MINNESANTECKNINGAR FÖR DELTAGARNA I WORKSHOP *GRUPPER*

SONJA KOVALEVSKYDAGARNA 2008; HANNA USCKA-WEHLOU

0. Praktiska anmärkningar

Det finns följande moment i workshop:

- en föreläsningsdel - jag berättar om grupper
- övningar som deltagarna löser direkt (helst i grupper så att man kan hjälpa varann förstå teorin bättre)
- ett antal övningar som vi löser efter den teoretiska delen, tillsammans på tavlan eller i små grupper
- eventuella frågor är mycket välkomna! Skulle ni ha frågor **efter** SK-dagarna, får ni gärna maila: hania@wehlou.com

Huvudsaken är att alla blir lite bekanta med begreppet grupp och inser hur grundläggande begreppet är på väldigt många områden (i både matematik och andra naturvetenskapliga ämnen) och vilka praktiska tillämpningar det har.

1. Inledning

mängd, dess kardinalitet, extra strukturer, ordning, avstånd mellan element, topologi, blandning av allt möjligt (algebraisk topologi, topologiska vektorrum, funktionalanalys).

2. Lite guldkant på vardagen. Några begrepp som vi behöver för att kunna konstruera extra spännande exempel:

- vad är en isometri? Några exempel
- vad är en permutation? På hur många sätt kan man kasta om elementen i en mängd med n element?
- sammansättning av avbildningar (funktioner)
- hur räknar man modulo n?

Vi lär oss alltså lite nytt och, möjligen, repeterar några begrepp.

2. Definition

Vad kallas för **grupp** i algebra?

Date: November 8, 2008.

3. Exempel

Några exempel av grupper och ett antal övningar för deltagarna.

3. Delgrupper

Definitionen och några exempel av delgrupper.

4. Homomorfism, isomorfism

Hur kan man jämföra grupper med varann? När kan vi säga att två grupper är lika med varann? Definitionen av homomorfism och isomorfism; några exempel

