
Föreläsningsanteckningar

Pouya Ashraf

I detta dokument är föreläsningsanteckningar till kursen flervariabelanalys, som gavs av Thomas Örnskog på Uppsala Universitet 2013. Samtliga figurer är ritade med vektorgrafik direkt i \LaTeX , så om något inte syns tydligt nog är det bara att zooma in utan att det blir grynigt (fantastiskt, eller hur?). Med "Kursboken" menas Calculus 7e eller 8e utgåvan. Mycket nöje och lycka till!

27 oktober 2017

Uppskattar du att all info för kursen finns i detta dokument, så att du (kanske) slipper köpa kurslitteraturen? Känner du att du vill öka min livskvalitet litegrann som tack för arbetet jag lagt ner? Swisha valfri summa (typ 20-30kr) till 070-422 40 81

Innehåll

Föreläsning 1	1
Introduktion	1
Koordinatgeometri i flera variabler	2
Föreläsning 2	3
Topologiska begrepp	3
Andragsytor	6
Föreläsning 3	6
Andragsytor (forts.)	6
Kvadratiske former	7
Cylindriska och sfäriska koordinater	7
Föreläsning 4: Vektorvärda funktioner	8
Föreläsning 5	11
Båglängd av en kurva	11
Funktioner av flera variabler	12
Föreläsning 6	14
Gränsvärden och kontinuitet	14
Funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}	15
Föreläsning 7: Hopningspunkter, Delföljder och Cauchy-följder	17
Föreläsning 8: Likformig kontinuitet	20
Föreläsning 9	22
Partiella derivator	22
Differentierbarhet	24
Föreläsning 10	25
Differentierbarhet (forts.)	25
Högre ordningens derivator	26
Föreläsning 11: Kedjeregeln	28
Föreläsning 12: Gradient och riktningsderivata	31
Föreläsning 13: Inversa- och Implicita funktionssatsen	33
Föreläsning 14	37
Taylorapproximationer	37
Extremvärden	38
Föreläsning 15	40
Extremvärden (forts.)	40

Extremvärden för funktioner på kompakta områden	42
Föreläsning 16: Lagrangemultiplikatorer	43
Föreläsning 17	46
Derivering av integraler	46
Repetition 1	47
Föreläsning 18: Dubbelintegraler	49
Föreläsning 19	52
Dubbelintegraler (forts.)	52
Variabelsubstitution för Riemann-integralen	53
Föreläsning 20: Generaliserade dubbelintegraler	56
Föreläsning 21	60
Trippelintegraler	60
Variabelbyte i trippelintegraler	62
Föreläsning 22: Tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler	64
Föreläsning 23	67
Vektorfält	67
Konservativa vektorfält	69
Föreläsning 24: Kurvintegraler av vektorfält	70
Föreläsning 25: Greens Formel	74
Föreläsning 26: Ytintegraler	77
Föreläsning 27: Flödesintegraler	80
Föreläsning 28: Divergens och rotation	83
Föreläsning 29: Gauss sats (divergenssatsen)	86
Föreläsning 30: Stokes sats	90
Föreläsning 31: Kontinuitets- och värmeledningsekvationen	92
Föreläsning 32: Maxwells ekvationer och vågekvationen	95
Föreläsning 33: Potetialteori	98
Föreläsning 34: System av ordinära differentialekvationer	101
Föreläsning 35	104

System av orinära differentialekvationer (forts.)	104
Exakta ODE och variation av parametrar	106
Föreläsning 36: Funktionsföljder och likformig konvergens	107
Föreläsning 37	110
Funktionsföljder och likformig konvergens (forts.)	110
Funktionsserier	112
Föreläsning 38: Funktionsserier	114
Repetition 2	117

Föreläsning 1

Introduktion

I kursen envariabelanalys studerades funktioner av en variabel. Dessa typer av funktioner är lätta att askådliggöra eftersom vi kan rita grafen till dem. Det finns många fysikaliska problem som kan beskrivas med hjälp av funktioner av en variabel, men för att beskriva fenomen i vår tredimensionella värld behöver vi i allmänhet funktioner av fler än en variabel.

Exempel

- Densiteten hos ett tredimensionellt föremål ges av en funktion $\rho(x, y, z)$ där x , y och z är de tre rumsvariablerna. Hur ska man gå tillväga för att bestämma föremålets massa, masscentrum eller tröghetsmoment?
- Om vi öppnar ytterdörren till en föreläsningssal kommer temperaturen i en punkt (x, y, z) i rummet att förändras över tiden. Temperaturen är därmed en funktion av fyra variabler $T(x, y, z, t)$. Hur ska man gå tillväga för att bestämma var temperaturen är maximal/minimal eller i vilken riktning som temperaturen förändras snabbast?
- I varje punkt på jordytan blåser det längs en viss vektor (vars längd och riktning förändras över tiden). Vinden kan beskrivas med ett vektorfält, dvs. en funktion som till varje punkt (x, y) på jordytan ordnar en vektor $\vec{v}(x, y)$. Hur ska man gå tillväga för att bestämma hur stort arbete som krävs för att flytta ett föremål längs en kurva på jordytan?

Som synes finns det gott om fenomen som är naturliga att beskriva med funktioner av fler än en variabel, och under kursen kommer vi att ta fram ett antal matematiska metoder för denna typ av funktioner.

Relevanta kapitel i kursboken:

Dessa tas upp på duggan:

- 10-11: Vektorer och vektorvärda funktioner, kurvor, topologi
- 12: Funktioner av flera variabler, partiella derivator, kedjeregeln, gradient
- 13: Extremvärden, optimering

Sedan följer:

- 14: Integraler, där integrationsintervallet är en yta eller volym
- 15: Integraler, där integrationsintervallet är en kurva
- 16: Vektoranalys med fysikaliska tillämpningar

Därefter följer moment som inte ingår i båda kurserna:

- 17 + kompendium: Mer om endimensionella ODE + introduktion till system av ODE (F, ej KandMa).

- Kompendium: Funktionsföljder och Funktionsserier (KandMa, ie F).

De två sistnämnda momenten kommer inte att behandlas på tentamen, detsamma gäller materialet från kompendiet i grundläggande topologi.

Koordinatgeometri i flera variabler

Vi såg i exemplena att vi kommer studera funktioner av flera variabler. Om vi låter antalet variabler vara n , så kommer definitionsmängden till våra funktioner att vara (en del av) mängden av alla n -tuplar $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, av alla reella tal x_1, x_2, \dots, x_n . Denna mängd betecknas \mathbb{R}^n .

Exempel 1. \mathbb{R}^1 (skrivs normalt bara \mathbb{R}) motsvarar tallinjen, \mathbb{R}^2 ett plan, \mathbb{R}^3 det tredimensionella rummet, medan \mathbb{R}^n , för $n > 3$, är svårare att askådliggöra sig geometriskt. I \mathbb{R}^2 och \mathbb{R}^3 använder vi ofta beteckningarna (x, y) respektive (x, y, z) i stället för (x_1, x_2) respektive (x_1, x_2, x_3) .

Elementen i mängden \mathbb{R}^n är vektorer, och precis som för vektorer kan vi definiera vektoraddition, multiplikation med skalär och skalärprodukt.

Definition 1.

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \vec{x} &= \lambda(x_1, \dots, x_n) &&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) &&= x_1 y_1 + x_2 y_2 \dots x_n y_n\end{aligned}$$

Ibland kan det vara praktiskt att tolka elementen i \mathbb{R}^n som matriser. Om vi använder konventionen att $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ är en kolonnmatris så kan vi skriva $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$, där elementen i högerledet ska tolkas som matriser.

Definition 2. Längden av en vektor \vec{x} i \mathbb{R}^n ges av

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Definition 3. Avståndet mellan två punkter $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ges av

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Definition 4. Vinkeln mellan två vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ definieras som den vinkel $\theta \in [0, \pi]$, som uppfyller

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$$

Sats 1 (Cauchy-Schwarz olikhet). För $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, så gäller $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ med likhet precis då \vec{x} och \vec{y} är parallella (dvs. då $\vec{x} = t\vec{y}$, $t \in \mathbb{R}$).

Bevis. Vi antar att $\vec{x} \neq \vec{0}$ (trivial lösning). Skalarprodukten av en vektor med sig själv kan aldrig vara negativ. Låt $t \in \mathbb{R}$ som vi snart ska specificera. Då gäller:

$$0 \leq (t\vec{x} + \vec{y}) \cdot (t\vec{x} + \vec{y}) = t^2|\vec{x}|^2 + 2t\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2$$

Kvadratkomplettering och ansättning $t = -\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2}$ ger:

$$0 \leq |\vec{x}|^2 \left(t + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|^2} \right) - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{x}|^2} + |\vec{y}|^2 = |\vec{y}|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{x}|^2} \iff |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

Likhet inträffar precis då $t\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, dvs. då \vec{x} och \vec{y} är parallella. □

Det är relativt enkelt att visa att även triangelolikheten $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ gäller för $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (utveckla $|\vec{x} + \vec{y}|^2$ och använd Cauchy-Schwarz olikhet).

Man kan mäta avstånd i \mathbb{R}^n på andra sätt än den Euklidiska normen $|\vec{x}|$ ovan. Två andra definitioner som bibehåller vissa grundläggande egenskaper (Δ -olikheten, $|\vec{x}| \geq 0$ med likhet för $\vec{x} = 0$, samt $|\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$) är normerna $|\vec{x}|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ respektive $|\vec{x}|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$. Man kan visa att normerna är ekvivalenta med den Euklidiska, dvs. $A|\vec{x}|_p \leq |\vec{x}| \leq B|\vec{x}|_p$

Föreläsning 2

Topologiska begrepp

För att kunna definiera gränsvärden, och i förlängningen kontinuitet och derivata, hos funktioner av flera variabler behöver vi generalisera begreppen öppna/slutna intervall och ändpunkter/inre punkter hos intervall till \mathbb{R}^n . Vi börjar med att definiera en omgivning till en punkt.

Definition 5. En omgivning till en punkt \vec{a} består av alla punkter som ligger inom ett visst avstånd från \vec{a} .

För ett tal $\delta > 0$, så är mängden $N(\vec{a}, \delta) = \{\vec{x} : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta\}$ en (δ -)omgivning till \vec{a} . I \mathbb{R}^1 blir en δ -omgivning till \vec{a} ett intervall på tallinjen, I \mathbb{R}^2 blir det en cirkel kring \vec{a} med radie δ , och i \mathbb{R}^3 blir det en sfär med radie δ .

