{\Gamma_1} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS = \iint_{\Gamma_1} (-3) \, dS = -3 \cdot \operatorname{Areal}(\Gamma_1) = -3 \cdot \pi \cdot 3^2 = -27\pi.$$

I exemplet ovan hade vi kunnat använda vilken yta som helst med rand γ , exempelvis den sfäriska Γ , men då blir beräkningarna svårare. Samma räknemetod kan ni använda i den rekommenderade uppgiften 16.5-3 (Adams Calculus).

Exempel 113. Användning av satsen åt andra hållet. Beräkna

$$\iint_Y (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

där $\vec{F}(x, y, z) = (e^z, 4 - x, x \cos y)$ och ytan Y är den delen av paraboloiden $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger ovan xy -planet, orienterad med normalen som pekar upp från $(0, 0, 9)$.

Från Stokes' sats får vi:

$$\iint_Y (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial Y} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Randen av paraboloidbiten är cirkeln (i xy -planet) med radien 3 och mittpunkten i origo. Vi kan parametrisera den med

$$\vec{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{alltså} \quad d\vec{r} = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0)$$

och

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = e^0(-3 \sin t) + (4 - 3 \cos t)3 \cos t + 0 = -3 \sin t + 12 \cos t - 9 \cos^2 t$$

vilket ger att kurvintegralens värde (och därmed även ytintegralens värde) är

$$\int_0^{2\pi} (-3 \sin t + 12 \cos t - 9 \cos^2 t) dt = 0 + 0 - 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 = -9\pi.$$

Trots att exemplet är något mer teoretiskt än de vanligaste exemplen, gick det ändå fint att lösa ens man insåg att det går bra att tillämpa Stokes' sats.

En sammanfattning

Stokes' sats kan tillämpas bara för **3D-fält**, alltså

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Satsen omvandlar kurvintegralen av ett vektorfält över en sluten kurva till ytintegralen av fältets rotation över någon (nästan vilken som helst!) yta Y inom kurvan. Som Greens sats, men där var allt platt, och här kan ytan vara "buktig", "kupig", som ett skynke som svävar i luften.

Antaganden som ska kontrolleras för att veta om det är OK att använda satsen:

- **kurvan** som vi integrerar över är **sluten**. Här är det ett måste! Ingenting ska behöva "stängas" här såsom vid Greens formel. Kurvan måste också vara styckvis C^1 .
- **ytan** (nästan vilken som helst!) som har kurvan som rand är av klass C^2 (har alltså inga vassa kanter; kan t.ex. vara en halvsfär eller ett plan). Ibland är hela vitsen med användning av Stokes' sats att man faktiskt kan *välja* en yta med kurvan som rand som man kommer att ytintegrera över. Oftast väljer man det enklaste möjliga området, som t.ex. att stycke plan eller en halvsfär, så att det är enkelt att hitta normalen till ytan, vilket man behöver för beräkning av ytintegralen.
- kurvan och ytan är **orienterade enligt högerhandsregeln**, alltså antingen:
 - kurvan **moturs** sedd från en punkt högt på z -axeln och ytan **uppåt**, eller tvärtom:
 - kurvan **medurs** sedd från en punkt högt på z -axeln och ytan **neråt**. Inget minus sätts här, utan kombinationen av riktningen och orienteringen ska passa ihop.

Om det finns *hål* inuti ytan, ska deras rand vara orienterad tvärt om mot den yttre randen, precis som vid Greens formel. Deras orientering ska alltså styras av ytans orientering och *vänsterhandsregeln*. Ytan finns därmed till vänster i varje punkt längs randens riktning.
- **fältet** ska vara C^1 (alltså dess komponenter P , Q och R måste vara kontinuerligt deriverbara) på **hela** ytan Y ! (Samma regler som för Greens och Gauss satser.)

En viktig observation: Med våra kunskaper kan vi oftast (med några undantag, som t.ex. i Exempel 113) använda Stokes' sats enbart åt ett håll: för att beräkna en kurvintegral av ett vektorfält m.h.a. ytintegralen (över en yta inom kurvan) av fältets rotation:

$$\oint_{\partial Y} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_Y (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dS.$$

Vi kan dock oftast¹⁷ inte gå åt andra hållet (alltså beräkna en ytintegral av ett fält $\vec{F}$ över en yta m.h.a. kurvintegralen över ytans rand av ett fält som har $\vec{F}$ som rotation), eftersom vi då skulle behöva ta fram ett vektorfält $\vec{G}$ som har det givna fältet som rotation ($\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$), men detta ingår inte i vår kurs:

$$\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_Y (\text{rot } \vec{G}) \cdot \hat{N} \, dS = \oint_{\partial Y} \vec{G} \cdot d\vec{r}. \quad (1)$$

Mer teoretiska tillämpningar

Eftersom integranden i flödesintegralerna i Stokes' sats är $\text{rot } \vec{G}$, så har vi bara nytta av sambandet (1) ovan för vektorfält $\vec{F}$ som kan skrivas som $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$ för något vektorfält $\vec{G}$.

Definition 38. Om $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$, så kallas $\vec{G}$ en *vektorpotential* till $\vec{F}$.

Om $\vec{F}$ har en vektorpotential $\vec{G}$ så är $\vec{F}$ källfritt, eftersom $\text{div } \vec{F} = \text{div } (\text{rot } \vec{G}) = 0$. Omvänt gäller om varje sluten yta i K omsluter ett område som ligger helt i K . Under vissa villkor gäller alltså:

- $\vec{F}$ har skalärpotential $\Phi \iff \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$,
- $\vec{F}$ har vektorpotential $\vec{G} \iff \text{div } \vec{F} = 0$.

En vektorpotential är inte entydig. Om $\vec{G}_1$ och $\vec{G}_2$ är två vektorpotentialer till $\vec{F}$, så gäller $\text{rot}(\vec{G}_1 - \vec{G}_2) = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G}_1 - \vec{G}_2 = \nabla \Phi$ för någon funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Nu kommer ett till exempel, som är mer avancerat (men roligt!) och som är optionellt att läsa. I exemplet ska vi hitta en vektorpotential till ett fält för att kunna tillämpa Stokes' sats.

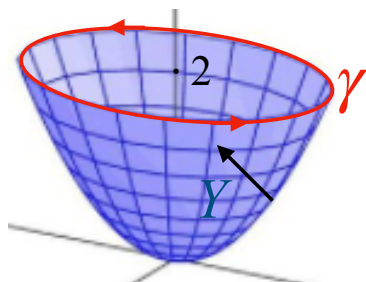
Exempel 114. Låt $\vec{F} = (x, -y, 0)$. Beräkna med användning av Stokes' sats flödet av fältet $\vec{F}$ in genom ytan $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2, z \leq 2\}$.

Stokes' sats kan tillämpas om vi hittar en vektorpotential till fältet $\vec{F}$, alltså sådant fält $\vec{G}$ att $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$. Då gäller

$$\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_Y (\text{rot } \vec{G}) \cdot \hat{N} \, dS = \oint_{\partial Y} \vec{G} \cdot d\vec{r} = (*)$$

Om $\vec{G} = (P, Q, R)$, då kan villkoret att $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$ skrivas som följande ekvationssystem:

¹⁷annars om vi av någon anledning råkar veta att vårt fält är rotationen till något annat fält; se nästa avsnitt!



Figur 88: Paraboloiden.

$$\begin{cases} R'_y - Q'_z = x \\ P'_z - R'_x = -y \\ Q'_x - P'_y = 0. \end{cases}$$

Här kan man t.ex. chansa på att det finns någon lösning till systemet för vilken gäller $P = 0$, $Q = 0$ (eftersom det finns många olika lösningar: vektorpotential, om den existerar, är långt ifrån entydig).^a Då reduceras ekvationssystemet till: $R'_y = x$, $-R'_x = -y$ vilket har $R = xy$ som en av lösningar. Vektorfältet $\vec{G} = (0, 0, xy)$ är alltså en vektorpotential till fältet $\vec{F}$.

^aMan gör likadant om man ska hitta en vektor i rummet som är ortogonal mot en given vektor: då är det enklast att hitta en ortogonal vektor som har någon av komponenterna lika med noll, alltså är parallell med någon koordinataxel.

Ytan Y är paraboloiden ovan cirkelskivan $x^2 + y^2 = 2$ i xy -planet. Kurvan γ är cirkeln med radien $\sqrt{2}$ och mittpunkten i $(0, 0, 2)$ (och beskrivs med ekvationerna $x^2 + y^2 = 2$, $z = 2$) i planet $z = 2$. Eftersom vi ska beräkna flödet **in** i paraboloiden, måste normalvektorn till Y vara riktad uppåt (mot insidan), alltså måste randen vara orienterad moturs. Nu vet vi allt som behövs för att fortsätta vår beräkning med insättning av $\vec{G} = (0, 0, xy)$:

$$(*) = \oint_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} 0 dx + 0 dy + xy dz = 0$$

eftersom i planet $z = 2$ gäller $dz = 0$. Slutsvaret är alltså noll.