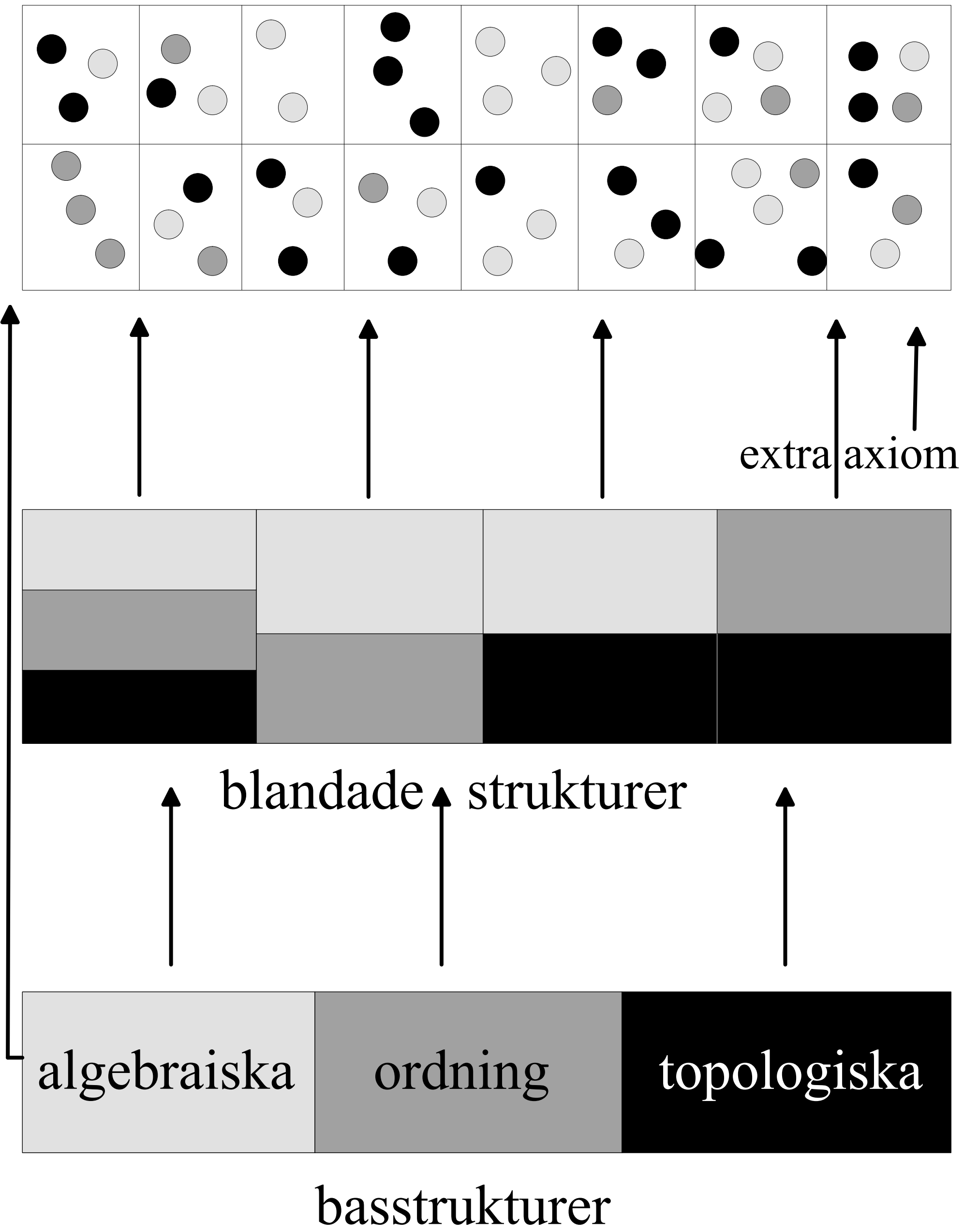
4. Andra algebraiska strukturer

Ring, kropp, linjärt rum. Blandade strukturer: algebraiska strukturer med ordning (det går att jämföra element), algebraiska strukturer med metrik (det går att mäta avstånd mellan element), topologiska vektorrum (man kan undersöka konvergens av följder).

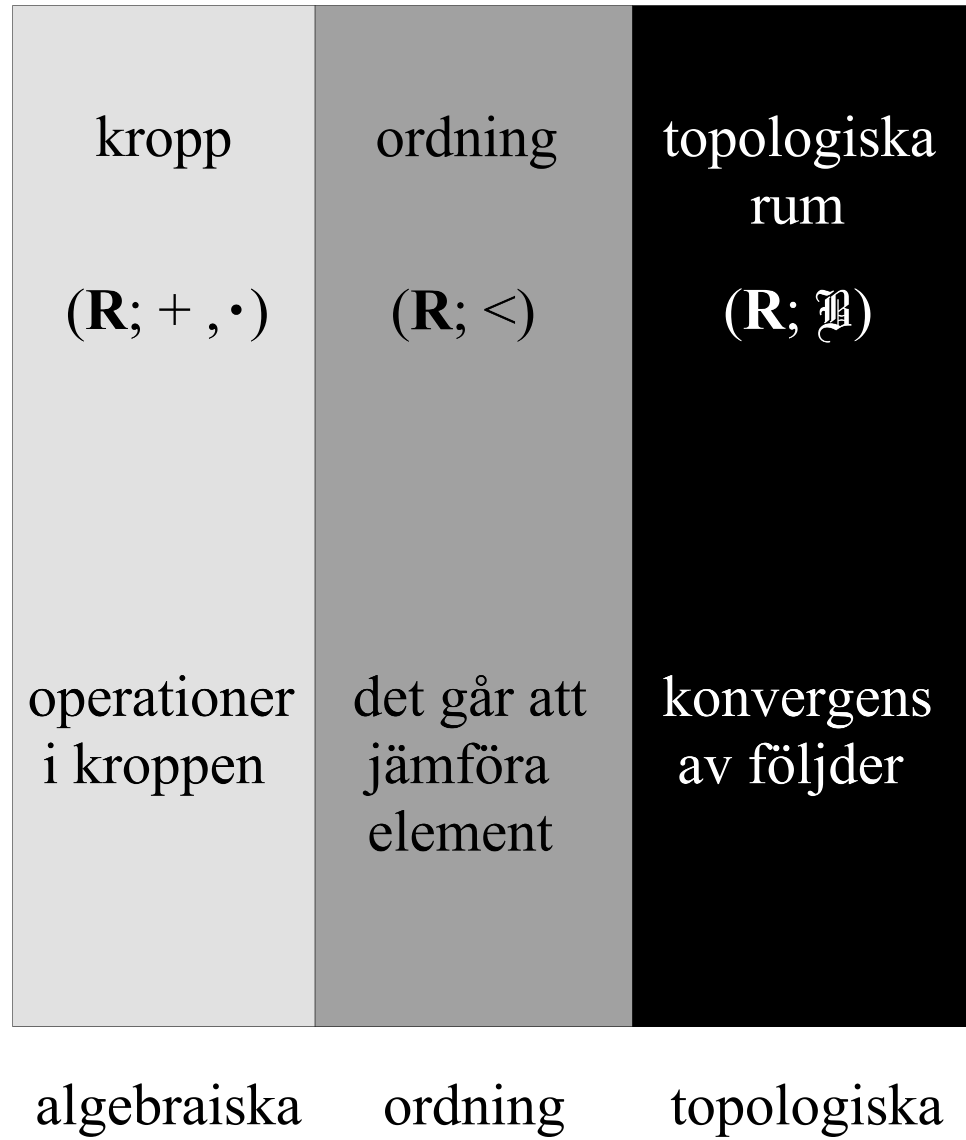
5. Litteraturlista

listan av böckerna som jag har använt mig av och som jag kan rekommendera för dom som vill lära sig mera om grupper.