Definition 6. Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . En punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ är:

1. inre punkt till M om det finns en omgivning A till \vec{a} som helt ligger i M ($A \subset M$).

2. yttre punkt till M om det finns en omgivning B till \vec{a} som helt ligger utanför M ($B \cap M = \emptyset$).
3. randpunkt till M om \vec{a} varken är inre eller yttre punkt, dvs om alla omgivningar till \vec{a} innehåller både punkter som tillhör M och punkter som inte tillhör M .

Mängden av alla inre punkter kallas det inre av M och betecknas M° . Mängden av alla randpunkter kallas randen till M och betecknas ∂M . En randpunkt kan tillhöra mängden, men behöver inte göra det.

Definition 7. Låt M vara en mängd in \mathbb{R}^n . M är öppen om $M = M^\circ$ och sluten om M^c är en öppen mängd.

Alternativt kan M sägas vara öppen om $\partial M \cap M = \emptyset$ och sluten om $\partial M \subset M$ i analogi med definitionen av öppna och slutna intervall på \mathbb{R} .

Exempel 2. Mängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ består av en elliptisk skiva. Randen består av ellipsen med ekvation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. För varje punkt i mängden finns en omgivning som är helt innehållen i mängden, och består således bara av inre punkter. Mängden är således öppen.

Exempel 3. Mängden $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ består av enhetssfären i \mathbb{R}^3 . Alla omgivningar till punkter på sfären innehåller både punkter på sfären och i dess komplement, så alla punkter på sfären är randpunkter till mängden. Därmed gäller att $\partial M \subset M$ och mängden är sluten.

Definition 8. Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . Det slutna höljet av M ges av $\bar{M} = M \cup \partial M$.

Från ovanstående definitioner gäller M sluten $\iff \partial M \subset M \iff \bar{M} = M \cup \partial M$, så en mängd M är sluten omm. den uppfyller $\bar{M} = M$.

Man kan också visa att \bar{M} alltid är en sluten mängd. Komplementet till \bar{M} är de yttre punkterna till M och de utgör per definition en öppen mängd.

Definition 9. En mängd M i \mathbb{R}^n kallas begränsad om $M \subset N(\vec{0}, r)$, $r > 0$.

Punkterna i en begränsad mängd ligger på ändligt avstånd från origo. En mängd som är både sluten och begränsad kallas för kompakt. Enhetssfären är ett exempel på en kompakt mängd. Vi återkommer till de topologiska begreppen när vi har infört gränsvärden i

\mathbb{R}^n om några kapitel. Vi avslutar med ett resultat om unioner och snitt av öppna mängder.

Sats 2. *Antag att $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ är öppna för alla $i \in I$ (indexmängd). Då är $\cup_{i \in I} \Omega_i$ öppen.*

En oändlig union av öppna mängder är öppen, men ett oändligt snitt av öppna mängder behöver inte vara öppen (bevis i kompendiet).

Exempel 4. Låt $\Omega_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{n}\}$, för något $n \in \mathbb{Z}^+$. Unionen av Ω_n uppfyller

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \Omega_n = \Omega_2$$

eftersom mängderna blir allt mindre. Snittet av Ω_n uppfyller

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \Omega_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

som är en sluten mängd.

Resten av detta kapitel kommer ägnas åt att studera vilka ytor i \mathbb{R}^3 som olika linjära och kvadratiska ekvationer i x , y , och z ger upphov till. En linjär ekvation i x , y , och z kan skrivas $ax + by + cz = d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ och är, som bekant, ekvationen för ett plan.

Planet $z = 0$ kallas xy -planet, planet $y = 0$ kallas xz -planet, och planet $x = 0$ kallas yz -planet. Om någon av variablerna x , y , eller z saknas kommer den motsvarande ytan att vara parallell med den frånvarande variabeln.

Exempel 5. Ekvationen $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ motsvaras i \mathbb{R}^2 av en cirkel med centrum i $(-2, 1)$ och radie 1. I \mathbb{R}^3 motsvaras ekvationen av en cylinder som är parallell med z -axeln.

Skärningspunkten mellan två tvådimensionella ytor i \mathbb{R}^3 utgör i allmänhet en endimensionell kurva i \mathbb{R}^3 (vi återkommer till kurvor i kapitel 11 i kursboken).

Exempel 6. Vilka punkter (x, y, z) löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 4 \\ z & = 2 \end{cases}$$

Ekvationen $x^2 + y^2 = 4$ motsvarar en cylinder, och ekvationen $z = 2$ ett plan. snittet av dessa mängder är en cirkel.

Andragsytor

En allmän andragsytor i variablerna x , y , och z kan skrivas

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

I undantagsfall kan detta uttryck faktoriserats till produkten $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ varvid lösningarna ges av skärningslinjen mellan två plan. I alla andra fall får vi en så kallad kvadratisk yta som kommer att vara krökt. Det finns sex olika typer av kvadratiska ytor och vi inleder nästa kapitel med att studera dessa (ett exempel är enhetssfären som vi redan har tagit upp).

Föreläsning 3

Andragsytor (forts.)

En irreducibel andragsytor i variablerna x , y , och z motsvarar någon av följande sex typer av krökta ytor:

1. **Sfär.** Ekvationen för en sfär med centrum i punkten (x_0, y_0, z_0) och radie r är $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Jämför med cirkelns ekvation och avståndsformeln i \mathbb{R}^3 .
2. **Cylinder.** Ekvationen för en cylinder parallell med z -axeln ges av $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Analogt är $(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ en cylinder som är parallell med y -axeln osv. Ovanstående cylindrar är cirkulära eftersom tvärsnittet är en cirkel. Men en cylinder kan också vara elliptisk, parabolisk eller hyperbolisk om tvärsnittet är en ellips, parabel eller hyperbel. exempelvis är cylindern $y = x^2/2$ parabolisk och parallell med z -axeln.
3. **Kon.** Punkterna (x, y, z) på en kon parallell med z -axeln uppfyller att z -koordinaten är proportionell mot radien $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dvs. $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ eller med andra ord $z^2 = c^2(x^2 + y^2)$. Konstanten c ger ett mått på hur snäv konen är. Ovanstående kon är cirkulär, men precis som cylindrar kan koner även vara elliptiska. Motsvarande ekvation för en elliptisk kon är $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$. Om minustecknet placeras framför någon av de andra variablerna får vi en kon parallell med motsvarande axel.
4. **Ellipsoid.** Ekvationen för en ellipsoid med centrum i origo är $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Alla tvärsnitt av en ellipsoid är ellipser.
5. **Paraboloid.** En elliptisk paraboloid parallell med z -axeln har ekvationen $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$ och en hyperbolisk paraboloid parallell med z -axeln har ekvationen $z = x^2/a^2 - y^2/b^2$.
6. **Hyperboloid.** En hyperboloid $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = \pm 1$ är antingen en- eller tvåmantlad och har ett elliptiskt tvärsnitt i ett koordinatplan och ett hyperboliskt tvärsnitt i ett annat koordinatplan.

Kvadratiska former

Ett kvadratisk uttryck i x , y , och z kan alltid kvadratkompletteras så att det inte innehåller några förstegradstermer. Vi ska nu studera det kvarvarande uttrycket mer i detalj.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Uttrycket i högerledet kallas *den kvadratiska formen* för matrisen \mathcal{A} . Vi inför följande begrepp:

Definition 10. \mathcal{A} är positivt definit om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x} > 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, positivt semidefinit om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x} \geq 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ och indefinit om $\vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x}$ antar både positiva och negativa värden.

Förutom att kvadratiska former kan relateras till olika ytor i rummet, så kommer de också vara viktiga vid klassificering av extremvärden av funktioner av flera variabler. För att avgöra om en matris är positivt definit kan vi kvadratkomplettera motsvarande kvadratiska form.

Exempel 7. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ är positivt definit. Kvadratkomplettering av motsvarande kvadratiska form ger:

$$\begin{aligned} & x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy + 4xz + 6yz \\ &= (x + y + 2z)^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz + 2y^2 + 6z^2 + 6yz \\ &= (x + y + 2z)^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz \\ &= (x + y + 2z)^2 + (y + z)^2 + z^2 \end{aligned}$$

Den kvadratiska formen är positiv för alla nollskilda val av (x, y, z) , så matrisen är positivt definit.

I linjär algebra visas att en matris är positivt definit om alla dess egenvärden (dvs. tal λ som uppfyller $\mathcal{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}$ för något \vec{x}) är positiva. Man kan även relatera detta till tecknet på vissa determinanter (Sats 8, Kap 10.7 i kursboken).

Cylindriska och sfäriska koordinater

Vi såg att kvadratiska ekvationer i \mathbb{R}^3 kan ge upphov till cylindrar och sfärer. Om ett problem i \mathbb{R}^3 har en sådan geometri är det, som vi ska se, ofta praktiskt att byta koordinatsystem från de vanliga kartesiska koordinaterna till cylindriska eller sfäriska koordinater.

Cylindriska koordinater fås genom att x - och y -koordinaterna byts mot polära koordinater, medan z -koordinaten är oförändrad. Relationen mellan (x, y, z) och $[r, \theta, z]$ blir:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z$$

Cylindriska koordinater lämpas väl till problem som har axiell symmetri. Notera att r är avståndet från punkten P till z -axeln, och inte till origo.

Vid radiell symmetri är sfäriska koordinater att föredra. Variabeln ρ motsvarar avståndet till origo ($\rho \geq 0$), variabeln θ är vinkeln mot den positiva x -axeln ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), och variabeln ϕ är vinkeln mot positiva z -axeln ($0 \leq \phi \leq \pi$). Relationen mellan kartesiska och sfäriska koordinater ges av:

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \quad z = \rho \cos(\phi)$$

I kartesiska koordinater motsvarar ekvationerna $x = a$, $y = b$, $z = c$ plan i rummet. I cylindriska koordinater motsvarar $r = a$ ett cylindriskt skal med radie a som är parallellt med z -axeln och $\theta = b$ motsvarar ett halvt plan som är ortogonalt med xy -planet. I sfäriska koordinater motsvarar $\rho = a$ ett sfäriskt skal med radie a , $\phi = b$ motsvarar en cirkulär kon kring z -axeln och $\theta = c$ har samma tolkning som för cylindriska koordinater.