Rekommenderade uppgifter efter F17

16.5: 1, 3, 7. **Extra uppgifter:** 16.5: 5, 11, 13.

Föreläsning 18: Tentaförberedande; repetition på hela kursen

Alla våra integraler

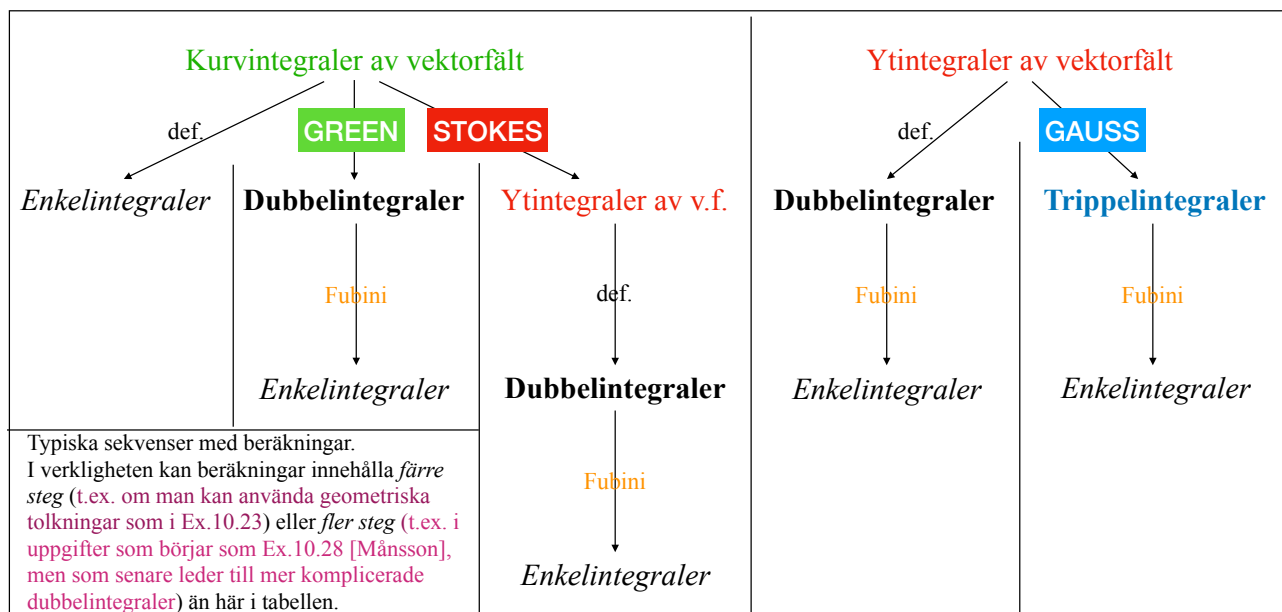
Hittills har vi sett följande sorters integraler:

- **Enkelintegraler** $\int_a^b f(x)dx$ för en begränsad $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ som beräknar arean (med tecken) mellan grafen $y = f(x)$ och x -axeln.
- **Dubbelintegraler** $\iint_D f(x, y)dxdy$ för en begränsad $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (där D är ett kompakt område i planet: x -enkelt, y -enkelt eller r -enkelt) som beräknar volymen (med tecken) mellan grafen $z = f(x, y)$ och xy -planet. (Eller, om $f(x, y) = 1$ i hela D , D 's area.)
- **Trippelintegraler** $\iiint_K f(x, y, z)dxdydz$ för en begränsad $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ (där K är ett kompakt område i rummet: z -enkelt eller R -enkelt) som beräknar t.ex. den totala massan för kroppen K om funktionen f beskriver densiteten i varje punkt i K , eller K 's volym om $f(x, y, z) = 1$ i hela K .
- **Kurvintegraler av funktioner** $\int_\gamma f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ över en n -dimensionell kurva γ betecknas $\int_\gamma f ds$; de beräknar kurvans massa om f beskriver densiteten i varje punkt. Om $n = 2$, alltså kurvan är plan och f är en tvåvariabelfunktion, beskriver kurvintegralen dessutom arean (med tecken) av den vertikala ytan mellan kurvan och grafytan $z = f(x, y)$.
- **Kurvintegraler av vektorfält** $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (**cirkulationer** $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ om kurvan är sluten) av fältet $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ beskriver arbetet som fältets krafter uträttar för att flytta en partikel längs kurvan γ .
- **Ytintegraler av funktioner** $\iint_Y f(x, y, z)dS$ för en begränsad trevariabelfunktion $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ där $Y \subset \mathbb{R}^3$ är en kompakt yta i rummet. Sådana integraler kan beskriva ytans area om $f(x, y, z) = 1$ i varje punkt av Y , eller ytans massa om f beskriver densiteten i varje punkt.
- **Ytintegraler av vektorfält (flödesintegraler)** $\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N}dS$ där Y är en kompakt yta i rummet och fältet är tredimensionellt, alltså $\vec{F} = (P, Q, R)$. Beräknar flödet ut genom Y av vätskan som rör sig med hastigheten som beskrivs med fältet $\vec{F}$.

Att beräkna kurvintegraler av vektorfält

Senaste föreläsningar har vi hållit på med att beräkna integralerna från andra halvan av listan *Alla våra integraler* med hjälp av integralerna från den första halvan av listan. Se grafiken.

Hittills har vi lärt oss fyra metoder för att beräkna kurvintegraler av vektorfält, och dessa metoder tillämpas i olika situationer (fast ibland kan flera metoder passa samma uppgift!):



Figur 89: Omvandling av komplicerade integraler till enklare integraler.

- **Direkt från definitionen**, m.h.a. en parametrisering av kurvan ($\vec{r}(t)$ för $t \in [a, b]$) och skalärprodukten, om kurvans parametrisering anges i uppgiften, eller om kurvan är sådan att vi själva kan parametrisera den, t.ex. en rät linje, en cirkel, en ellips eller grafen till en funktion (antingen $y = f(x)$ för $x \in [a, b]$ eller $x = g(y)$ för $y \in [a, b]$):

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Metoden fungerar teoretiskt alltid vid integrering över kurvor med känd parametrisering, men i praktiken måste fältets komponenter vara någorlunda enkla, annars får vi en riktigt hemsk enkelintegral att lösa, vilket kan vara problematiskt. Fältet kan vara 2D eller 3D, behöver inte vara konservativt.

- **Enligt formeln** $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$: fungerar bäst om kurvan består av flera vertikala och horisontella bitar som i uppgift 8 (Adams 15.4), där vi kan reducera problemet till flera envariabel-problem. Fungerar för alla sorters 2D-vektorfält.
- **Med användning av Huvudsatsen**. Metoden fungerar **enbart för konservativa fält**, både i 2D och 3D. När ska metoden användas? Om det är tydligt att värdet på integralen inte beror på den konkreta vägen, utan enbart på start- och ändpunkten. Innan du börjar tillämpa metoden, försäkra dig dock att fältet verkligen är konservativt! Annars kan man ju inte hitta någon potential, vilket behövs till beräkningen.
- **Greens sats**: omvandling av en cirkulation över en kurva till en dubbelintegral över området inuti kurvan: Låt $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ vara ett planärt vektorfält definierat på en öppen mängd Ω i planet och låt $D \subset \Omega$ vara ett kompakt, regelbundet område vars rand ∂D är en positivt orienterad, styckvis glatt (C^1), sluten

kurva. Om $\vec{F}$ har kontinuerliga partiella derivator på **hela** D , då gäller:

$$\oint_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

- **Stokes' sats:** en generalisering av Greens formel för tredimensionella vektorfält.

Stokes' sats omvandlar en kurvintegral av ett 3D-vektorfält över en sluten kurva till en ytintegral av fältets rotation över en godtycklig glatt yta som har kurvan som rand. Trots att ytintegraler är sista på vår lista och är jobbigaste att beräkna, kan vi då i några fall ändå få enklare beräkningar efter omvandlingen av kurvintegralen till en ytintegral. Det är mycket viktigt att behärska metoderna för beräkningen av ytintegraler.