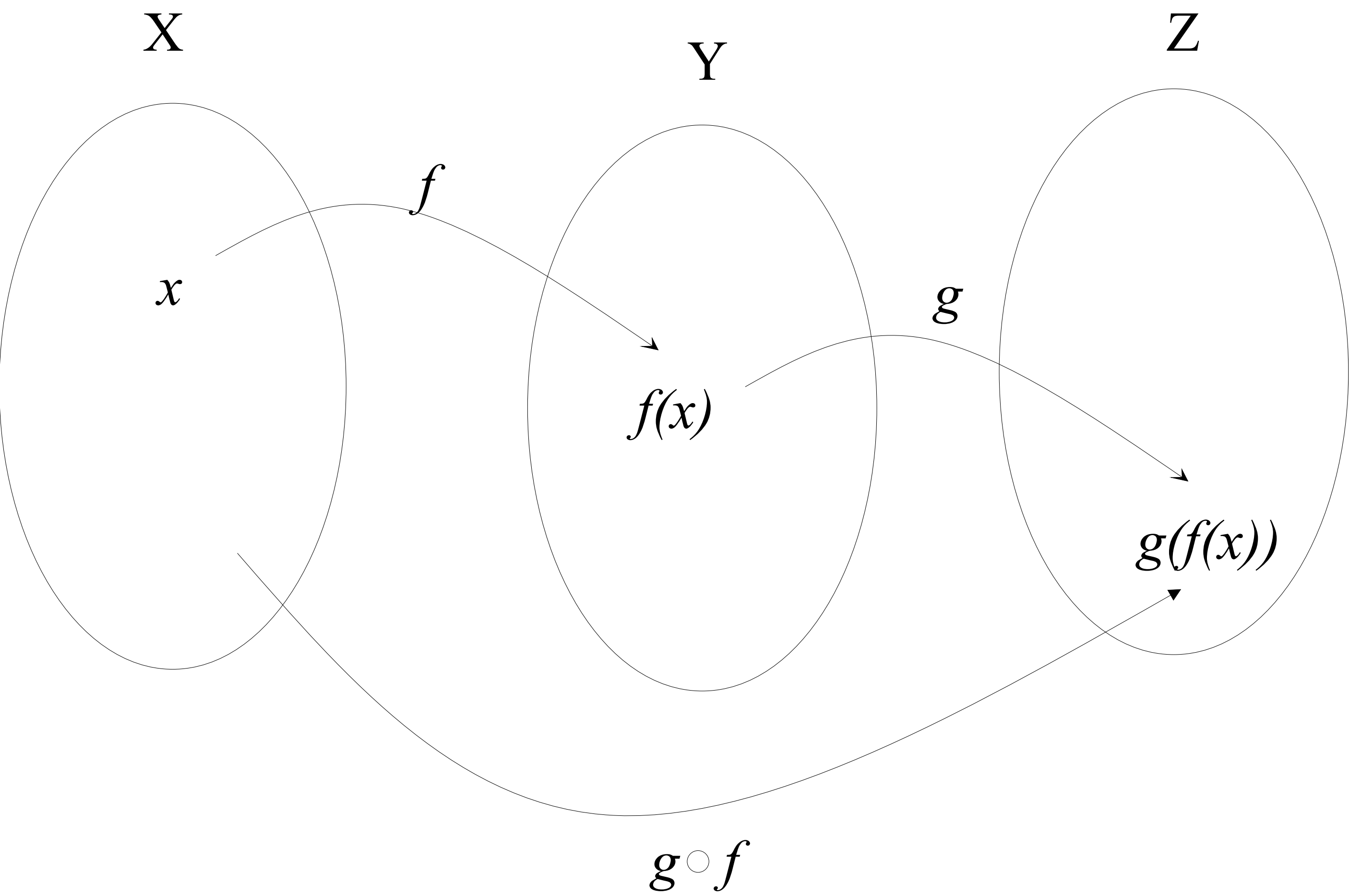
GRENAR AV MATEMATIK



Struktur av reella tal **R**



Sammansättning av två funktioner



$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

DEFINITION En grupp $(G, \circ)$ är en mängd G försedd med en binär operator $\circ$ (d.v.s., $\circ$ är definierad på $G \times G$) som uppfyller följande villkor:

- **Slutenhet**: För alla element a och b i G finns det ett element c i G (som kan vara lika med a eller b) sådant att $a \circ b = c$.

- **Associativitet**: För alla a, b och c i G gäller

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

- **Existens av identitet**: Det finns ett element e i G, kallat identiteten (neutrala elementet) i G, med egenskapen

$$e \circ a = a = a \circ e \quad \text{för alla} \quad a \in G.$$

- **Existens av inverser**: För varje a i G finns ett element b i G, kallat inversen till a, med egenskapen

$$a \circ b = e = b \circ a,$$

  där e är identiteten i G.