Liknande koordinatbyten kan göras även för \mathbb{R}^n , $n > 3$, men är förstås svårare att visualisera sig. Låt exempelvis $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ och låt $[\rho', \phi', \theta']$ vara de sfäriska koordinaterna för tre dimensioner. Då gäller $w = \rho \cos(\phi)$, $\rho' = \rho \sin(\phi)$, och relationen mellan kartesiska och sfäriska (fyrdimensionella) koordinater blir:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\phi) \sin(\phi') \cos(\theta'), & y &= \rho \sin(\phi) \sin(\phi') \sin(\theta'), \\ z &= \rho \sin(\phi) \cos(\phi'), & w &= \rho \cos(\phi) \end{aligned}$$

Föreläsning 4: Vektorvärda funktioner

En vektorvärd funktion av en variabel med värden i \mathbb{R}^n , dvs en funktion på formen $t \rightarrow \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ kallas för en n -dimensionell kurva i \mathbb{R}^n . För $n = 2$ talar man om en plan kurva, och för $n = 3$ om en rymdkurva. Variabeln t kallas parameter, och dess definitionsmängd är vanligen ett intervall på den reella axeln.

Parametern ger upphov till en riktning i vilken kurvan genomlöps. Som nästa exempel visar kan en och samma kurva uttryckas med flera olika parameterframställningar (val av funktion och definitionsmängd).

Exempel 8. Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i planet har parameterframställningen $x = a \cos(\theta)$,

$y = b \sin(\theta)$ för $\theta \in [0, 2\pi)$ eftersom det då gäller att:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{a \cos(\theta)^2}{a^2} + \frac{b \sin(\theta)^2}{b^2} \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

Om $a = b = r$ får vi en cirkel. På samma sätt inses att cirkeln $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ har parameterframställningen $x = \frac{1}{2}(1 + \cos(\theta))$, $y = \frac{1}{2} \sin(\theta)$ för $\theta \in [0, 2\pi)$

Exempel 9. Avgör vilken kurva som har parameterframställningen

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad y = \frac{t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi eliminerar parametern t . Division av ekvationerna för x och y ger:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 + y^2 = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Detta är samma kurva som i exemplet innan. Observera dock att origo inte kommer med om vi använder den andra parametreringen. Positiva värden på t ger övre halvan av kurvan och negativa värden på t ger undre halvan av kurvan.

De plana kurvorna ovan kunde beskrivas med en ekvation i x och y . För att beskriva en rymdkurva i parameterfri form krävs ett ekvationssystem med två ekvationer i x , y , och z (varje ekvation motsvarar en yta i rummet).

Exempel 10. Parametrisera skärningskurvan mellan ytorna

$$z + \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0, \quad \text{och} \quad x + y = 1$$

Kurvan $z + \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0$ är undre halvan av enhetsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (den del som ligger under xy -planet). Ekvationen $x + y = 1$ motsvarar ett plan. Vi sätter $x = t$ ($y = t$ fungerar lika bra) och får:

$$\begin{aligned} y = 1 - x = 1 - t, \quad z &= -\sqrt{1 - x^2 - y^2} = -\sqrt{1 - t^2 - (1 - t)^2} \\ &= -\sqrt{1 - t^2 - (1 - 2t + t^2)} = -\sqrt{2t - 2t^2} \end{aligned}$$

Rotuttrycket är definierat då $2t(1-t) \geq 0$, vilket inträffar då både t och $(1-t)$ är positiva (de kan inte båda vara negativa), dvs. då $t \in [0, 1]$. En parameterframställning är alltså $\vec{x}(t) = (t, 1-t, -\sqrt{2t(1-t)})$, $t \in [0, 1]$

Om parametern t får beteckna tiden, så kan $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tolkas som läget hos en partikel vid tiden t . Om funktionerna $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ alla är deriverbara så kan vi definiera vektorn $\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Vi kallar $\vec{r}'(t)$ tangentvektorn till kurvan i punkten $\vec{r}(t)$. Om $\vec{r}(t)$ tolkas som partikelns läge så kan $\vec{r}'(t)$ tolkas som partikelns hastighet och $|\vec{r}'(t)|$ som dess fart vid tiden t . Vidare kan $\vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ tolkas som partikelns acceleration vid tiden t .

Precis som för vektorer kan vi definiera skalär- och vektorprodukt för vektorvärda funktioner. Följande sats, som är en enkel följd av räkneregler för derivatan av skalärvärda funktioner av en variabel, ger en produktregel för skalär- och vektorprodukter.

Sats 3. Låt $\vec{u}(t)$ och $\vec{v}(t)$ vara två vektorvärda funktioner i en variabel och låt $\lambda(t)$ vara en skalärvärd funktion. Då gäller:

1. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$
2. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$
3. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$
4. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t) \cdot \vec{u}'(\lambda(t))$

Observera att fjärde formeln visar att tangentvektorns riktning är oberoende av val av parameterframställning.

Exempel 11. Låt $\vec{r}(t)$ vara läget på en partikel vid tiden t . Visa att om kraften på partikeln är parallell med $\vec{r}(t)$, så är $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ konstant.

Enligt Newtons andra lag så gäller sambandet $\vec{F}(t) = m\vec{r}''(t)$ mellan en kropps acceleration $\vec{r}''(t)$ och kraften $\vec{F}(t)$ som verkar på kroppen. I detta fall gäller därmed

$$\vec{r}''(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(t) = \frac{k}{m}\vec{r}(t)$$

för någon konstant k . Vi undersöker derivatan av $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)) = \vec{r}''(t) \times \vec{r}(t) + \underbrace{\vec{r}'(t) \times \vec{r}'(t)}_{=0} = \frac{k}{m} \underbrace{\vec{r}(t) \times \vec{r}(t)}_{=0} = \vec{0}$$

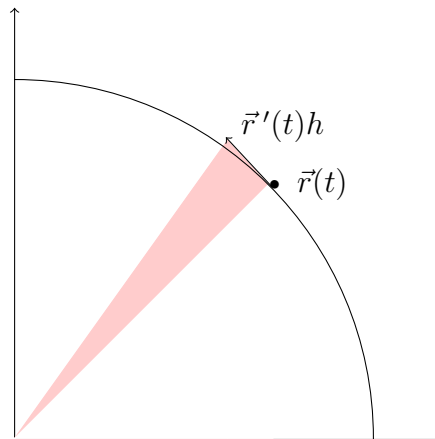
Derivatan av $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är alltså noll, vilket implicerar att funktionen $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ måste vara konstant.

Situationen i exemplet gäller för planeterna i solsystemet om vi väljer att låta solen ligga i origo. Betrakta nu ett kort tidsintervall h . Arealen av den skuggade triangeln i figuren är, enligt den geometriska tolkningen av vektorprodukten, lika med

$$\frac{1}{2}|(\vec{r}'(t)h) \times \vec{r}(t)| = \frac{h}{2}|\vec{r}'(t)\vec{r}(t)|$$

Vi visade i exemplet att vektorn $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är konstant. Areal som översveps av en planet i solsystemet per tidsenhet är därför

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{h}{2} |(\vec{r}'(t)h) \times \vec{r}(t)| &= \frac{1}{2} |\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)| \\ &= \textit{konstant} \end{aligned}$$



Detta är Keplers andra lag för planetbanorna i solsystemet. Den härleddes empiriskt från planetobservationer i början av 1600-talet. Vektorn $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t)$ är en konstant vektor som hela tiden är vinkelrät mot $\vec{r}(t)$. Detta innebär att $\vec{r}(t)$ måste ligga i ett och samma plan. Detta är också en följd av Keplers andra lag som säger att planetbanorna är elliptiska. Att elliptiska banor uppfyller villkoret i exemplet ovan ges av:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (a \cos(kt), b \sin(kt)), & \vec{r}'(t) &= (-ak \sin(kt), bk \cos(kt)) \\ \vec{r}''(t) &= (-ak^2 \cos(kt), -bk^2 \sin(kt)) = -k^2 \vec{r}(t) \end{aligned}$$

Föreläsning 5

Båglängd av en kurva

Låt nu $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, vara en två- eller tredimensionell kurva, vars komponenter är deriverbara funktioner. Vi ska bestämma längden av kurvan. Precis som när vi bestämde båglängden av en funktionsgraf, så delar vi in parameterintervallet i n stycken delintervall: $a = t_- < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. På varje delintervall $[t_{i-1}, t_i]$ kan kurvan approximeras av $|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$, så kurvans längd är minst:

$$s_n = \sum_{i=1}^n |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

s_n är en Riemannsumma som under vissa villkor på kurvan konvergerar mot integralen $\int_a^b \left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| dt$. Låt nu $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Då gäller

$$\left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| = |(x'(t), y'(t), z'(t))| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2},$$

Så båglängden av av kurva ges av

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Exempel 12. Bestäm längden av kurvan $\vec{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), \frac{2}{3}t^{3/2})$, $t \in [0, 2\pi]$. Kurvan är en spiral kring z -axeln som sträcks ut allt mer. Dess längd ges av:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2 \sin(t))^2 + (2 \cos(t))^2 + (t^{1/2})^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + t} dt \\ &= \left[\frac{2}{3}(4 + t)^{3/2} \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{3}((4 + 2\pi)^{3/2} - 8) \end{aligned}$$

Längden av en kurva mellan två punkter är oberoende av val av parametrisering. Ibland kan det vara praktiskt att välja båglängden som parameter för kurvan, dvs. $\vec{r}(s)$. För att byta parameter från den ursprungliga parametern t till båglängden s utnyttjar vi formeln för båglängden $s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau$, ur vilken vi kan lösa ut t som funktion av s och sätta $\vec{r}(t(s))$.

En fördel med att ha båglängden som parameter är att:

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \vec{r}(t(s)) = \vec{r}'(t) \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t(s))|}$$

vilket innebär att tangentvektorn alltid är en enhetsvektor.

Funktioner av flera variabler

Låt D vara en mängd i \mathbb{R}^n . En funktion av n variabler tilldelar till varje element $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ en punkt $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Fallet $n = 1$ har vi studerat i kursen envariabelanalys. För $n = 2$ kan funktioner beskrivas geometriskt med grafer. För $n = 2$ och $n = 3$, som vi främst kommer behandla i denna kurs, finns ingen lika bra geometrisk beskrivning av funktioner.