Att beräkna ytintegraler av vektorfält (flödesintegraler)

Vi har lärt oss tre metoder (plus Gauss sats) för beräkning av flödesintegraler. Här följer listan med de tre metoderna för beräkning av ytintegraler av vektorfält

$$\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS$$

- **Direkt från definitionen**, där vi tar fram det (normerade!) normala vektorfältet till ytan och multiplicerar det skalärt med fältet $\vec{F}$, och sedan integrerar skalärfältet $\vec{F} \cdot \hat{N}$ över ytan Y . Metoden fungerar om ytan är så att man enkelt kan bestämma normalvektorfältet, t.ex. en sfär eller en cylinder eller en kon. Man får inte glömma att normera normalen!:

- Normal **till en grafyta** $z = f(x, y)$: $\vec{N}_1 = (f'_x, f'_y, -1)$, $\vec{N}_2 = (-f'_x, -f'_y, 1)$.
- Normal **till planet** $ax + by + cz + d = 0$: $\vec{N}_1 = (a, b, c)$, $\vec{N}_2 = (a/c, b/c, 1)$ om $c \neq 0$.
- Normal **till sfären** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: $\vec{N} = (x, y, z)$, $\hat{N} = (x/a, y/a, z/a)$.
- Normal **till cylindern** $x^2 + y^2 = a^2$: $\vec{N} = (x, y, 0)$, $\hat{N} = (x/a, y/a, 0)$.

Den **normerade** normalen beräknar man från en godtycklig normal $\vec{N}$ som $\hat{N} = \vec{N}/\|\vec{N}\|$ (möjligen med ett minustecken om man måste byta riktning).

- **Om ytan är parametriserad** m.h.a. $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, kan vi använda en formel (se nedan) där man inte normerar normalvektorn, eftersom normeringen försvinner i härledningen:

Från formeln för $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ och formeln för $dS = |\vec{N}| ds dt$ får vi:

$$\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt,$$

där D är parametriseringens definitionsmängd och

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right).\end{aligned}$$

- **Om ytan är en grafyta** till en tvåvariabelfunktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, kan vi också använda en formel utan normering. (Ibland måste man dock semi-normera: om man i stället för normalvektorn med sista komponenten 1 eller -1 har en annan normalvektor $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$, måste man skala normalvektorn med $\frac{1}{N_3}$ innan man använder formeln.) Normalen till grafytan $z = f(x, y)$ uttrycks som $(f'_x(x, y), f'_y(x, y), -1)$ (plus 1 och minus vid de partiella derivatorna vid en motsatt orientering av ytan). Det gäller också att

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy,$$

vilket ger

$$\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \pm \iint_D \vec{F} \cdot \frac{(f'_x, f'_y, -1)}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy = \pm \iint_D \vec{F} \cdot (f'_x, f'_y, -1) dx dy.$$

Alla våra huvudsatser

Vi har nu samlat på oss inte färre än fem huvudsatser! I varje huvudsats är idén densamma: integralen av någon slags derivata (envariabel-derivatan, gradienten, divergensen eller rotationen) över ett område—alltså summan av lokala förändringar i funktionen i hela området—uttrycks m.h.a. funktionens värden på områdets rand. Idag har vi lärt oss kursens sista huvudsats. Den uppvisar följande liknelser med kursens tidigare huvudsatser:

- med **Greens formel**: samma derivata är inblandad i båda satser, och därför ses Stokes' sats som en 3D-generalisering av Greens formel. Det finns dock några riktigt viktiga skillnader mellan satserna: i fältets dimension och i detta att området D i Greens formel är fast, medan ytan Y i Stokes' sats kan vara (nära på) godtycklig.
- med **Huvudsatsen för konservativa vektorfält**: Ytintegral av **rotationen** är **ytberoende** (och är lika med kurvintegralen av en **vektorpotential** över områdets rand) enligt Stokes' sats. Kurvintegral av **gradienten** är **vägoberoende** (uttrycks m.h.a. värdena till en **skalärpotential** i kurvans ändpunkter) enligt Huvudsatsen för konservativa vektorfält.

Se illustrationerna på slutet av dessa anteckningar.

Lösta repetitionsuppgifter

I detta avslutande kapitel ska vi gå igenom några uppgifter.

Några tips till tentaplugget: Läs anteckningarna, kurslitteraturen, titta på filerna som jag lägger upp på Canvas, räkna gamla tentor och rekommenderade uppgifter. Har du det jobbigt: be om hjälp. Titta också på alla kursmål i kursdokumentet för att vara säker att du inte har missat något.

Exempel 115. TEN1-2020-04-30 upp.4 Låt $f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$.

- Bestäm och klassificera alla stationära punkter till funktionen f med en godtycklig metod från kursen (andraderivatatestet eller kvadratkomplettering).
- En av de stationära punkterna är $(a, b) = (1, 1)$. Skriv ner Taylorutvecklingen av grad 2 för f kring punkten och motivera med både formler och ord hur man känner igen från Taylorutvecklingen vilken karaktär stationära punkten har. Kvadratkomplettera.

Lösningförslag

Deluppgift a

Vi deriverar funktionen partiellt och löser ett lämpligt ekvationssystem för att hitta de stationära punkterna.

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= 9x^2 + 6xy - 15 = 0 \\ f'_2(x, y) &= 3x^2 - 3y^2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2xy - 5 = 0 \\ (x - y)(x + y) = 0 \end{cases}$$

Andra ekvationen ger $x = y$ eller $x = -y$. Nu kollar vi vad som händer med den första ekvationen i båda fall:

$$y = x \Rightarrow 5x^2 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{kritiska punkter } (1, 1) \text{ och } (-1, -1)$$

$$y = -x \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \text{kritiska punkter } (\sqrt{5}, -\sqrt{5}) \text{ och } (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$$

Vi deriverar funktionen igen för att bestämma Hessianmatrisen.

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= 18x + 6y \\ f''_{12}(x, y) &= 6x \\ f''_{22}(x, y) &= -6y \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 18x + 6y & 6x \\ 6x & -6y \end{pmatrix}$$

I de kritiska punkterna får vi:

$$\mathcal{H}_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -24 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_f(\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} 12\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \\ 6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f(-\sqrt{5}, \sqrt{5}) = \begin{pmatrix} -12\sqrt{5} & -6\sqrt{5} \\ -6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Vi undersöker motsvarande kvadratiska former (dividerade med koefficienterna 6 i de första två fallen och $6\sqrt{5}$ i de två sista; detta ändrar inte slutsvaret, men underlättar beräkningarna):

- $(1, 1)$ motsvarar $Q(h, k) = 4h^2 + 2hk - k^2 = 4\left(h + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{5k^2}{4}$ indefinit: sadelpunkt.
- $(-1, -1)$ motsvarar $Q(h, k) = -4h^2 - 2hk + k^2 = -4\left(h + \frac{k}{4}\right)^2 + \frac{5k^2}{4}$ indefinit: sadelpunkt.
- $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ motsvarar $Q(h, k) = 2h^2 + 2hk + k^2 = 2\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{2}$ positivt definit: lokalt minimum.
- $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ motsvarar $Q(h, k) = -2h^2 - 2hk - k^2 = -2\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{2}$ negativt definit: lokalt maximum.

Svar: Funktionen har fyra stationära punkter: sadelpunkter i $(1, 1)$ och i $(-1, -1)$, ett lokalt maximum i $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ och ett lokalt minimum i $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

Deluppgift b

Taylorutvecklingen (av grad 2) till f i omgivningen av punkten (a, b) beräknas enligt formeln:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + (f'_1, f'_2) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h, k) \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2}).$$

För punkten $(a, b) = (1, 1)$ blir det (alla partiella derivatorna beräknades i deluppgiften a):

$$f(1 + h, 1 + k) = f(1, 1) + (0, 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h, k) \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2})$$

alltså

$$f(1 + h, 1 + k) = f(1, 1) + \frac{1}{2}(24h^2 + 12hk - 6k^2) + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2}).$$

Eftersom resttermen är försumbart liten jämfört med alla andragradstermerna, kan vi säga att

$$f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) \approx 3(4h^2 + 2hk - k^2)$$

eller, efter kvadratkompletteringen (se deluppgift a):

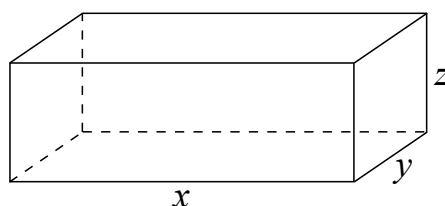
$$f(1+h, 1+k) - f(1, 1) \approx 12\left(h + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{15k^2}{4}.$$

Eftersom högerledet kan anta både positiva och negativa värden i godtyckligt små omgivningningar av origo (negativa värden vid ett godtyckligt nollskilt värde på k och $h = -k/4$; positiva vid $k = 0$ och en godtycklig $h \neq 0$), har även differensen i vänsterledet olika tecken i godtyckligt små omgivningningar av punkten $(1, 1)$, vilket betyder att det varken är ett lokalt minimum eller maximum i punkten $(1, 1)$, utan en sadel.