Gruppen $(G, \circ)$ sägs vara kommutativ, eller vanligare abelsk, om den dessutom uppfyller följande villkor:

- **Kommutativitet**: För alla a och b i G gäller

$$a \circ b = b \circ a.$$

NÅGRA EGENSKAPER: Visa att

- det finns exakt en identitet i varje grupp
- inversen till varje element i gruppen är också unik

PROTOTYP (modell, urbild) $+ : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$:

- **Slutenhet**: För alla element a och b i $\mathbf{Z}$ finns det ett element c i Z sådant att $a + b = c$.
- **Associativitet**: För alla a, b och c i Z gäller
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$
- **Existens av identitet**: Noll upfyller följande:
$$0 + a = a = a + 0 \quad \text{för alla} \quad a \in \mathbf{Z}.$$
- **Existens av inverser**: För varje a i $\mathbf{Z}$ finns ett element b i $\mathbf{Z}$, kallat inversen till a, med egenskapen
$$a + b = 0 = b + a \quad (b = -a)$$

NÅGRA EXEMPEL PÅ GRUPPER:

- $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, +)$, $(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{C}, +)$
- $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(\{f;\ f : [0, 1] \to \mathbf{R}\}, +)$ med additionen $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(\mathbf{Z}_n, \oplus)$, där $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ och $\oplus$ är additionen modulo n $(n \in \mathbf{N}^+, n \geq 2)$
- $(\mathbf{Z}_p, \odot)$, där $\mathbf{Z}_p = \{1, 2, \ldots, p - 1\}$ och $\odot$ är multiplikationen modulo p (p är ett primtal)
- $(S_n, \circ)$, där S_n är mängden av alla permutationer av n element och $\circ$ är sammansättningen av permutationer
- $(D_n, \circ)$, där D_n är mängden av alla symmetrier (rotationer och speglingar) av en regelbunden n-hörning
- $(R_n, \circ)$, där R_n är mängden av alla rotationer av en regelbunden n-hörning (senare ska vi visa att den gruppen är isomorf med en annan grupp från listan!)

KOLLA (OCH MOTIVERA) OM FÖLJANDE ÄR GRUPPER:

- $(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbf{R}, \cdot)$
- $(R, \circ)$, där $x \circ y = x + y - xy$
- $(\mathbf{R}^+, \diamond)$, där $x \diamond y = x^y$
- $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \bullet)$, där $x \bullet y = \frac{x}{y}$
- $(\{f;\ f : [0,1] \to [0,1]\}, +)$ med additionen $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

CYKLISKA GRUPPER Med potensnotation skrivs $g \circ g = g^2$, etc. En grupp G är **cyklisk** om det finns ett element g som **genererar** hela gruppen, det vill säga

$$(g) = \{\ldots, g^{-2}, g^{-1}, g^0, g^1, g^2, \ldots\} = G.$$

(*Diskret matematik*, pp. 19–21).

- $(\mathbf{Z}, +)$ är cyklisk, genereras av 1 eller av -1
- $(\mathbf{Z}_n, \oplus)$ är cyklisk. Till exempel $\mathbf{Z}_8 = (1) = (3) = (5) = (7)$ (motivera!)

Om G är en ändlig grupp kommer (delgruppen - det kommer vi att prata om lite senare!) (g) (för godtycklig $g \in G$) också att vara ändlig. Antalet element i den cykliska gruppen (g) kallas för **ordningen** för g. Vi har

$$\mathrm{order}(g) = \min\{m \in \mathbf{Z}^+;\ g^m = e\}.$$

EN ÖVNING: Kolla vilken ordning har alla elementen vid additionen i Z_6, Z_8 och Z_{10}. Vilka elementen genererar hela gruppen?

EN ÖVNING: Undersök grupperna av alla inverterbara elementen vid multiplikationen i Z_6, Z_8 och Z_{10}. Är dom cykliska?