Betrakta fallet $n = 2$, så att f är en funktion av de båda variablerna x och y . Definitionsmängden D ligger i xy -planet och grafen till f är den tredimensionella punktmängden $\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$. Grafen till f bildar en yta i rummet uppspänd rakt ovanför definitionsmängden D .

Om funktionen har en symmetri av något slag blir det enklare att rita grafen till denna. Ett exempel är radiell symmetri:

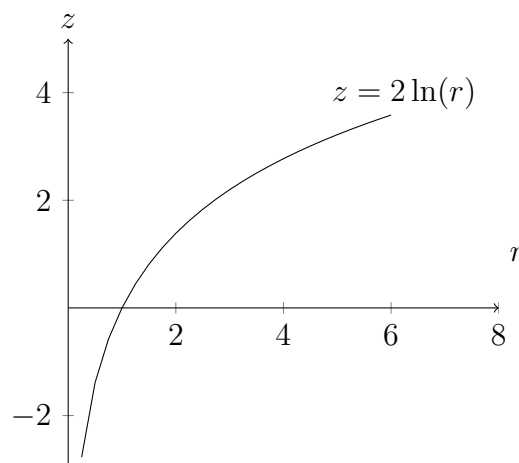
Exempel 13. Skissa grafen till funktionen

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad 0 < x^2 + y^2 \leq 4.$$

I xy -planet ges avståndet r till origo av $r^2 = x^2 + y^2$, så funktionen kan skrivas

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2) \\ &= \ln(r^2) \\ &= 2 \ln(r), \quad r \in (0, 2]. \end{aligned}$$

Så vi får grafen till f genom att rotera grafen till $z = 2 \ln(r)$ kring z -axeln.



Det kan vara svårt att rita tredimensionella ytor på ett bra sätt. Ett alternativ kan då vara att rita de så kallade nivåkurvorna $f(x, y) = c$ i xy -planet för olika värden på konstanten c .

Den resulterande figuren liknar en topografisk karta (höjdkurvor) över funktionen. Jämför även väderkartornas isotermer och isobarer.

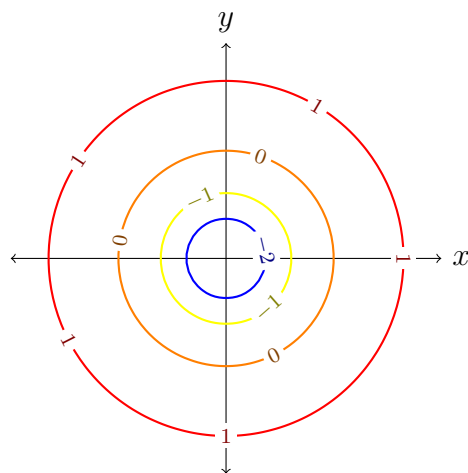
Exempel 14. Skissa nivåkurvorna till funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ för $c = \{-2, -1, 0, 1\}$.

Den radiella symmetrin gör att nivåkurvorna måste vara koncentriska cirklar. Nivåkurvan för $c = 0$ blir enhetscirkeln. $c = 1$ ger

$$\begin{aligned} 1 &= \ln(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = e \\ &\Rightarrow \quad \text{cirkel med radie } \sqrt{e} \approx 1.65 \end{aligned}$$

$c = -1$ och $c = -2$ ger slutligen

$$x^2 + y^2 = e^{-1} \quad \text{respektive} \quad x^2 + y^2 = e^{-2}$$



Om avståndet mellan c -värdena är konstant, som i detta exempel, så betyder glesa nivåkurvor att funktionen förändras sakta och täta nivåkurvor att funktionen förändras snabbt, i analogi med höjdkurvor på en karta.

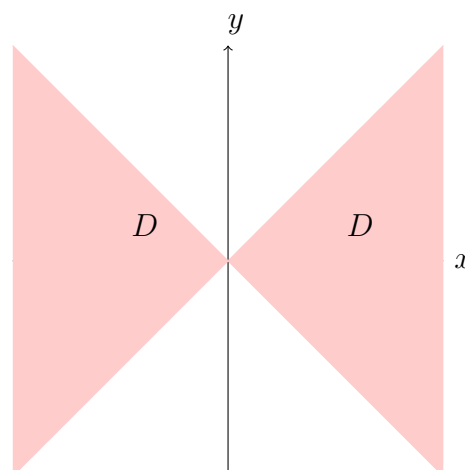
Om inget annat anges är definitionsmängden D till en funktion f av n variabler det största mängd i \mathbb{R}^n för vilken $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är väldefinierat för alla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Exempel 15. Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x-y}$.

f är definierad då $\frac{x+y}{x-y} > 0$. Beroende på om $x-y > 0$ eller om $x-y < 0$ får vi två olika fall:

$$\begin{aligned} x-y > 0 : \quad & \frac{x+y}{x-y} > 0 \\ \Rightarrow x+y > 0 \quad & \Rightarrow -x < y < x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y < 0 : \quad & \frac{x+y}{x-y} < 0 \\ \Rightarrow x+y < 0 \quad & \Rightarrow x < y < -x \end{aligned}$$



Olikheten i första fallet är rimlig när $x > 0$ och olikheten i andra fallet är rimlig när $x < 0$.

Betrakta nu fallet $n = 3$. Grafen består då av en fyrdimensionell punktmängd som vi inte kan visualisera. Vi får i allmänhet nöja oss med att hitta eventuella symmetrier och skissa funktionens nivåytor $f(x, y, z) = c$.

Exempel 16. Nivåytorna till funktionen $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ är koncentriska ellipsoider med centrum i origo.

Föreläsning 6

Gränsvärden och kontinuitet

Vi ska nu definiera gränsvärden för vektorvärda funktioner och funktioner av flera variabler. Alla dessa funktioner kan generellt skrivas som en funktion från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^p för några positiva heltal n och p .

Till varje punkt $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ ordnar funktionen f ett element $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^p$. f :s komponenter kan skrivas

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Om $n = 1$, $p > 1$ får vi en vektorvärd funktion av en variabel (kurva, yta). Om $n > 1$, $p = 1$ får vi en funktion av flera variabler. För att kunna ta fram en differential- och integralkalkyl för funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^p behöver vi en definition av gränsvärde.

Definition 11. Låt \vec{f} vara en funktion från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^p med definitionsmängd D och antag att \vec{a} är en inre punkt eller randpunkt till D . Vi säger då att \vec{f} har gränsvärdet $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$

om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{x} - \vec{a}| < \delta \\ \vec{x} \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |f(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon$$

Detta skrivs $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ eller $f(\vec{x}) \rightarrow \vec{b}$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$.

Man kan fråga sig hur gränsvärdena $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$ och $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x})$ är relaterade. Låt därför $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ och notera att \vec{y} kan skrivas

$$\vec{y} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_p e_p \text{ för } e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_p = (0, \dots, 0, 1)$$

Triangelolikheten ger $|\vec{y}| = |y_1 e_1 + \dots + y_p e_p| \leq |y_1 e_1| + \dots + |y_p e_p| = |y_1| + \dots + |y_p|$. Samtidigt gäller förstås $|\vec{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2} \geq \sqrt{y_j^2} = |y_j|$ för alla $j \in \{1, \dots, p\}$. Sammanfattningsvis får vi, om vi byter ut \vec{y} mot $f(\vec{x}) - \vec{b}$,

$$|f_j(\vec{x}) - b_j| \leq |f(\vec{x}) - \vec{b}| \leq |f_1(\vec{x}) - b_1| + \dots + |f_p(\vec{x}) - b_p|.$$

Detta innebär att $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ precis då $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j$ för alla $j \in \{1, \dots, p\}$.

Gränsvärden för vektorvärda funktioner kan reduceras till gränsvärden av de reellvärda komponenterna. Detta var anledningen till att vi kunde definiera derivatan av en parametriserad kurva genom att derivera kurvans komponenter. Under återstoden av detta kapitel kommer vi därför att arbeta med funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R} .

Funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}

Gränsvärden av funktioner av flera variabler uppfyller samma räkneregler som för funktioner av en variabel. Om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = L$ och $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = M$, så gäller:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = L + M, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})g(\vec{x}) = LM, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

För funktioner av en variabel skilde vi på vänster- och högergränsvärden beroende på från vilket håll som vi närmade oss den punkt i vilken vi ville veta gränsvärdet. Om vänster- och högergränsvärdena sammanföll, så var de lika med gränsvärdet i punkten. För funktioner av flera variabler kan vi närma oss en viss punkt längs oändligt många kurvor. Vi kan rimligen inte bestämma gränsvärdet längs var och en av dessa kurvor och kan inte bestämma gränsvärden med denna metod. Vi inleder med ett par exempel:

För att visa att ett gränsvärde $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$ inte existerar räcker det att hitta två olika, välvalda kurvor som går mot \vec{a} och för vilka $f(\vec{x})$ närmar sig olika värden.

Exempel 17. Visa att gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ inte existerar.

Vi provar med de båda räta linjerna $(x, y) = (t, 0)$ respektive $(x, y) = (t, t)$.

$$\text{Den första ger: } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t * 0}{t^2 + 0^2} = 0 \quad \text{och den andra ger } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t * t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$$

Gränsvärdena är olika, så gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ kan inte existera.

Vi tar ett ännu knepigare exempel.

Exempel 18. Visa att gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^3}{(x^4 + y^2)^2}$ inte existerar.

Vi provar med alla räta linjer $(x, y) = (t, kt)$ respektive $(x, y) = (0, t)$. Dessa ger:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (kt)^3}{(t^4 + (kt)^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k^3 t^7}{(t^4 + k^2 t^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k^3 t^2}{(t^2 + k^2)^2} = 0, \quad k \neq 0$$

För $(x, y) = (0, t)$ och $(x, y) = (t, 0)$ är funktionerna identiskt lika med noll. Gränsvärdet är noll längs alla räta linjer. Längs parabeln $(x, y) = (t, t^2)$ får vi dock gränsvärdet:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 (t^2)^2}{(t^4 + (t^2)^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^8}{(2t^4)^2} = \frac{1}{2}$$

Så gränsvärdet existerar ej.