Exempel 116. TEN1-2020-04-30 upp.5 Bestäm minimal ytarea till en öppen låda (alltså basen och fyra sidor, utan lock) i en form av ett rätblock med volym 32.

Lösningsförslag

Detta är ett exempel på ett optimeringsproblem med bivillkor som kan lösas på minst två sätt. Det räcker förstås att presentera ett sätt på tentamen.



Figur 90: Illustration till uppgift 5.

- **Sätt 1:** Bestäm minsta möjliga värdet på $f(x, y, z) = 2yz + 2xz + xy$ (beteckningar som i bilden ovan) för positiva x , y och z sådana att $xyz = 32$. Villkoret tillåter oss lösa ut en variabel, t.ex. $z = \frac{32}{xy}$ och begränsa därmed uppgiften till en optimeringsuppgift i två variabler. Bestäm minimum för

$$S(x, y) = \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + xy$$

för positiva x och y . Vi måste hitta stationära punkter till S . Partiell derivering ger:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = -\frac{64}{x^2} + y, \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = -\frac{64}{y^2} + x.$$

För stationära punkter måste alltså gälla samtidigt

$$64 - x^2y = 0 \quad \text{och} \quad 64 - y^2x = 0,$$

alltså $xy(x - y) = 0$. Eftersom våra variabler är positiva så måste det gälla $x = y$ vilket, efter insättningen i $64 - x^2y = 0$, ger $x = 4 = y$. Det finns alltså en stationär punkt $(x, y) = (4, 4)$.

För att bedöma om det är en max- eller min-punkt, måste vi undersöka Hessianen i punkten. Till detta behöver vi andra ordningens partiella derivator:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, y) = \frac{128}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x, y) = \frac{128}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Dessa blir i den stationära punkten

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(4, 4) = 2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(4, 4) = 2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(4, 4) = 1 = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(4, 4)$$

och Hessianen i punkten är

$$\mathcal{H}_S(4, 4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

och den motsvarande kvadratiska formen (med förkortad notation $\vec{h} = (h, k)$):

$$Q(h, k) = \vec{h}^T \mathcal{H}_S(4, 4) \vec{h} = 2h^2 + 2hk + 2k^2 = 2(h^2 + hk + k^2) = 2(h + \frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{2}k^2$$

vilket endast antar **positiva** värden om $(h, k) \neq (0, 0)$, och vi således får ett lokalt **minimum**. Om $x = 4 = y$ då måste $z = \frac{32}{xy} = 2$.

Svar: Höjden måste vara 2 och både längden och bredden på basen måste vara 4.

- **Sätt 2:** Man kan formulera problemet som: *Minimera $f(x, y, z) = 2yz + 2xz + xy$ under bivillkoret $g(x, y, z) = xyz - 32 = 0$.* Då kan vi tillämpa Lagranges metod variant 2. Funktionen g (en polynomfunktion) har inga singulära punkter och f kan uppnå godtyckligt stora värden om någon av variablerna närmar sig noll. Ett minimum för f på nivåytan till g kan alltså bara förekomma i punkter där nivåytorna till f och till g tangerar varandra, d.v.s. där gradienterna är parallella. Minimum vi söker måste alltså antas i en punkt där

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad g(x, y, z) = xyz - 32 = 0, \quad \nabla f \parallel \nabla g.$$

Vi har:

$$\nabla f = (2z + y, 2z + x, 2y + 2x), \quad \nabla g = (yz, xz, xy).$$

Eftersom alla tre variablerna måste vara positiva, är det helt OK att ställa upp en proportion med variabla uttryck i nämnaren (eftersom nämnaren är garanterad nollskilda). Att $\nabla f \parallel \nabla g$ betyder att följande proportion gäller:

$$\frac{2z + y}{yz} = \frac{2z + x}{xz} = \frac{2y + 2x}{xy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$$

vilket omedelbart ger $x = y$ och $z = \frac{1}{2}y$. Insättning av dessa i villkoret

$$g(x, y, z) = xyz - 32 = \frac{1}{2}y^3 - 32 = 0$$

ger svaret $y = 4, x = 4, z = 2$.

Svar: Höjden måste vara 2 och både längden och bredden på basen måste vara 4.

Exempel 117. TEN1-2020-04-30 upp.6 Rätblock med nedre basen $D : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2$ i planet $z = 0$ och övre basen i planet $z = 7$ klipptes ner ovanifrån med paraboloiden $z = 6 - x^2 - y^2$. Beräkna volymen till kroppen som uppstod på detta sätt.

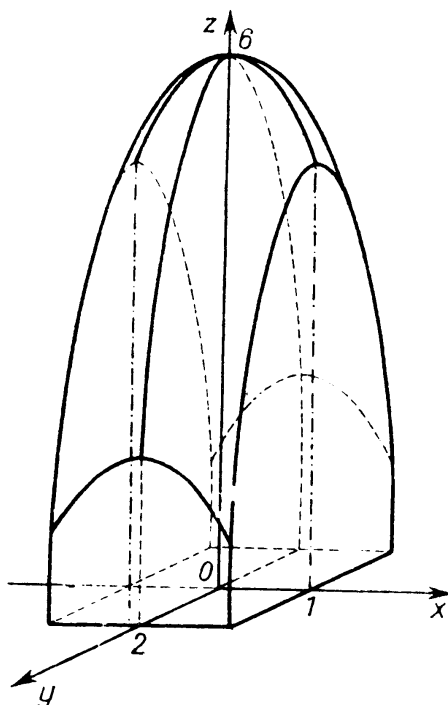
Lösningsförslag

Vi börjar med att försäkra oss om att skärningen mellan rätblockets sidor och paraboloiden sker ovan xy -planet. Minsta z -värden för paraboloiden för $(x, y) \in D$ förekommer i rektangelns hörn och dessa värden är positiva:

$$6 - 1^2 - 2^2 = 6 - (-1)^2 - 2^2 = 6 - 1^2 - (-2)^2 = 6 - (-1)^2 - (-2)^2 = 1,$$

vilket betyder att kroppens volym beräknas som dubbelintegralen till $f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$ över D . Man kan beräkna integralen på två sätt (m.h.a. Fubinis sats), antingen först i x - eller först i y -ledet eftersom integreringsområdet är en axelparallell rektangel. Båda sätt är ungefär lika beräkningsintensiva. Här presenteras bara ett av dem:

$$\begin{aligned} \iint_D (6 - x^2 - y^2) dA &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-2}^2 (6 - x^2 - y^2) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[6y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-2}^{y=2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left[(12 - 2x^2 - \frac{8}{3}) - (-12 + 2x^2 + \frac{8}{3}) \right] dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{56}{3} - 4x^2 \right) dx = \left[\frac{56}{3} x - \frac{4}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{104}{3}. \end{aligned}$$



Figur 91: Illustration till uppgift 6.

Svar: Kroppens volym är $\frac{104}{3}$.

Exempel 118. Låt $f(x, y) = 2e^{2y} - 4e^xe^y + e^{4x}$. Bestäm och klassificera alla kritiska (stationära) punkter till f .

Metod 1:

Vi söker först eventuella kritiska punkter till f :

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -4e^xe^y + 4e^{4x} = 0 \\ f_y(x, y) = 4e^{2y} - 4e^xe^y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x+y} = e^{4x} \\ e^{2y} = e^{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4x \\ x + y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Andraderivator i $(0, 0)$: $f_{xx} = -4e^xe^y + 16e^{4x} = 12$, $f_{yy} = 8e^{2y} - 4e^xe^y = 4$, $f_{xy} = f_{yx} = -4e^xe^y = -4$, vilket ger Hessianmatrisen $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; den kvadratiske formen $12h^2 - 8hk + 4k^2 = 4(h^2 - 2hk + k^2) + 8h^2 = (h - k)^2 + 8h^2$ är positivt definit, vilket ger ett lokalt minimum i origo. (Eller: $D_1 = 12 > 0$, $D_2 = 48 - 16 > 0$.)

Svar: lokalt minimum i $(0, 0)$.

Metod 2:

Let $t = e^x$, $s = e^y$. Then $f(x, y) = 2s^2 - 4ts + t^4 = F(s, t)$.

The critical points of f correspond to critical points of F and are of the same type – but we must have $t, s > 0$. We have $F_s = 4s - 4t$, $F_t = -4s + 4t^3$. $F_s = F_t = 0$ translates to $s = t = t^3$. So as $t > 0$ we have $1 = t^2$, $t = 1$. So there is a unique critical point $s = t = 1$.