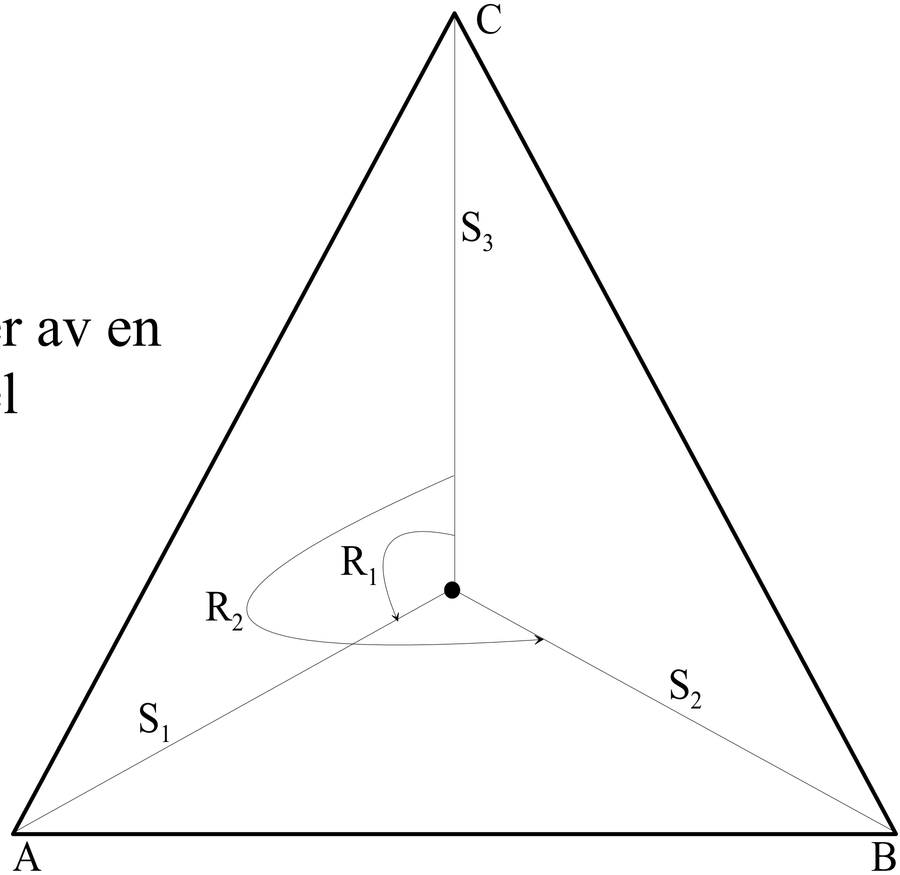
Grupp $\mathbf{Z}_6$

$+_6$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

ej grupp !

$\bullet_6$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	2	4	6
3	3	6	3	6	3	6
4	4	2	6	4	2	6
5	5	4	3	2	1	6
6	6	6	6	6	6	6

Egna isometrier av en liksidig triangel



$\circ$	I	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2
I	I	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2
S_1	S_1	I	R_1	R_2	S_2	S_3
S_2	S_2	R_2	I	R_1	S_3	S_1
S_3	S_3	R_1	R_2	I	S_1	S_2
R_1	R_1	S_3	S_1	S_2	R_2	I
R_2	R_2	S_2	S_3	S_1	I	R_1

Egna isometrier av en liksidig triangel ABC

Identiteten $I = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix}$, Symmetri $S_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix}$

Symmetri $S_2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}$, Symmetri $S_3 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$

Rotation $R_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}$, Rotation $R_2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$

Detta ger till exempel:

$$S_1 \circ S_2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} = R_1$$

$$S_2 \circ S_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix} = R_2$$

$$R_2 \circ S_3 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} = S_1$$

$$R_1 \circ S_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix} = S_3$$

$$S_1 \circ R_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} = S_2$$

$$S_2 \circ R_2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} = S_1$$

$$S_3 \circ R_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} = S_1$$

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} = I.$$

DEFINITION En **delgrupp** är en grupp som är delmängd av en annan grupp (med samma räknesätt).

EXEMPEL:

- $(\mathbf{Z}, +)$ är en delgrupp till $(\mathbf{R}, +)$
- $(\mathbf{Q}^+, \cdot)$ är en delgrupp till $(\mathbf{R}^+, \cdot)$
- $(g) = \{\ldots, g^{-1}, g^0, g^1, \ldots\}$ där $g \in G$ är en delgrupp till gruppen G.

Verifiera!

EN ÖVNING:

- Är de positiva heltalen en delgrupp till $(\mathbf{R}^+, \cdot)$?
- Är de udda talen en delgrupp till $(\mathbf{Z}, +)$?
- Är de jämna talen en delgrupp till $(\mathbf{Z}, +)$?
- hitta alla delgrupper av egna isometrier av en fyrkant. Vilka av dom är isomorfa (frågan att svara på senare!)?

Motivera!

Lagrange's sats för ändliga grupper säger att storleken på en delgrupp alltid delar storleken på gruppen.

EN ÖVNING Hitta alla delgrupper av $(Z_6, \oplus)$, $(Z_8, \oplus)$, $(Z_7, \oplus)$.

Permutationsgruppen S_3 har 6 element. Varje permutation representerar en egen isometri av en liksidig triangel.
Permutationsgruppen S_4 har 24 element. En grupp av alla 8 isometrier av en fyrkant (detta kommer på slutet av workshop!) är identisk med en delgrupp av S_4.

DEFINITION Om vi har två grupper, $(G, \circ)$ och $(H, \diamond)$, då avbildningen

$$\phi : G \to H$$

kallas för **homomorfism** om den bevarar förhålendena mellan elementen, det vill säga

$$\phi(x \circ y) = \phi(x) \diamond \phi(y) \quad \forall \; x, y \in G.$$

VISA ATT om $\phi : G \to H$ är en homomorfism då $\phi(e_G) = e_H$, alltså identiteten i G avbildas på identiteten i H.

DEFINITION Två grupper, $(G, \circ)$ och $(H, \diamond)$ är **isomorfa** om det finns en bijektion $\phi : G \to H$ som är en homomorfism. Bijektionen ifråga kallas en **isomorfism**.