Att visa att ett gränsvärde existerar är ofta ganska svårt. Ibland kan vi dock reducera problemet till ett endimensionellt gränsvärde.

Exempel 19. Visa att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + xy)}{xy + x^3 y^3} = 1$ för $x > 0, \quad y > 0$.

Vi kan skriva

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 + xy)}{xy + x^3 y^3} &= \frac{\ln(1 + xy)}{xy(1 + (xy)^2)} \\ &= \frac{\ln(1 + t)}{t(1 + t^2)} \quad (\text{ansätt } t = xy) \end{aligned}$$

Vi ser att x och y endast förekommer i kombinationen xy och sätter detta till en ny variabel. När $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ så gäller $t \rightarrow 0$, och

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + xy)}{xy + x^3 y^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t(1 + t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} * \frac{1}{1 + t^2} = 1$$

Med hjälp av gränsvärdesdefinitionen för funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R} kan vi nu definiera kontinuitet. (Fallet $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ behandlas komponentvis).

Definition 12. Låt f vara en funktion från \mathbb{R}^n till \mathbb{R} med definitionsmängd D . Vi säger att f är kontinuerlig i punkten $\vec{a} \in D$ om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$. f är en kontinuerlig funktion om f är kontinuerlig i varje punkt $\vec{a} \in D$

Från räknereglererna för gränsvärden inses att summan, produkten, och sammansättningen osv. av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig. För kontinuerliga funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R} finns en motsvarighet till satsen om mellanliggande värden. Motsvarigheten till intervall i \mathbb{R}^n är följande.

Definition 13. En mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ är en bågvis sammanhängande mängd om det för varje par \vec{a}, \vec{b} av punkter i D finns en kontinuerlig funktion \vec{x} från $[\alpha, \beta]$ till \mathbb{R}^n som uppfyller $\vec{x}(\alpha) = \vec{a}$, $\vec{x}(\beta) = \vec{b}$ och $\vec{x}(t) \in D \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Sats 4. Om $D \subset \mathbb{R}^n$ är en bågvis sammanhängande mängd och $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ är kontinuerlig så är $f(D)$ en bågvis sammanhängande mängd.

Föreläsning 7: Hopningspunkter, Delföljder och Cauchy-följder

Målet med detta och nästa kapitel är att ta fram ett nytt, och starkare, kontinuitetsbegrepp: likformig kontinuitet. Lite vagt kan man säga att en funktion är likformigt kontinuerlig på ett intervall om funktionen är kontinuerlig och förändras ungefär lika 'snabbt' i alla punkter. På vägen kommer vi att behöva definiera och undersöka ett antal nya begrepp som är av intresse i sig. Vi kommer att börja med att studera talföljder i \mathbb{R}^n .

Definition 14. Låt $\{\vec{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd i \mathbb{R}^n och \vec{b} en punkt i \mathbb{R}^n . Vi säger att \vec{b} är en hopningspunkt till talföljden $\{\vec{a}_n\}$ om det till varje omgivning N till \vec{b} finns oändligt många index sådana att $\vec{a}_n \in N$.

Vi säger att talföljden $\{\vec{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot \vec{b} om det till varje omgivning N till \vec{b} finns ett tal N_0 så att $\vec{a}_n \in N$ för alla $n \in N_0$ (dvs. att gränsvärdet av en konvergent talföljd är en hopningspunkt).

Men även divergenta talföljder kan ha hopningspunkter.

Exempel 20. Talföljden $\{\vec{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ där $\vec{a}_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ antar värdena $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$. Talföljden oscillerar och är därför inte konvergent. Den har dock tre hopningspunkter: $-1, 0$ och 1 . För varje omgivning N_{-1} av -1 , för varje omgivning N_0 av 0 , och varje omgivning

N_1 av 1, så gäller

$$a_n \in N_{-1} \text{ för } n \in \underbrace{\{3, 7, 11 \dots\}}_{\text{oändligt många index}} \quad a_n \in N_0 \text{ för } n \in \underbrace{\{0, 2, 4 \dots\}}_{\text{oändligt många index}} \quad a_n \in N_1 \text{ för } n \in \underbrace{\{1, 5, 9 \dots\}}_{\text{oändligt många index}}$$

Alla hopningspunkter har egenskapen i exemplet ovan att genom att välja ut bara en del av indexen kan vi få en ny talföljd (en delföljd av den ursprungliga följden) som konvergerar mot hopningspunkten. Vi visar detta.

Sats 5. *Punkten \vec{b} är en hopningspunkt till talföljden $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ omm. det finns en delföljd av $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ som konvergerar mot \vec{b} .*

Bevis. Antag först att \vec{b} är en hopningspunkt till talföljden och låt $N_j = N(\vec{b}, \frac{1}{j})$ vara omgivningningar till \vec{b} för $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Varje sådan omgivning innehåller oändligt många a_n . Välj först n_1 , så att $a_{n_1} \in N_1$. Välj därefter n_2 , så att $n_2 > n_1$ och $a_{n_2} \in N_2$ och sedan n_3 så att $n_3 > n_2$ och $a_{n_3} \in N_3$ osv.

Vi får en delföljd $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ där $a_{n_k} \in N_k$. Låt ni N vara en godtycklig omgivning till \vec{b} . Då finns det ett K så att $N_k \in N$ för alla $k > K$ och följdaktligen gäller $a_{n_k} \in N_K \subset N$ för alla $k > K$. Delföljden $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ konvergerar mot \vec{b} .

Omvändningen är relativt enkel och hoppas över. □

Innan vi fortsätter studera hopningspunkter behöver vi en viktig definition. Betrakta en mängd reella tal S som är uppåt begränsad. Ett av axiomen för de reella talen säger att det finns en minsta övre begränsning, kallad supremum, till S . Observera skillnaden mellan $\max_{a \in S} a$ och $\sup_{a \in S} a$. Det öppna intervallet $(0, 1)$ har inget maximum, eftersom det inte finns något största tal i mängden. Däremot är talet 1 det minsta tal som är större än alla andra tal i mängden $(0, 1)$.

Vi ska nu visa Bolzano-Weierstrass Sats som visar sig vara mycket användbar. Satsen säger när vi kan vänta oss att hitta hopningspunkter.

Sats 6. *Bolzano-Weierstrass sats. Varje begränsad talföljd i \mathbb{R}^n har minst en hopningspunkt.*

Vi visar satsen i \mathbb{R} (se kompendiet för generaliseringen till \mathbb{R}^n). Ett exempel på en obegränsad talföljd som saknar hopningspunkter är $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ med $a_n = n$.

Bevis. Vi antar att talföljden $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ antar oändligt många olika värden (i annat fall får vi situationen i exemplet $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$, och är färdiga direkt). Talföljden är begränsad, så $a_n \in [\beta, \gamma]$ för några $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Vi delar intervallet $[\beta, \gamma]$ i två lika stora delar. Minst ett av intervallen innehåller oändligt många värden i talföljden. Vi kallar detta intervall $[b_1, c_1]$. Dela intervallet $[b_1, c_1]$ i två lika stora delar och kalla ett delintervall som innehåller

oändligt många värden i talföljden $[b_2, c_2]$. Vi får en följd av intervall $\{[b_n, c_n]\}_{n=1}^\infty$ med följande egenskaper:

1. $c_n - b_n = \frac{\beta - \gamma}{2^n}$
2. $[b_n, c_n] \subset [b_{n-1}, c_{n-1}] \subset \dots \subset [b_1, c_1] \subset [\beta, \gamma]$
3. $[b_n, c_n]$ innehåller oändligt många värden i talföljden.

Mängden $Q = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ är begränsad och har ett supremum t . Vi vill visa att t är en hopningspunkt till talföljden och tar en godtycklig omgivning $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ till t . Vi vill visa att $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ innehåller oändligt många element i talföljden $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Eftersom t är ett supremum till Q så gäller $t - \varepsilon < b_n \leq t$ för något tillräckligt stort n och per konstruktion $t - \varepsilon < b_n \leq b_m \leq t$ för alla $m \geq n$. Om vi nu väljer m så stort att $\frac{\gamma - \beta}{2^m} < \varepsilon$ så ser vi att $t - \varepsilon < b_m \leq c_m < t + \varepsilon$. Eftersom intervallet $[b_m, c_m]$ innehåller oändligt många värden i talföljden så följer nu satsen. \square

En begränsad talföljd har alltså minst en hopningspunkt. Om den har fler än en hopningspunkt kan den inte vara konvergent, så en konvergent, begränsad talföljd har precis en hopningspunkt.

Vi ska nu införa ett nytt konvergensbegrepp för talföljder och visa att det är ekvivalent med det vanliga konvergensbegreppet (men kräver inte att vi vet gränsvärdet).

Definition 15. Låt $\{\vec{a}_n\}_{n=1}^\infty$ vara en talföljd i \mathbb{R}^n . Talföljden sägs vara en Cauchyföljd om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal N_0 så att $|\vec{a}_n - \vec{a}_m| < \varepsilon$ för alla $n, m > N_0$.

Sats 7. En Cauchyföljd i \mathbb{R}^n är konvergent (omvändningen visas i kompendiet).

Bevis. Antag att $\{\vec{a}_n\}_{n=1}^\infty$ är en Cauchyföljd. Då finns (för $\varepsilon = 1$) ett N_0 så att $|\vec{a}_n - \vec{a}_m| < 1$ för alla $n, m \geq N_0$. Detta implicerar:

$$|\vec{a}_n| \leq |\vec{a}_1 - \vec{a}_{N_0}| + |\vec{a}_{N_0}| < 1 + |\vec{a}_{N_0}| \quad (\text{Så } \{\vec{a}_n\}_{n=N_0}^\infty \text{ är en begränsad talföljd})$$

Enligt Balzano-Weierstrass sats finns minst en hopningspunkt \vec{t} och enligt tidigare sats en delföljd $\{\vec{a}_{N_k}\}_{k=1}^\infty$ som konvergerar mot \vec{t} . Fixera $\varepsilon > 0$. Enligt förutsättningarna finns ett N_0 så att $|\vec{a}_{N_k} - \vec{t}| < \frac{\varepsilon}{2}$. För alla $n \geq N$ får vi då:

$$\begin{aligned} |\vec{a}_n - \vec{t}| &= |\vec{a}_n - \vec{a}_{N_k} + \vec{a}_{N_k} - \vec{t}| \leq |\vec{a}_n - \vec{a}_{N_k}| + |\vec{a}_{N_k} - \vec{t}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{t} \end{aligned}$$

\square

Föreläsning 8: Likformig kontinuitet

I förra kapitlet studerade vi hopningspunkter och kom bland annat fram till att en begränsad talföljd har minst en hopningspunkt. Vi kommer att ha användning av denna sats när vi i detta kapitel studerar likformig kontinuitet. En funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ är kontinuerlig i ett område $D \subset \mathbb{R}^n$ om den är kontinuerlig i varje punkt $\vec{a} \in D$. En funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ är kontinuerlig i $\vec{a} \in D$ om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ eller, med ε - δ -formalism:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall \vec{x} \in D : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})| < \varepsilon.$$

När vi använda gränsvärdesdefinitionen under kursen i envariabelanalys, såg vi att talet δ berodde på ε . Ju mindre vi valde ε , desto mindre var vi tvungna att välja δ och vice versa. Men ofta beror talet δ också på vilken punkt \vec{a} vi befinner oss i. I en punkt \vec{a} där funktionen förändras snabbt måste vi, för ett givet ε , välja δ mycket mindre än i en punkt där funktionen förändras långsamt.