There $F_{ss} = 4$, $F_{tt} = 12t^3 = 12$, $F_{ts} = F_{st} = -4$ so the the Hessian is $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; this has positive trace and determinant, so is positive definite, and we are at a local minimum. Recall that $t = 1$ means $e^x = 1$, $x = 0$. Similarly $s = 1$ means $y = 0$.

Answer: local minimum at $(0, 0)$.

Exempel 119. Två deluppgifter:

1. Låt $u(x, y) = xy$ och $v(x, y) = x/y$, och låt F vara en glatt (oändligt många gånger differentierbar) funktion (av två positiva variabler). Låt $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$. Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ uttryckt i x , y , $\frac{\partial F}{\partial u}$ och $\frac{\partial F}{\partial v}$.
2. Använd variabelsubstitutionen $u = xy$ och $v = x/y$ för att lösa PDE

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = xy$$

(D.v.s. hitta alla glatta $f(x, y)$ (av positiva variabler) som uppfyller ekvationen. Du får anta att f har formen $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$.)

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = yF_u + \frac{1}{y}F_v$$

and

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = xF_u - \frac{x}{y^2}F_v.$$

The equation $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = xy$ becomes $xyF_u + xyF_u = xy$ or $F_u = 1/2$, so $F(u, v) = u/2 + g(v)$ for any smooth function g , and so $f(x, y) = F(xy, x/y) = xy/2 + g(x/y)$.

Answer: $f(x, y) = F(xy, x/y) = xy/2 + g(x/y)$ for arbitrary smooth function g .

Exempel 120. 1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till $(x^2 + z^2) + (y - 3)^3y^3 = 0$ i punkten $(2, 2, 2)$.

2. Förklara varför en del av $(x^2 + z^2) + (y - 3)^3y^3 = 0$ som ligger i en omgivning av $(2, 2, 2)$ kan uttryckas som $z = f(x, y)$ för en glatt f .

3. Beräkna partiell derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $(x_0, y_0) = (2, 2)$ (f definieras i delen just ovan).

Metod 1:

The surface is a level surface of $g(x, y, z) = (x^2 + z^2) + (y - 3)^3y^3$. Normal vector is given by

$$\nabla g = (2x, 3(y - 3)^2y^3 + (y - 3)^33y^2, 2z),$$

which at $(2, 2, 2)$ is equal to $(4, 12, 4)$. Thus the plane is $4(x - 2) + 12(y - 2) + 4(z - 2) = 0$ or $(x - 2) + 3(y - 2) + (z - 2) = 0$ or $x + 3y + z = 10$.

Answer: $x + 3y + z = 10$.

The tangent plane at $(2, 2, 2)$ is non-vertical, and so fact is a graph: we can see $z = 10 - x - 3y = L(x, y)$. By implicit function theorem, the same is true for the surface near $(2, 2, 2)$.

The partial derivative of $f(x, y)$ at $(2, 2)$ is the same as for $L(x, y)$, and so is -3 . Alternatively, the formula in implicit function theorem says

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{12}{4} = -3.$$

Answer: -3 .

Metod 2

We can solve for z via $z = \pm\sqrt{-(y - 3)^3y^3 - x^2}$ and since near $(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 2)$ we have $z > 0$ we pick plus, so that $z = \sqrt{-(y - 3)^3y^3 - x^2}$. This solves part b.

We can then find partial derivatives of $f(x, y) = \sqrt{-(y-3)^3y^3 - x^2}$ at $(x_0, y_0) = (2, 2)$, to get (after some computation) $f_x(2, 2) = -1$, $f_y(2, 2) = -3$, which solves part 3, and also allows us to write the tangent plane equation

$$z = f(2, 2) + f_x(2, 2)(x - 2) + f_y(2, 2)(y - 2) = 2 - (x - 2) - 3(y - 2)$$

which is $x + 3y + z = 10$.

Note: If we asked instead whether it is possible to solve for $y = g(x, z)$ and what the $\frac{\partial g}{\partial x}$ and $\frac{\partial g}{\partial z}$ are, explicit solution along the lines of Method 2 would become much more complicated (and if the equation were, for example, $(x^2 + z^2) + (y^5 - 25y^3 + 60y) = 0$ it would be impossible, as proved by a version of advanced mathematical theory called Galois theory); however, solution along the lines of Method 1 using implicit function theory would still be fairly straightforward.

Exempel 121. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C y^2 dx + x^2 dy,$$

där kurvan C är randkurvan av parallelltrapetsen med hörn i $(0, -1)$, $(1, -2)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$, orienterad moturs.

By Green's theorem

$$\oint_C y^2 dx + x^2 dy = \iint_S \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S (2x - 2y) dx dy$$

where S is the interior of the trapezoid.

We use vertical slices for the integral. The upper curve is the segment through $(1, 2)$ and $(0, 1)$, and is given by $y = x + 1$. The lower curve is the segment through $(1, -2)$ and $(0, -1)$, and is given by $y = -x - 1$ (minus of the top line). The x coordinate in the trapezoid ranges from 0 to 1.

The integral becomes

$$2 \int_0^1 \left(\int_{-1-x}^{1+x} (x - y) dy \right) dx.$$

Inner integral is equal to $xy - \frac{y^2}{2}$, and evaluates to $(x + x^2) - (-x - x^2) = 2(x + x^2)$ (the integral of y disappears because of $(x, y) \leftrightarrow (x, -y)$ symmetry, which we could've used earlier). The outer integral is

$$2 \int_0^1 2(x + x^2) dx = 2 \left[x^2 + \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{5}{3}.$$

Answer: $10/3$.

Alternatively, we can parametrize each of the 4 segments in turn, compute the integrals and add them up. For the left vertical side one gets 0; for the right vertical side 4; for top slanted side $2 - \frac{2}{3}$; for the bottom slanted side -2 - for the sum of $-\frac{2}{3} + 4 = 10/3$.

Exempel 122. Beräkna trippelintegralen av $f(x, y, z) = zy^2x^2$ över den cylindriska kroppen som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$ och $z \leq 1$.

We use cylindrical coordinates. The bounds become $r \leq 1$, $z \geq 0$, $z \leq 1$. We have

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Recall $dx dy = r dr d\theta$. Substituting everything in, the integral becomes

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} zr^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right) r dr \right) dz = \int_0^1 z dz \int_0^1 r^5 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta.$$

We have

$$\int_0^1 z dz = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 r^5 dr = \frac{1}{6}.$$

For the last one, $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, and so

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta.$$

We either remember from before that the average of $\sin^2 \theta$ is $1/2$, so that

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

or we use $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$ and integrate to get

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta = \pi + 0 = \pi.$$

Either way $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$.

All together, the answer is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{48}$.

Answer: $\frac{\pi}{48}$.

Exempel 123. Låt

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2e^{y^2} \cos(\pi z), 2x^3ye^{y^2} \cos(\pi z), -\pi x^3e^{y^2} \sin(\pi z) + 1).$$

1. (3 poäng) Bevisa att fältet $\vec{F}$ är konservativt och hitta en skalär potential för $\vec{F}$.
2. (2 poäng) Beräkna $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där γ är kurvan parametriserad med $\vec{r}(t) = (e^t, t, \cos(\pi t))$ för $t \in (0, 1)$.

Suppose the potential is $f(x, y, z)$. Then $f_x = P = 3x^2e^{y^2} \cos(\pi z)$, so

$$f = \int 3x^2e^{y^2} \cos(\pi z) dx = x^3e^{y^2} \cos(\pi z) + \Phi(y, z).$$

Then we must also have

$$Q = f_y = x^3 2ye^{y^2} \cos(\pi z) + \Phi_y.$$

We conclude $\Phi_y = 0$ and $\Phi(y, z) = \Psi(z)$. Finally we get

$$R = f_z = -\pi x^3 e^{y^2} \sin(\pi z) + \Psi_z,$$

so $\Psi_z = 1$, $\Psi(z) = z + C$. All together

$$f(x, y, z) = x^3 e^{y^2} \cos(\pi z) + z + C$$

for any constant C works as a potential. The fact that $\vec{F}$ has a potential implies that it is conservative, so we are done.

For any conservative vector field we have $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\text{end}) - f(\text{start})$. The start point is

$$\vec{r}(0) = (e^0, 0, \cos(\pi \cdot 0)) = (1, 0, 1)$$

the end point is

$$\vec{r}(1) = (e^1, 1, \cos(\pi \cdot 1)) = (e, 1, -1).$$

Thus

$$f(\text{end}) = e^3 \cdot e^1 \cdot (-1) + (-1) = -e^4 - 1, \quad f(\text{start}) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

So the answer is $-1 - e^4$.

Answer: $-e^4 - 1$.