Isomorfa grupper är **identiska** ur algebraiskt perspektiv.

Homomorfa grupper behöver inte ha samma antal element. Visa att $(\mathbf{Z}, +)$ (har oändligt många element) och $(\mathbf{Z}_2, \oplus)$ (addition modulo 2; gruppen har två element) är homomorfa.

Grupper med samma antal element behöver inte vara isomorfa (ta $(\mathbf{Z}_4, \oplus)$ och $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ med addition modulo 2 på varje koordinat). Jämför med bilden på nästa sidan.

$(\mathbf{Z}_6, \oplus)$ ($\{0, 1, \ldots, 5\}$ med additionen modulo 6) och $(\mathbf{Z}_7, \odot)$ ($\{1, 2, \ldots, 6\}$ med multiplikationen modulo 7) är isomorfa. Jämför med bilden två sidor senare.

Räkning i $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +)$ är en grupp. (Man räknar med ordnade par ur $\mathbf{Z}_2$ och adderar komponentvis.) Räkning med de inverterbara elementen i $\mathbf{Z}_8$ under multiplikation modulo 8 är också en grupp. Skriv upp grupptabellerna och hitta en isomorfi mellan grupperna.

VISA ATT grupperna $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ och $(\mathbf{R}, +)$ är isomorfa, m.a.o., hitta en bijektion $\phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ som är sådant att för alla $x, y \in \mathbf{R}^+$

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) + \phi(y).$$

läs gärna texten i *Diskret matematik*, p. 26.

STRUKTURSATSEN Varje ändlig abelsk grupp är isomorf med en grupp på formen

$$\mathbf{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbf{Z}_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{p_k^{n_k}}$$

där $p_1, p_2, \ldots, p_k$ är primtal och $n_1, n_2, \ldots, n_k$ är positiva heltal.

I C-uppsatsen *Ändliga grupper* på sidan 16 finns det en tabell med alla möjliga grupper med $1, 2, \ldots, 15$ element.

Två icke homomorfa grupper med 4 element

Z_4 , + modulo 4

	0	1	2	3
$+_4$	***e***	***a***	***b***	***c***
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*	*e*
b	*b*	*c*	*e*	*a*
c	*c*	*e*	*a*	*b*

bara *e* och *b* är sin egen invers

rotationer av en fyrkant (0, /2, , 3 /2)

en delgrupp av permutationsgruppen S_4

$Z_2 \times Z_2$

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$\circ$	***e***	***a***	***b***	***c***
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*e*	*c*	*b*
b	*b*	*c*	*e*	*a*
c	*c*	*b*	*a*	*e*

alla element är sin egen invers

två symmetrier av en fyrkant och rotation om

en delgrupp av permutationsgruppen S_4

Två isomorfa grupper med 6 element

Addition i gruppen $\mathbf{Z}_6$

$+_6$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

rotationer av regelbunden 6-hörning

Multiplikation av inverterbara element i $\mathbf{Z}_7$

$\bullet_7$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

ändra ordningen av element:
1, 3, 2, 6, 4, 5.

Isomorfismen: $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=6$, $f(4)=4$, $f(5)=5$.

Egna isometrier av en fyrkant $ABCD$

$$\text{Identiteten } I = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{bmatrix}, \text{ Symmetri } S_1 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{bmatrix},$$

$$\text{Symmetri } S_2 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{bmatrix}, \text{Symmetri } S_3 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix},$$

$$\text{Symmetri } S_4 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{bmatrix}, \text{Rotation } R_1 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{bmatrix},$$

$$\text{Rotation } R_2 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{bmatrix}, \text{Rotation } R_3 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{bmatrix}.$$

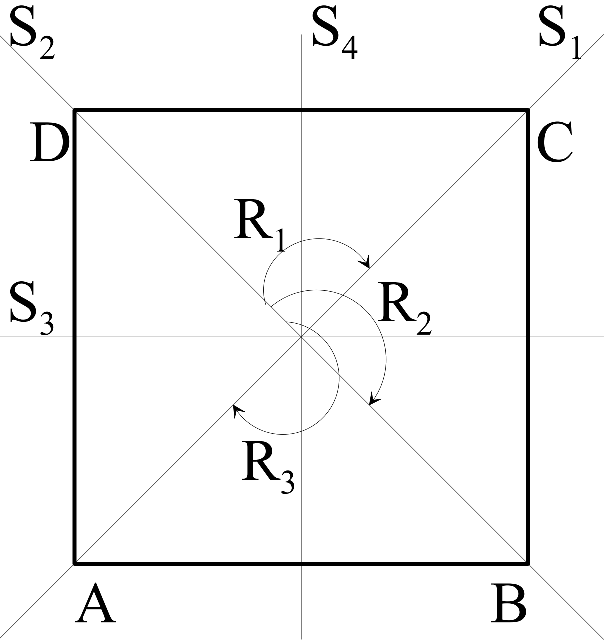
Sammansättningar

Fyll i tabellen på nästa sidan. Tänk på att börja *på slutet*, för till exempel

$$S_4 \circ S_2(A) = S_4(S_2(A))$$

och därför får vi

$$S_4 \circ S_2 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{bmatrix} = R_1.$$