Exempel 21. Låt $D = [1, \infty)$ och betrakta de kontinuerliga funktionerna $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = x^2$. Beror valet av δ på vilken punkt vi befinner oss i?

Låt $\varepsilon > 0$ och $a \in [1, \infty)$ vara godtyckliga. Vi ska undersöka vilket $\delta > 0$ vi ska välja för att vara sökra på att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq \frac{|x - a|}{2}$$

Det följer att om vi väljer $\delta = 2\varepsilon$ så implicerar $|x - a| < \delta$ att $|f(x) - f(a)| \leq \frac{|x - a|}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$ som önskat. Vi kan alltså välja δ oberoende av a . Anledningen är att funktionskurvan 'planar ut' och förändras allt långsammare.

Låt återigen $\varepsilon > 0$ och $a \in [1, \infty)$ vara godtyckliga och undersök vilket $\delta > 0$ vi ska välja för att $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$.

$$|g(x) - g(a)| = |x^2 - a^2| = |(x + a)(x - a)| = |x + a||x - a|$$

Termen $|x - a|$ kan begränsas genom att välja δ litet, men hur litet vi än väljer δ , så kan ändå $|g(x) - g(a)|$ bli godtyckligt stort om $a \in [1, \infty)$ är tillräckligt stort. Valet av δ beror således på a . Om a är litet kan vi välja δ mycket större än om a är stort. Detta beror på att funktionskurvan får allt brantare lutning.

Om vi kan välja δ oberoende av $\vec{a} \in D$, så säger vi att funktionen är likformigt kontinuerlig på D . Mer formellt har vi följande definition:

Definition 16. Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ och $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$. Vi säger att f är likformigt kontinuerlig på D om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, så att det för alla $x, y \in D$ gäller att:

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Man kan fråga sig om det finns några generella villkor som avgör om en kontinuerlig funktion på ett område D också är likformigt kontinuerlig. I exemplet ovan var området begränsat och då var den funktion vars lutning var begränsad likformigt kontinuerlig.

Betrakta nu en kontinuerlig funktion på ett begränsat område. Om området är öppet kan funktionen mycket väl vara obegränsad. Ett exempel ges av $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet $(0, 1)$. Det är relativt lätt att visa att denna funktion är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig på det givna intervallet. Om området däremot är slutet, dvs kompakt, så kan man visa att värdemängden till en kontinuerlig funktion är kompakt (Sats 3.2 i kompendiet) med hjälp av Bolzano-Weierstrass sats. Det visar sig att kontinuitet då medför likformig kontinuitet.

Sats 8. Låt K vara en kompakt mängd i \mathbb{R}^n och låt $f : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ vara kontinuerlig. Då är f likformigt kontinuerlig på K .

Bevis. Vi visar detta med ett motsägelsebevis och antar därför att K är kompakt och att f är kontinuerlig men samtidigt inte likformigt kontinuerlig på K . Det sistnämnda betyder att det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att hur litet vi än väljer $\delta > 0$, så kan vi hitta tal $\vec{x}, \vec{y} \in K$ så att $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$ men $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \geq \varepsilon$. I synnerhet kan vi hitta två punktföljder $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ och $\{\vec{y}_n\}_{n=1}^\infty$ som uppfyller

$$|\vec{x}_n - \vec{y}_n| < \frac{1}{n} \quad \text{och} \quad |f(\vec{x}_n) - f(\vec{y}_n)| \geq \varepsilon.$$

Talföljden $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ är begränsad ($\vec{x}_n \in K$) och har, enligt Bolzano-Weierstrass sats, en hopningspunkt \vec{t} . Därmed har $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ en delföld $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ som konvergerar mot $\vec{t} \in K$. För motsvarande delföld $\{\vec{y}_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ nu $\{\vec{y}_n\}_{n=1}^\infty$ gäller:

$$|\vec{y}_{n_k} - \vec{t}| \leq |\vec{y}_{n_k} - \vec{x}_{n_k}| + |\vec{x}_{n_k} - \vec{t}| \leq \frac{1}{n_k} + |\vec{x}_{n_k} - \vec{t}|$$

Båda termerna i högerledet blir godtyckligt små för tillräckligt stora värden på k . Därmed konvergerar även $\{\vec{y}_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ mot \vec{t} . Eftersom f är kontinuerlig så gäller det även att $f(\vec{x}_{n_k}) \rightarrow f(\vec{t})$ och att $f(\vec{y}_{n_k}) \rightarrow f(\vec{t})$. Från detta kan vi komma fram till en motsägelse, ty vi har

$$0 < \varepsilon \leq |f(\vec{x}_{n_k}) - f(\vec{y}_{n_k})| \rightarrow |f(\vec{t}) - f(\vec{t})| = 0$$

och en talföljd som jämt är större än ett positivt tal kan inte konvergera mot noll. \square

När vi diskuterade integraler under kursen envariabelanalys, så nämnde vi att kontinuerliga funktioner på slutna, begränsade intervall är integrerbara. Detta beror på att de är likformigt kontinuerliga. En funktion f är integrabel på ett intervall $[a, b]$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en partition P av $[a, b]$ så att $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$, där

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} \qquad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}$$

En kontinuerlig funktion på ett kompakt intervall är likformigt kontinuerlig, så det finns ett δ så att för alla $x, y \in [a, b]$, så gäller $|f(x) - f(y)| < \frac{2}{b-a}$. Om vi väljer partitionen P så att $\max\{\Delta x_i\} < \delta$, så vet vi med säkerhet att $M_i - m_i < \frac{2}{b-a}$ och detta implicerar

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})}_{b-a} = \varepsilon$$

Vilket i sin tur implicerar att funktionen f är integrabel.

Föreläsning 9

Partiella derivator

Ett enkelt sätt att studera en funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ av flera variabler är att undersöka hur varje variabel för sig påverkar funktionen. Vi fixerar därmed alla variabler utom en och betraktar funktionerna:

$$f(x_1, a_2, a_3, \dots, a_n), \quad f(a_1, x_2, a_3, \dots, a_n), \quad f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$$

Geometriskt innebär detta att vi studerar funktionens beteende längs räta linjer som är parallella med koordinataxlarna. De n funktionerna ovan är vanliga funktioner av en variabel och vi kan definiera deras derivator på vanligt sätt. Låt nedan \vec{e}_j vara den j :te standardbasvektorn.

Definition 17. Låt \vec{a} vara en inre punkt i definitionsmängden $D(f)$ till en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_j) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

existerar så säger vi att f är partiellt deriverbar med avseende på variabeln x_j i punkten \vec{a} . Gränsvärdet betecknas $f'_j(\vec{a})$ eller $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})$ och kallas den partiella derivatan med avseende på x_j i punkten \vec{a} .

Om alla partiella derivator $f'_j(\vec{a})$, $j \in \{1, \dots, n\}$, existerar så sägs f vara partiellt deriverbar i \vec{a} . De partiella derivatorna kan användas för att definiera funktioner f'_j vars funktionsvärde i en punkt \vec{x} ges av den partiella derivatan $f'_j(\vec{x})$. Vid partiell derivering betraktas alla variabler, utom den man deriverar med avseende på, som konstanter. Partiell derivering är därmed egentligen derivering av en funktion av en variabel, så samma deriveringsregler gäller som för funktioner av en variabel.

Exempel 22. Bestäm $f'_1(x, y)$ och $f'_2(x, y)$ för $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

För att bestämma $f'_1(x, y)$ betraktar vi y som en konstant och får:

$$f'_1(x, y) = \frac{1 * (x+y) - 1 * x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

För att bestämma $f'_2(x, y)$ betraktar vi x som en konstant och får, med omskrivningen $f(x, y) = x(x+y)^{-1}$:

$$f'_2(x, y) = x(-1)(x+y)^{-2}(1) = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

Från ovanstående exempel ser vi att funktionen $f(x, y)$ är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \text{ty} \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(\frac{y}{(x+y)^2} \right) + y \left(-\frac{x}{(x+y)^2} \right) = 0$$

Man kan faktiskt visa att alla funktioner på formen $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ löser den givna partiella differentialekvationen. Kedjeregeln ger nämligen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= g' \left(\frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2} g' \left(\frac{y}{x} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= g' \left(\frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} g' \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(-\frac{y}{x} \right) g' \left(\frac{y}{x} \right) + y \frac{1}{x} g' \left(\frac{y}{x} \right)$$

Notera vidare att om en partiellt deriverbar funktion $f(x, y)$ uppfyller $f'_1(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, så är f oberoende av x , dvs. $f(x, y) = \varphi(y)$ för någon funktion φ .

I kursen envariabelanalys visade vi att en deriverbar funktion är kontinuerlig. En partiellt deriverbar funktion av flera variabler behöver dock inte vara kontinuerlig, vilket nästa exempel visar

Exempel 23. Funktionen f är definierad som $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och som $f(0, 0) = 0$. Funktionen är partiellt deriverbar utanför origo med också i origo eftersom det är identiskt lika med noll på koordinataxlarna. Alltså gäller $f'_1(0, 0) = f'_2(0, 0) = 0$. Funktionen är dock inte kontinuerlig eftersom när vi närmar oss origo längs linjen $y = x$ så får vi gränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t * t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

som är skilt från funktionsvärdet i origo.