Exempel 124. Beräkna

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

där $\vec{F}(x, y, z) = (e^z, 4 - x, x \cos y)$ och ytan S är den delen av paraboloiden $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger ovan xy planet, orienterad med normalen som pekar upp från $(0, 0, 9)$.

Metod 1:

By Stokes theorem:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

The boundary of the paraboloid piece is a circle of radius 3 in the plane. We can parametrize it via

$$\vec{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi],$$

so that

$$d\vec{r} = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0)$$

and

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = e^0(-3 \sin t) + (4 - 3 \cos t)3 \cos t + 0 = -3 \sin t + 12 \cos t - 9 \cos^2 t$$

and the integral is

$$\int_0^{2\pi} (-3 \sin t + 12 \cos t - 9 \cos^2 t) dt = 0 + 0 - 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 = -9\pi$$

Answer: -9π .

Metod 2:

We compute

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^z & 4-x & x \cos y \end{pmatrix} = (-\cos y - e^z)\hat{j} - \hat{k}$$

Now we can EITHER

1) Parametrize the surface $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ as a graph and compute, using $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \frac{\vec{N}}{N_3} dA = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (0, -\cos y - e^{9-x^2-y^2}, -1) \cdot (2x, 2y, 1) dA = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} -1 dA = -9\pi \end{aligned}$$

where the other two terms vanished because the integrand is odd with respect to the $(x, y) \leftrightarrow (-x, -y)$ symmetry of the domain disc $x^2 + y^2 \leq 9$.

OR

2) Change the surface we are integrating over to the disc $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$ in the $z = 0$ plane. This is justified either by two applications of Stokes' theorem, equating integrals over either surface to the line integral

$$\int_{\partial S = \partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

as in Method 1; or by divergence theorem applied to the solid R enclosed between D and S and the fact that $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$, so

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} - \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iiint_R 0 dV = 0.$$

In any case, we just need to compute

$$\begin{aligned} \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (0, -\cos y - e^0, -1) \cdot (2x, 2y, 1) dA = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} -1 dA = -9\pi \end{aligned}$$

Exempel 125. Lös den partiella differentialekvationen $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - 2xy = 0$ i området $x > 0, y > 0$ genom variabelbytet $u = xy, v = x/y$.

Kedjeregeln ger nu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Insättning i PDE:n ger:

$$\begin{aligned}& x \left(y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + y \left(x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) - 2xy = 0 \\ \Rightarrow & 2xy \frac{\partial f}{\partial u} - 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad 2xy \left(\frac{\partial f}{\partial u} - 1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 1 \\ \Rightarrow & f(u, v) = u + g(v) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = xy + g\left(\frac{x}{y}\right),\end{aligned}$$

för någon godtycklig funktion g .

Öva även på andra ordningens kedjeregeln. Exempelvis gäller i detta fall

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) = x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{x}{y^3} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Exempel 126. Låt $f(x, y) = x + y + 4$ vara definierad på ellipsen $3x^2 + y^2 - 3 = 0$. Antar $f(x, y)$ största och/eller minsta värde på ellipsen? Bestäm i så fall dessa värden.

Eftersom f är kontinuerlig och ellipsen är en kompakt mängd, så antar största och minsta värde. Antingen kan problemet lösas genom att ellipsen parametriseras $\vec{r}(\theta) = (\cos(\theta), \sqrt{3} \sin(\theta))$ eller genom att använda Lagrangemultiplikatorer. Enligt den sistnämnda metoden gäller $\nabla f = \lambda \nabla g$, där $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 3$. Vi får:

$$\begin{cases} 1 = \lambda 6x \\ 1 = \lambda 2y \\ 3x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} = \frac{6\lambda x}{2\lambda y} \quad \Rightarrow \quad y = 3x.$$

Insättning i bivillkoret $3x^2 + y^2 - 3 = 0$ ger sedan

$$3x^2 + (3x)^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{2}.$$

Extremvärdena antas i punkterna $\pm(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ och är $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 6$ (maximum) och $f(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) = 2$ (minimum).

Delar av första halvan av kursen som är viktiga att repetera:

- Bestämning av kritiska punkter och karaktärisering av dessa (kvadratiska former).

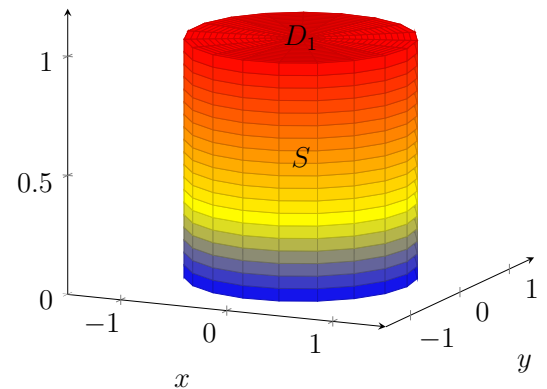
- Bestämning av största och minsta värde för $f(x, y)$ på ett kompakt område i planet (kritiska punkter på det inre, parametrisering av randen, glöm inte hörnen på områden som har dessa).
- Bestämning av tangentplan till funktioner.
- Avgörande av om variabler kan lösas ut som en funktion av andra variabler med hjälp av implicita funktionssatsen.
- Gränsvärden (visa existens eller motbevisa existens genom att testa ett antal olika linjer).

Exempel 127. —

Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F} = (xz^2, 2xy, z^2 + 2)$ ut ur cylindern $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Den cylindriska ytan kan parametriseras av $\vec{r}(s, t) = (\cos(s), \sin(s), t)$, $0 \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 1$ och flödet ges av

$$\pm \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt$$



Det är dock lättare att använda Gauss sats på $S \cup D_1 \cup D_2$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

På D_1 har vi $\hat{N} = (0, 0, 1)$, så $\vec{F} \cdot \hat{N} = z^2 + 2 = 3$ och

$$\iint_{D_1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = 3 \iint_{D_1} dS = 3\pi.$$

På D_2 har vi $\hat{N} = (0, 0, -1)$, så $\vec{F} \cdot \hat{N} = -(z^2 + 2) = -2$ och

$$\iint_{D_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = -2 \iint_{D_2} dS = -2\pi.$$

Divergensen av vektorfältet är

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + 2) = z^2 + 2x + 2z.$$

Av symmetriskäl så är volymintegralen av $2x$ över kroppen K noll, så det återstår:

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_{D_2} \left(\int_0^1 (z^2 + 2z) dz \right) dx dy = \pi \left[\frac{z^3}{3} + z^2 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Vi får slutligen att flödet av vektorfältet $\vec{F}$ genom cylindern S är:

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dV - \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS - \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \frac{4\pi}{3} - 3\pi - (-2\pi) = \frac{\pi}{3}.$$

Om integranden hade berott på x eller y hade vi behövt använda polära/cylindriska koordinater, och om kroppen hade radiell/sfärisk symmetri hade vi behövt använda sfäriska koordinater (öva på detta).

Exempel 128. Låt γ vara skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ och xy -planet (moturs, dvs. positivt orienterad). Låt $\vec{F} = (y^2 \cos(xz), x^3 e^{yz}, -e^{xyz})$. Beräkna $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Skärningskurvan ges av ekvationerna $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$, $z = 0$, dvs. av cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ i xy -planet. Parametriseringen $\vec{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ger

$$d\vec{r} = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0)$$

och, efter insättning i kurvintegralen (Tänk att $\cos(xz) = 1$ och $e^{yz} = 1$ för $z = 0$!) får vi:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} ((2 \sin \theta)^2, (2 \cos \theta)^3, -1) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-8 \underbrace{\sin^3 \theta}_{\text{udda}} + 16 \cos^4 \theta) d\theta = 16 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 \theta) d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= 4 \left[\frac{3\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 12\pi. \end{aligned}$$

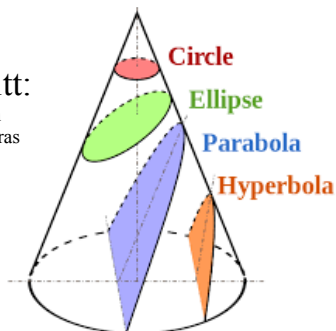
Andra delar av andra halvan av kursen som är viktiga att repetera:

- Dubbelintegraler, Variabel-substitution (polära och andra), bestämning av integrationsgränser för exempelvis trianglar.
- Bestämning av volymer av kroppar med hjälp av trippelintegraler (visualisering av andragradsytor är viktigt för detta).
- Beräkning av kurvintegraler i planet med hjälp av Greens formel och på konservativa vektorfält med hjälp av potentialen.
- Användning av Stokes sats för att gå mellan kurvintegraler och flödesintegraler (definition av rotationen).

Appendix: Bilder till Föreläsning 1 och Huvudsatser

Kägelsnitt:

hur känner man igen dem på deras ekvationer.