Isometries of square

$\circ$	S_1	S_2	S_3	S_4	R_1	R_2	R_3	I
S_1								
S_2								
S_3								
S_4								
R_1								
R_2								
R_3								
I								

ANDRA ALGEBRAISKA STRUKTURER

En **kropp** är en mängd K med två kommutativa räknesätt, $+$ och $\cdot$, sådana att både $(K, +)$ och $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ är grupper. Ett exempel på en oändlig kropp är $\mathbf{R}$. Ett exempel på en ändlig kropp är $\mathbf{Z}_p$ för primtal p.

Om man släpper på kravet att multiplikationen ska vara kommutativ och att alla element utom 0 ska ha multiplikativ invers får vi i stället en struktur som kallas **ring**. Ett exempel på en oändlig ring är $\mathbf{Z}$, en annan mängden av $n \times n$-matriser. Ett exempel på en ändlig ring är $\mathbf{Z}_n$ för heltal $n \geq 2$.

NÅGRA ÖVNINGAR:

- Verifiera att $\mathbf{Z}_p$ är en kropp för primtal p
- Låt $\mathbf{Z}[x]$ beteckna mängden av alla polynom i x med heltalskoefficienter. Exempel på element i $\mathbf{Z}[x]$ är 17, $-x^2$, $3x^7 + 7x^3 - 3x + 7$. Verifiera att $\mathbf{Z}[x]$ är en ring.
- Verifiera att $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = (\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbf{Q}\}, +, \cdot)$ är en kropp.
- känner nån igen följande kropp? (kolla att det är kropp!) mängden av alla par av reella tal $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ med additionen $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ och multiplikationen $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

MÖJLIGA UTVIDGNINGAR:

- ett **linjärt rum** är $(V, K, +_V, +_K, \cdot_K, \cdot)$, där $(V, +_V)$ är en abelsk grupp, $(K, +_K, \cdot_K)$ är en kropp och $\cdot : K \times V \to V$ är en multiplicering med en skalär från kroppen som har följande egenskapen:
  - $\ast$ $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot_K \beta) \cdot v \quad \forall\, \alpha, \beta \in K,\ v \in V$
  - $\ast$ $1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in V$
  - $\ast$ $(\alpha +_K \beta) \cdot v = \alpha \cdot v +_V \beta \cdot v \quad \forall\, \alpha, \beta \in K,\ v \in V$
  - $\ast$ $\alpha \cdot (v +_V w) = \alpha \cdot v +_V \alpha \cdot w \quad \forall\, \alpha \in K,\ v, w \in V$
- ett **metriskt rum** är ett par (M, d) där M är en mängd och d (kallad **metrik, avstånd**) är en avbildning $d : M \times M \to \mathbf{R}_0^+$ med följande egenskaper:

* $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
* $d(x,y) = d(y,x)$ (symmetrin)
* $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (triangelolikheten)

Ett exempel är $\mathbf{Q}$ eller $\mathbf{R}$ med absolutbelopp, alltså

$$d(x,y) = |x - y|.$$

I varje metriskt rum kan man undersöka konvergens av följder. Varje metriskt rum är ett topologiskt rum (men inte tvärtom! Ett topologiskt rum är en mängd med en familj av delmängder kallad öppna delmängder. Man kan prata om konvergens av följder och om kontinuiteten men inte nödvändigtvis om avstånd mellan element)

- ett **topologiska vektorrum** - har både algebraisk och topologisk struktur, vi får alltså blandade, topologisk-algebraiska strukturer.

- man kan också införa ordning i algebraiska strukturer. Det finns kända exempel som $(\mathbf{Z}, \geq)$, $(\mathbf{Q}, \geq)$, $(\mathbf{R}, \geq)$. För mera komplicerade exempel kolla pp. 118–121 i Diskret matematik; det handlar om en svag ordning på permutationsgruppen.

RELEVANTA EGENSKAPER HOS FUNKTIONER $f : X \to Y$, beroende på egenskaperna hos mängderna X och Y, är presenterade på nästa sidan (jämför också med bilderna i Sesam, p. 36.)
En funktion kan förstås bevara bara nånting (struktur, räknesätt, ordning,...) som redan finns i definitionsmängden. Mängden $\mathbf{R}$ har alla möjliga egenskaper, det är en förebild till många definitioner. Därför är det meningsfyllt att prata om växande, linjära, kontinuerliga avbildningar $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, isometrier $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Avståndet i $\mathbf{R}^2$ definieras oftast som

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

men det finns många andra metriker i $\mathbf{R}^2$ (ett bra ämne för en annan workshop!)