Partiell deriverbarhet är därför ingen lämplig flerdimensionell motsvarighet till deriverbarhet i en variabel och vi hittar nedan en bättre motsvarighet.

Differentierbarhet

Om en funktion av en variabel är deriverbar i en punkt a och där har derivatan $f'(a)$, så innebär det att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \overbrace{\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right)}^{\varphi(h)}$$

Funktionen $\varphi(h)$ är definierad för alla $h \neq 0$ sådana att $f(a+h) \in D(f)$, och uppfyller $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$. f är alltså deriverbar i punkten a om det finns en konstant A och en funktion $\varphi(h)$ sådan att

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \varphi(h)h, \quad \text{där } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Om vi kallar $a+h$ för x , så får vi $h = x-a$ och $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varphi(x-a)(x-a)$, så termen $\varphi(x-a)(x-a)$ blir felet vid linjär approximation av funktionen f . Vi utvidgar denna definition till flera variabler.

Definition 18. Låt \vec{a} vara en inre punkt i definitionsmängden D till en funktion f av n variabler. Vi säger att f är differentierbar i punkten \vec{a} om det finns konstanter A_1, \dots, A_n och en funktion $\varphi(\vec{h})$ sådan att

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + \varphi(\vec{h})|\vec{h}| \quad \text{där } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\vec{h}) = 0$$

Precis som konstanten framför h i det endimensionella fallet var derivatan $f'(a)$, så är konstanterna A_1, \dots, A_n i det flerdimensionella fallet de partiella derivatorna av f . För att visa detta kan vi sätta $\vec{h} = t\vec{e}_j$ och får då

$$\frac{f(\vec{a} + t\vec{e}_j) - f(\vec{a})}{t} = \frac{A_j t}{t} + \varphi(t\vec{e}_j) \frac{|t\vec{e}_j|}{t} \rightarrow A_j, \quad \text{då } t \rightarrow 0$$

Men enligt definitionen av partiell derivata är ovanstående gränsvärde lika med $f'_j(\vec{a})$. Alltså gäller:

Sats 9. En differentierbar funktion är partiellt deriverbar och $A_j = f'_j(\vec{a})$, $j \in \{1, \dots, n\}$

Sats 10. En differentierbar funktion är kontinuerlig.

Bevis.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\vec{a} + h) = f(\vec{a}) + \lim_{h \rightarrow 0} (A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \varphi(\vec{h})|\vec{h}|) = f(\vec{a})$$

□

Föreläsning 10

Differentierbarhet (forts.)

I förra kapitlet sade vi att en funktion $f(x, y)$ var differentierbar i en punkt (a, b) om det fanns konstanter $A_1 = f'_1(a, b)$, $A_2 = f'_2(a, b)$ och en funktion φ sådan att

$$\underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b)}_{f(\vec{a}+\vec{h})} = \underbrace{f(a, b)}_{f(\vec{a})} + \underbrace{f'_1(a, b)h}_{A_1 h_1} + \underbrace{f'_2(a, b)k}_{A_2 h_2} + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2}\varphi(h, k)}_{|\vec{h}|\varphi(\vec{h})}$$

där $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varphi(h, k) = 0$. Låt nu $x = a + h$, $y = b + k$, så vi får följande uppskattning av $f(x, y)$:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b) + \sqrt{h^2 + k^2}\varphi(h, k)$$

Tangentens motsvarighet i två dimensioner blir tangentplanet

$$z = f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b)$$

Exempel 24. Bestäm tangentplanet till paraboloiden $z = x^2 + 2y^2$ i punkten $(1, 1, 3)$.

Funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ är differentierbar (motivering nedan) och har partiella derivator $f'_1(x, y) = 2x$ samt $f'_2(x, y) = 4y$, vilket ger $f'_1(1, 1) = 2$ och $f'_2(1, 1) = 4$. Tangentplanet har således ekvationen

$$z = 3 + 2(x - 1) + 4(y - 1) \quad \Rightarrow \quad 2x + 4y - z = 3$$

Normalvektorn till ett plan med ekvation $ax + by + cz = d$ är ju (a, b, c) , så från tangentplanetns ekvation $f'_1(a, b)x + f'_2(a, b)y - z = d$ inses att funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ har normalvektorn

$$\vec{n} = (f'_1(a, b), f'_2(a, b), -1).$$

Tangentplanet kan användas för att göra linjär approximation av en funktionsyta. Vi återkommer till detta senare när vi tar upp Taylorapproximationer av funktioner av flera variabler.

En differentierbar funktion var partiellt deriverbar och kontinuerlig. Följande sats ger tillräckliga villkor för att en funktion ska vara differentierbar.

Sats 11. Låt f vara en funktion man n variabler med öppen definitionsmängd D . Om f är partiellt deriverbar och de partiella derivatorna f'_1, \dots, f'_n är kontinuerliga, så är f differentierbar på D .

Bevis. Vi visar satsen för funktioner av två variabler och vill uppskatta

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a, b) \\ &= \underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}_{\Rightarrow \alpha(t)=f(a+t, b+k)} + \underbrace{f(a, b+k) - f(a, b)}_{\Rightarrow \beta(t)=f(a, b+t)} \end{aligned}$$

Medelvärdessatsen för funktioner av en variabel ger:

$$\begin{aligned} \alpha(h) - \alpha(0) &= (h-0)\alpha'(\theta_1 h) = hf'_1(a + \theta_1 h, b+k) \\ \beta(k) - \beta(0) &= kf'_2(a, b + \theta_2 k) \end{aligned}$$

för några $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. Eftersom f'_1 och f'_2 är kontinuerliga, så finns det funktioner $\varphi_1(h, k)$ och $\varphi_2(h, k)$ som uppfyller

$$f'_1(a + \theta_1 h, b+k) = f'_1(a, b) + \varphi_1(h, k) \quad f'_2(a, b + \theta_2 k) = f'_2(a, b) + \varphi_2(h, k)$$

där $\varphi_1(h, k) \rightarrow 0$ och $\varphi_2(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Alltså får vi

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf'_1(a, b) + kf'_2(a, b) + \underbrace{h\varphi_1(h, k) + k\varphi_2(h, k)}_{=\sqrt{h^2+k^2}\varphi(h, k)}$$

□

Högre ordningens derivator

Om de partiella derivatorna av en funktion f av n variabler i sin tur är partiellt deriverbara, så kan vi definiera andra ordningens partiella derivator

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = f''_{ji} \quad \text{för } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ osv.}$$

Exempel 25. Bestäm andra ordningens partiella derivator av funktionen $f(x, y) = xy + \ln(xy^2)$

$$f'_x = y + \frac{1}{xy^2}y^2 \quad f'_y = x + \frac{1}{xy^2}2xy = x + \frac{2}{y}$$

$$f''_{xx} = -\frac{1}{x^2} \quad f''_{yx} = 1 \quad f''_{xy} = 1 \quad f''_{yy} = -\frac{2}{y^2}$$

Vi kan även beräkna tredje ordningens partiella derivator, exempelvis $f'''_{xxx} = \frac{2}{x^3}$ och $f'''_{xyx} = 0$ osv.

I exemplet ovan var de blandade partiella derivatorna f''_{xy} och f''_{yx} lika. Detta är ingen tillfällighet som följande sats visar

Sats 12. Låt f vara en funktion man n variabler med definitionsmängd D . Om alla partiella derivator upp till och med ordning k är kontinuerliga, så är alla blandade derivator av ordning k lika.

Beviset är relativt likt beviset av att en funktion med kontinuerliga partiella derivator är differentierbar och bygger på medelvärdessatsen (bevis i kursboken). Andra ordningens partiella derivator förekommer i många partiella differentialekvationer. En viktig sådan PDE är Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i } \mathbb{R}^2 \text{ respektive } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{i } \mathbb{R}^3$$

Lösningar $u(x, y)$ respektive $u(x, y, z)$ till Laplaces ekvation kallas för harmoniska funktioner. Laplaces ekvation används för att beskriva system i jämvikt. Givet att temperaturen på randen ∂D av en kropp ges av en känd funktion $f(x, y)$ så kommer temperaturen i kroppens inre $u(x, y)$ i jämvikt att vara lösningen till det så kallade Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, y) = f(x, y) \end{cases}$$

Exempel 26. Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ och anta att $u(x, y) = 1$ på $x^2 + y^2 = 1$ samt att $u(x, y) = 2 \ln(2)$ på $x^2 + y^2 = 4$.

Dirichletproblemet ovan har lösningen $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Vi ser direkt att randvillkoret är uppfyllt. Vidare gäller

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{1}{x^2 + y^2} 2x \\ u'_{xx} &= \frac{1}{x^2 + y^2} 2 + 2x(-1) \frac{1}{x^2 + y^2} 2x = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4}{x^2 + y^2} - 4 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Harmoniska funktioner har många intressanta egenskaper. Exempelvis antar harmoniska funktioner alltid maximum och minimum på randen av området (rimligt med tanke på temperaturtillämpningen). Vidare är medelvärdet av en harmonisk funktion på en omgivning $N(\vec{a}, \delta)$ eller på ytan $\partial N(\vec{a}, \delta)$ alltid lika med funktionsvärdet i punkten \vec{a} . Slutligen är alla begränsade harmoniska funktioner definierade på hela \mathbb{R}^n konstanta.

Föreläsning 11: Kedjeregeln

Den endimensionella kedjeregeln säger att $\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)$. Om vi inför beteckningarna $u = f(v)$, $v = g(t)$, så kan kedjeregeln också skrivas

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dt}, \quad g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Den endimensionella kedjeregeln kan också användas för partiell derivering av funktioner av typen $f(g(t_1, \dots, t_n))$, eftersom när vi deriverar partiellt, så fixerar vi alla variabler utom en. Alltså gäller, med $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$,

$$\frac{d}{dt_j}f(g(\vec{t})) = f'(g(\vec{t}))g'_j(\vec{t}) \quad \text{alternativt} \quad \frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad g(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Exempel 27. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u$ som har formen $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ (radiell symmetri).