Cirkel

Cirkels ekvation – ett exempel

En cirkel har radien $r=4$ och medelpunkten $(3,-1)$. Bestäm denna cirkels ekvation.

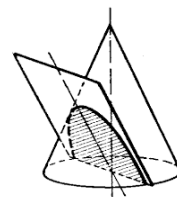
$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$4^2 = (x-3)^2 + (y-(-1))^2$$

Cirkels ekvation är:

$$16 = (x-3)^2 + (y+1)^2$$

Parabel



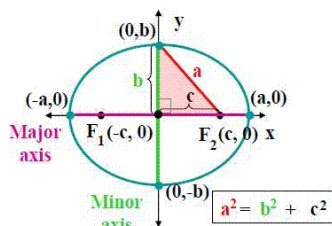
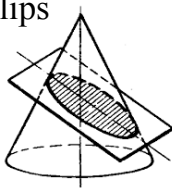
$$y = ax^2 + bx + c$$

eller:

$$x = ay^2 + by + c$$

(bara en av variablerna är i kvadrat!)

Ellips



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$$

$$4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y-2)^2 - 4] + 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$

I det här exemplet:

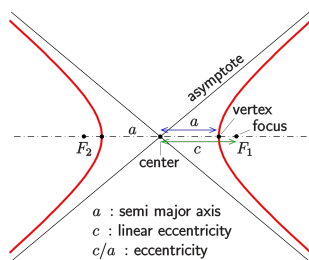
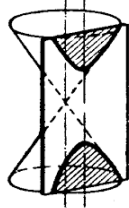
Mittpunkters koordinater:

$(1, 2)$; den stora halvaxeln:

$a=3$, den lilla halvaxeln: $b=2$.

(båda variablerna är i kvadrat, med samma tecken; skillnad med cirkeln: OLIKA koefficienter vid x^2 och y^2 .)

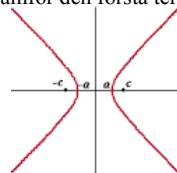
Hyperbel



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

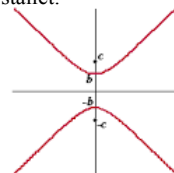
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Om man vänder roller på x och y , kommer minuset framför den första termen i stället:



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

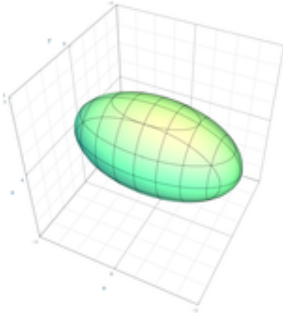
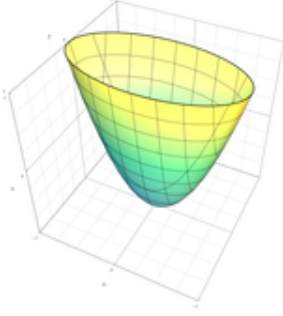
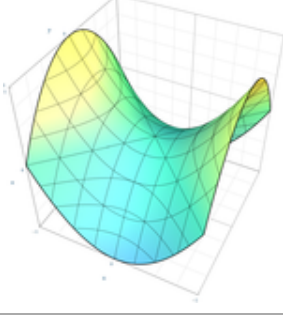
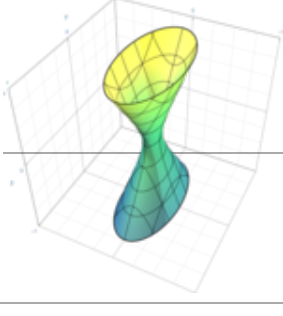
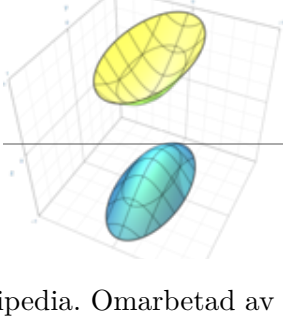


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

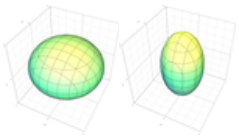
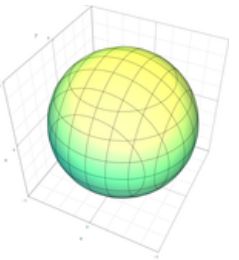
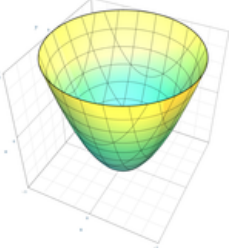
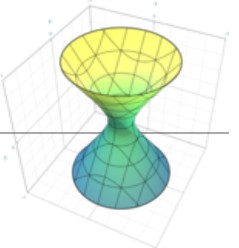
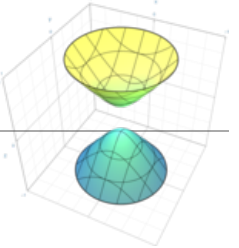
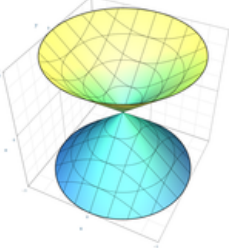
(båda variablerna är i kvadrat, men med OLIKA tecken: en med plus och den andra med minus)

Figur 92: Föreläsning 1: Andragradskurvor. (Bilder: från nätet. Omarbetade av Hania.)

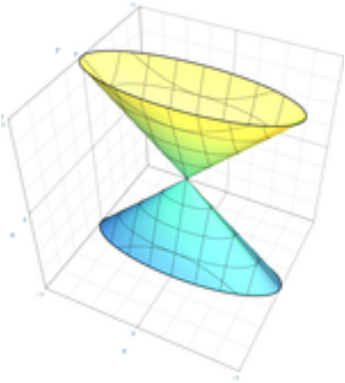
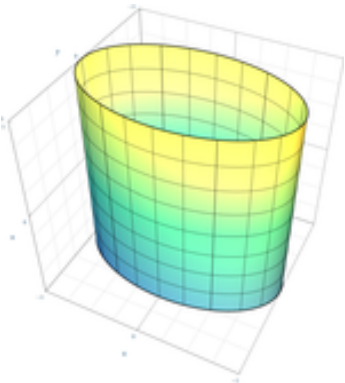
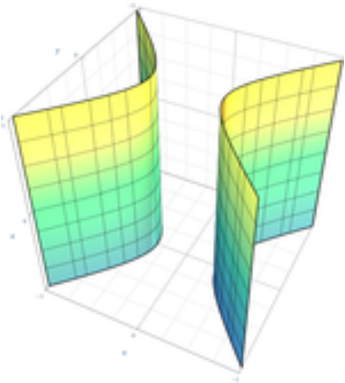
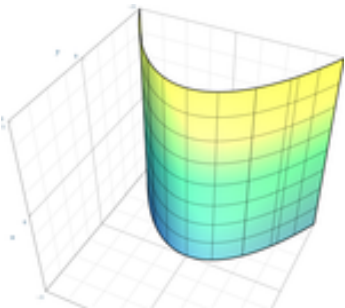
Non-degenerate real quadric surfaces		
Ellipsoid (bara PLUS)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Elliptisk paraboloid Elliptic paraboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	
Hyperbolisk paraboloid Hyperbolic paraboloid	Om en av variabler är UTAN kvadrat! $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	
Enmantlad hyperboloid Elliptic hyperboloid of one sheet	Om det finns ett MINUS $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Enmantlad: ett MINUS	
Tvåmantlad hyperboloid Elliptic hyperboloid of two sheets	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Tvåmantlad: två ggr MINUS	

Figur 93: Föreläsning 1: Andragradsytor, bild 1. (Bild: Wikipedia. Omarbetad av Hania.)

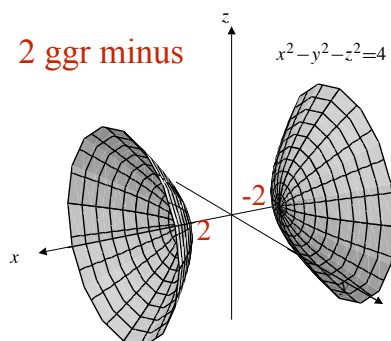
When two or more of the parameters of the canonical equation are equal, one gets a quadric of revolution, which remains invariant when rotated around an axis (or infinitely many axes, in the case of the sphere).

Quadrics of revolution		
Oblate and prolate <u>spheroids</u> (special cases of ellipsoid)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$	
sfär <u>Sphere</u> (special case of spheroid)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	
Circular <u>paraboloid</u> (special case of elliptic paraboloid)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - z = 0$	
Circular <u>hyperboloid of one sheet</u> (special case of elliptic hyperboloid of one sheet)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$	
Circular <u>hyperboloid of two sheets</u> (special case of elliptic hyperboloid of two sheets)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$	
Circular <u>cone</u> (special case of cone)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$	

Figur 94: Föreläsning 1: Andragradsytor / rotationsytor, bild 2. (Bild: Wikipedia.)