mängderna X och Y	funktionen $f : X \to Y$	vilken egenskap bevarar f?
mängder utan nån extra struktur	bijektion (one to one) $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X\ \ y = f(x)$ $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$	kardinaliteten
grupper	isomorfism $f(x_1 \diamond x_2) = f(x_1) \circ f(x_2)$	räknesättet
ordnade mängder	växande (monoton) avbildning $x_1 \le x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \le f(x_2)$	ordningen
vektorrum	linjär avbildning $f(x_1 +_X x_2) = f(x_1) +_Y f(x_2)$ $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$	linjär struktur
topologiska rum	kontinuerlig avbildning $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x \ \Rightarrow\ f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)$ (om $\Leftrightarrow$ - hom**eo**morfism)	konvergensen av följder, öppna mängder
metriska rum	isometri $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$	avståndet mellan punkterna

Litteraturlista

1. ***Diskret matematik, fördjupning***
författaren: Kimmo Eriksson, Hillevi Gavel
utgivaren: Studentlitteratur, 2003.
Vad och var: Kapitel 2. Abstrakt algebra (pp. 13–37), Kapitel 5. Permutationer (pp. 97–131), Kapitel 3. Koder och krypton (pp. 39–66) - hur man använder gruppteorin i praktiken; OBS! pp. 111–121 - tillämpningar inom evolution och spel!; spännande läsning om Galois pp. 27–28.

2. ***Group (mathematics), Wikipedia***
Vad och var:

`http://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics)`

Både teorin och tillämpningar, bland annat om grupper i kemi.

3. ***Discrete Mathematical Structures***
författaren: Kolman, Busby, Ross
utgivaren: Prentice-Hall, 2000.
Vad och var: Kapitel 9. Semigroups and groups (pp. 319–356), Kapitel 11. Groups and coding (pp. 401–423) - hur man använder gruppteorin i praktiken.

4. ***Discrete and Combinatorial Mathematics***
författaren: Ralph P. Grimaldi
utgivaren: Addison Wesley, 2004.
Vad och var: Kapitel 16. Groups, Coding Theory, and Polya's Method of Enumeration (pp. 745–798).

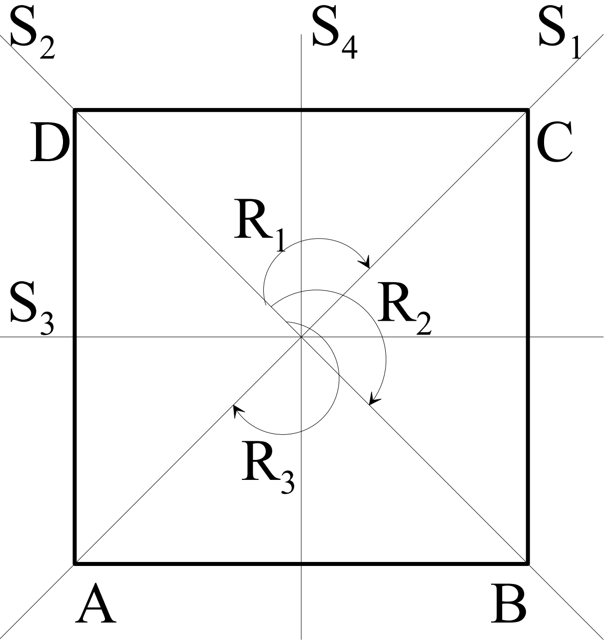
5. ***Ändliga grupper; Matematik C-uppsats***
författaren: Johan Jonsson
utgivaren: Karlstad Universitet, 2007. Uppsatsen finns på nätet

`http://www.diva-portal.org/kau/abstract.xsql?dbid=793`

(klicka på **Fulltext**)
Vad och var: en kompakt samling av information, på svenska.

6. ***Elementy teorii Galois***
författaren: Maciej Bryński
utgivaren: ALFA, 1985.
Vad och var: enkel om Galoisteorin, på polska.

7. ***Sesam, Atlas van de wiskunde***
utgivaren: Bosch and Keuning NV, 1977.
Vad och var: om algebraiska strukturer, enkelt och mycket förklarande (pp. 36–83), på holländska.



FACIT

Isometries of square

$\circ$	S_1	S_2	S_3	S_4	R_1	R_2	R_3	I
S_1	I	R_2	R_3	R_1	S_4	S_2	S_3	S_1
S_2	R_2	I	R_1	R_3	S_3	S_1	S_4	S_2
S_3	R_1	R_3	I	R_2	S_1	S_4	S_2	S_3
S_4	R_3	R_1	R_2	I	S_2	S_3	S_1	S_4
R_1	S_3	S_4	S_2	S_1	R_2	R_3	I	R_1
R_2	S_2	S_1	S_4	S_3	R_3	I	R_1	R_2
R_3	S_4	S_3	S_1	S_2	I	R_1	R_2	R_3
I	S_1	S_2	S_3	S_4	R_1	R_2	R_3	I