Degenerate real quadric surfaces		
Elliptisk kon (alla variabler i kvadrat och HL=0) Elliptic <u>cone</u>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	
Elliptisk cylinder Cylinder: om en variabel SAKNAS Elliptic <u>cylinder</u>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Hyperbolisk cylinder Om det finns ett MINUS Hyperbolic <u>cylinder</u>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Parabolisk cylinder Om en av variabler är UTAN kvadrat! Parabolic <u>cylinder</u>	$x^2 + 2ay = 0$	

Figur 95: Föreläsning 1: Andragradsytor, bild 3. (Bild: Wikipedia. Omarbetad av Hania.)



Skärningen mellan ytan och planet $z = c$ (för varje tal c) ger hyperbler $x^2 - y^2 = 4 + c^2$ och skärningen mellan ytan och planet $y = c$ ger hyperbler $x^2 - z^2 = 4 + c^2$. Därför namnet **hyperboloid**.

Ytan finns bara där $|x| \geq 2$

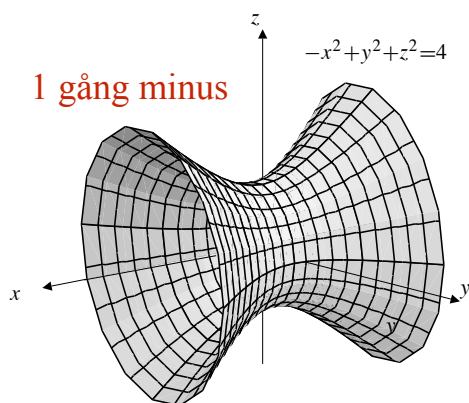
Fig. 10.5.7

På x -axeln gäller det: $y = 0$ och $z = 0$. Ytans ekvation blir därför där $x^2 = 4$, alltså skärningspunkter mellan ytan och x -axeln är $(2, 0, 0)$ och $(-2, 0, 0)$. Observera också att inga punkter (x, y, z) med $-2 < x < 2$ kan tillhöra ytan, eftersom då är $x^2 < 4$, medan $-y^2 - z^2 \leq 0$ och därför kan inte gälla $x^2 - y^2 - z^2 = 4$.

Därför består ytan av två disjunkta "kupor", alltså är hyperboloiden *tvåmantlad*.

Skärningskurvor mellan ytan och alla plan $x = c$ för sådana c att $|c| > 2$ är cirklar, ty där $y^2 + z^2 = c^2 - 4$.

Figur 96: Föreläsning 1: Tvåmantlad hyperboloid, uppgift 7 i Adams 10.5.



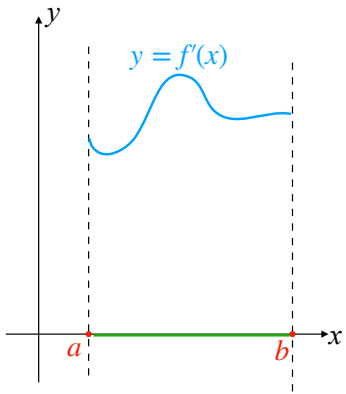
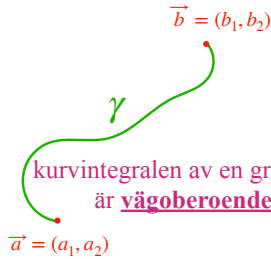
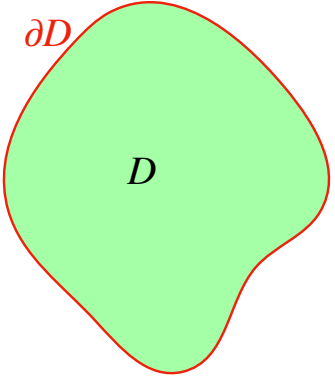
Skärningen mellan ytan och planet $z = c$, och skärningen mellan ytan och planet $y = c$ (för varje tal c sådant att $|c| \neq 2$) ger hyperbler. Därför namnet **hyperboloid**. Vad för hyperbler (alltså, hur de ligger i rummet och vad för ekvation de har): detta beror på om $|c| < 2$ eller $|c| > 2$, men detta behöver ni inte kunna. Vad händer om $|c| = 2$?

OBS: titta på **Travis Topic 9**, minuter 9—21. Travis ritar upp och förklarar samma exempel, fast roterat i rummet och med en smalare cirkel i mitten (ekvationen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$)

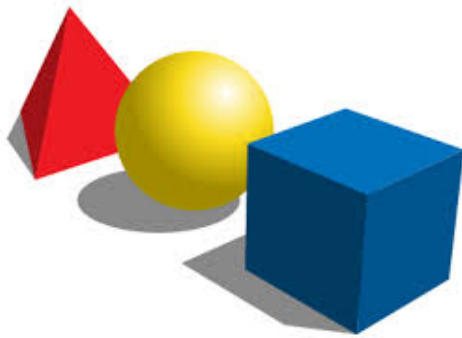
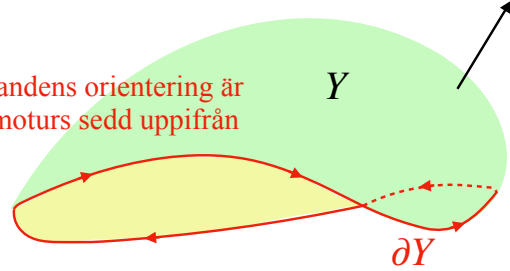
Fig. 10.5.8

På yz -planet gäller det: $x = 0$. Ytans ekvation blir därför där $y^2 + z^2 = 4$, alltså skärningspunkter mellan ytan och yz -planet formar en cirkel med radien 2. Skärningskurvor mellan ytan och alla plan $x = c$ (som är parallella med yz -planet) är ännu större cirklar, ty där $y^2 + z^2 = 4 + c^2$. Ytan formar alltså ett rör som är som smalast på yz -planet och blir bredare utåt åt båda håll, men formar ändå en hel bit. Därför är hyperboloiden *enmantlad*.

Figur 97: Föreläsning 1: Enmantlad hyperboloid, uppgift 8 i Adams 10.5.

Analysens Huvudsats  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ Områdets rand: två punkter a och b	Huvudsatsen för konservativa vektorfält  kurvintegralen av en gradient är <u>vägoberoende</u> $\int_{\gamma} \nabla \Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$ Områdets rand: kurvans ändpunkter	Greens formel  $\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{e}_3 \, dx dy$ Områdets rand: kurvan kring D
I alla varianter av huvudsatsen uttrycks integralen av någon slags derivata (envariabel-derivatan, gradienten eller rotationen) över ett område—alltså summan av <u>lokala förändringar i funktionen</u> i hela området—m.h.a. funktionens värden på områdets rand. Randen består av två punkter i första två varianterna, och av en hel kurva i den tredje. Det finns två varianter till: <i>Gauss sats</i> och <i>Stokes sats</i> (som involverar <i>flödesintegraler</i> samt derivatorna: divergensen och rotationen.)		

Figur 98: Tre olika huvudsatser. (Bild: Hania, med KeyNote.)

Gauss sats  $\oint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K (\text{div } \vec{F}) \, dV$ Områdets rand: ytan som omsluter kroppen K	Stokes' sats ytintegralen av en rotation är <u>yt-oberoende</u>; den beror bara på ytans rand ∂Y  randens orientering är moturs sedd uppfifrån $\oint_{\partial Y} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_Y \text{rot } \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS$ Områdets rand: kurvan kring Y som är en yta i $\mathbf{R}^3$
--	--

Figur 99: Två huvudsatser till. (Bild: Hania, med KeyNote.)

$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$			
$= \vec{0}$		$\neq \vec{0}$	
fältet antagligen konservativt (säkert om definierat och C^1 i hela rummet)		fältet inte konservativt	
kurvan sluten?		kurvan sluten?	
JA svaret 0	NEJ beräkna en potential; svaret: $\Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$ eller: hitta en enklare väg från start till slut och räkna kurvintegralen “för hand” (se högra kolumnen)	JA testa GREEN (i 2D) eller STOKES (i 3D) (ibland, i 2D, även om kurvan inte är sluten, går det att “stänga till” den och tillämpa Green ändå)	NEJ parametrisera kurvan och räkna “för hand” $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$ eller: $\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$

Figur 100: Att tänka på när man ska beräkna en kurvintegral av vektorfält. Det är alltid bra att börja med att beräkna fältets rotation eftersom den kan ge viktiga indikationer om vilken räknemetod kan vara lämplig. (Bild: Hania, med KeyNote.)