Sätt $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Kedjeregeln ger nu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial z}$$

Vidare gäller:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}. \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \end{aligned} \quad (\text{av symmetriskäl})$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x f'(r) \frac{x}{r} + y f'(r) \frac{y}{r} + z f'(r) \frac{z}{r} = f'(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = r f'(r)$$

så differentialekvationen kan skrivas $r f'(r) = f(r)$, vilket är en separabel ordinär differentialekvation med lösningen

$$\int \frac{df}{f} = \int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln(f(r)) = \ln(r) + C \Rightarrow f(r) = e^{\ln(r)+C} = Dr$$

Betrakta nu en sammansatt funktion på formen $f(\vec{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$. Kedjeregeln har då följande utseende:

Sats 13. Låt f vara en differentierbar funktion på $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt g_1, \dots, g_n vara deriverbara funktioner på ett intervall (a, b) . Om $\vec{g}(t) \in D$ för alla $t \in (a, b)$, så är $f(\vec{g}(t))$ deriverbar på (a, b) och

$$\frac{d}{dt}f(\vec{g}(t)) = f'_1(\vec{g}(t))g'_1(t) + \dots + f'_n(\vec{g}(t))g'_n(t)$$

eller med $u = f(\vec{v})$, $\vec{v} = \vec{g}(t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial t}$$

Bevis. Vi undersöker gränsvärdet av differenskvoten $\frac{f(\vec{g}(t+k)) - f(\vec{g}(t))}{k}$. Eftersom f är differentierbar, så vet vi att

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x})h_i + |\vec{h}|\varphi(\vec{h}), \quad \text{där } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \varphi(\vec{h}) = 0$$

Sätt nu $\vec{x} = \vec{g}(t)$ och $\vec{h} = \vec{g}(t+k) - \vec{g}(t)$, så att $\vec{x} + \vec{h} = \vec{g}(t+k)$. Då får vi:

$$\underbrace{\frac{f(\vec{g}(t+k)) - f(\vec{g}(t))}{k}}_{\rightarrow \frac{d}{dt}f(\vec{g}(t))} = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x}) \frac{h_i}{k} + \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h}) = \sum_{i=1}^n f'_i(\vec{x}) \underbrace{\frac{g_i(t+k) - g_i(t)}{k}}_{\rightarrow g'_i(t)} + \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h})$$

Det återstår att visa att resttermen går mot noll då $k \rightarrow 0$. Då $k \rightarrow 0$ så går $\vec{h} \rightarrow 0$ (\vec{g}_i deriverbara och därmed kontinuerliga) och då även $\varphi(\vec{h}) \rightarrow 0$. Vidare gäller

$$\frac{|\vec{h}|}{k} = \frac{|\vec{g}(t+k) - \vec{g}(t)|}{k} \rightarrow |g'_1(t), \dots, g'_n(t)| = C, \quad \text{så } \frac{|\vec{h}|}{k} \varphi(\vec{h}) \rightarrow 0$$

□

Exempel 28. Bestäm $\frac{d}{dt}f(\vec{g}(t))$ för $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + \cos x_2$ och $\vec{g}(t) = (\sin(t), t^2, \ln(t^2 + 1))$.

Vi kan använda kedjeregeln och får då:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\vec{g}(t)) &= f'_1(\vec{g}(t))g'_1(t) + f'_2(\vec{g}(t))g'_2(t) + f'_3(\vec{g}(t))g'_3(t) \\ &= [f'_1(\vec{x}) = x_3, \quad f'_2(\vec{x}) = -\sin x_2, \quad f'_3(\vec{x}) = x_1] \\ &= \ln(t^2 + 1) \cos(t) + (-\sin(t^2))2t + \sin(t) \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

Vi kan också bestämma den sammansatta funktionen $f(\vec{g}(t))$ och derivera den som en funktion av en variabel:

$$\begin{aligned} f(\vec{g}(t)) &= (\sin(t)) \ln(t^2 + 1) + \cos(t^2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}f(\vec{g}(t)) &= \cos(t) \ln(t^2 + 1) + \sin(t) \frac{2t}{t^2 + 1} - 2t \sin(t^2) \end{aligned}$$

I exemplet ovan var det mer invecklat att använda kedjeregeln. Med hjälp av kedjeregeln kan vi dock lösa vissa problem utan att känna till båda funktionerna f och $\vec{g}(t)$ explicit.

Exempel 29. Låt $f(x, y)$ vara en differentierbar funktion som löser differentialekvationen $x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}$ i första kvadranten. Visa att f är konstant på alla hyperbler $xy = c$ i första kvadranten.

I detta fall känner vi inte f explicit, utan vet bara att f löser en viss differentialekvation. Vi vill veta f på alla kurvor $y = \frac{c}{x}$, $x > 0$ och sätter därför $f\left(x, \frac{c}{x}\right)$. Kedjeregeln ger:

$$\frac{d}{dx} f\left(x, \frac{c}{x}\right) = f'_1\left(x, \frac{c}{x}\right) * 1 + f'_2\left(x, \frac{c}{x}\right) \left(-\frac{c}{x^2}\right) = \frac{1}{x} \left(x f'_1\left(x, \frac{c}{x}\right) - \frac{c}{x} f'_2\left(x, \frac{c}{x}\right)\right)$$

Den givna differentialekvationen ger nu att $x f'_1(x, y) - y f'_2(x, y) = 0$, vilket för $y = \frac{c}{x}$ ger att parametern i uttrycket ovan är noll. Därmed följer att $\frac{d}{dt} f\left(x, \frac{c}{x}\right) = 0$ och f är konstant längs $y = \frac{c}{x}$

Den mest generella kedjeregeln får vi när $\vec{g}(t)$ är en vektorvärd funktion av n variabler, dvs. $\vec{g}(\vec{t}) = (g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_p(t_1, \dots, t_n))$. Genom att kombinera de båda föregående varianterna av kedjeregeln får vi:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\vec{g}(\vec{t})) = f'_1(\vec{g}(\vec{t})) \frac{\partial g_1}{\partial t_j} + \dots + f'_p(\vec{g}(\vec{t})) \frac{\partial g_p}{\partial t_j} \quad \text{för } j \in \{1, \dots, n\}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

eller med $u = f(\vec{v})$, $\vec{v} = \vec{g}(\vec{t})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_p} \frac{\partial v_p}{\partial t_j}$$

Så fort som den inre funktionen är vektorvärd får vi i kedjeregeln en summa med lika många termer som dimensionen på de inre funktionen. Ibland kan beroendet mellan variablerna vara mer invecklat som i nästa exempel.

Exempel 30. Låt $f(x, y, v)$, där $x = g(u, v)$ och $y = h(u, v)$, så att f har ett direkt beroende av variabeln v och två indirekta beroenden av variabeln u (via funktionerna g och h). Bestäm $\frac{\partial}{\partial v} f(x, y, v)$

Kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial}{\partial v} f(x, y, v) = f'_1(x, y, v) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{g'_2(u, v)} + f'_2(x, y, v) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{h'_2(u, v)} + f'_3(x, y, v)$$

Den generella kedjeregeln är ofta anfändbar för att avgöra hur olika partiella derivator förändras när man byter variabler. Exempelvis an man visa att Laplaces ekvation i två dimensioner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ i polära koordinater är } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

(vilket direkt ger att $2 \ln(r)$ är harmonisk).

Föreläsning 12: Gradient och riktningsderivata

De partiella derivatorna säger att var för sig hur en funktion av n variabler förändras längs en rät linje parallell med någon av koordinataxlarna. Vi vill kunna avgöra hur en funktion förändras längs en godtycklig rät linje, dvs. i en godtycklig riktning. Följande vektor visar sig då vara användbar.

Definition 19. För partiellt deriverbara funktioner f av n variabler definierar vi gradienten av f i punkten \vec{x} som

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) \quad (\text{betecknas även } \nabla f(\vec{x}))$$

Gradienten är ett vektorfält (en funktion från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^n)

Exempel 31. Beräkna $\nabla f(\vec{x})$ för $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

De partiella derivatorna är:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{|\vec{x}|} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{|\vec{x}|} \end{aligned} \quad (\text{av symmetriskäl})$$

Så gradienten blir:

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{x_1}{|\vec{x}|}, \frac{x_2}{|\vec{x}|} \right) = \frac{1}{|\vec{x}|}(x_1, x_2) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Nivåkurvorna till funktionen i exemplet är cirklar med centrum i origo. Gradienten till funktionen är alltså vinkelrät mot funktionens nivåkurvor. Detta gäller allmänt för funktioner av två variabler.

Sats 14. Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator. Om $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, så är $\nabla f(a, b)$ vinkelrät mot den nivåkurva till f som går genom (a, b)

Bevis. Låt $(x(t), y(t))$ vara en parametrisering av nivåkurvorna till f som går genom (a, b) och antag att $x(0) = a$, $y(0) = b$. För alla t nära noll är alltså $f(x(t), y(t)) = f(a, b)$. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f'_1(x(t), y(t))x'(t) + f'_2(x(t), y(t))y'(t) \\ &\Rightarrow \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0. \end{aligned}$$

Vektorn $(x'(t), y'(t))$ är en tangent till nivåkurvorna, så gradienten måste vara vinkelrät mot nivåkurvan. \square

På samma sätt kan man visa att gradienten till en funktion av tre variabler är vinkelrät mot funktionens nivåytor. Med ett liknande resonemang kan vi också visa att om gradienten av en funktion men n variabler är noll i ett område så är funktionen konstant på området (jämför att om derivatan av en funktion av en variabel är noll så är funktionen konstant). Låt D vara ett bågvis sammanhängande område och antag att $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ för alla $\vec{x} \in D$. Då finns det, för varje par av punkter $\vec{a}, \vec{b} \in D$, en deriverbar kurva $\vec{x}(t)$, sådan att $\vec{x}(0) = \vec{a}$ och $\vec{x}(1) = \vec{b}$. Därmed gäller:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\vec{x}(t)) &= f'_1(\vec{x}(t))x'_1(t) + \dots + f'_n(\vec{x}(t))x'_n(t) \\ &= \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot (\vec{x}'_1(t), \dots, \vec{x}'_n(t)) = 0 \end{aligned}$$

Vilket implicerar:

1. $f(\vec{x})$ är konstant
2. $f(\vec{a}) = f(\vec{b}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in D$

Gradienten kan också användas för att bestämma hur en funktion förändras längs en godtycklig rät linje $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ (och inte bara längs koordinataxlarna). Vi antar att $|\vec{v}| = 1$, dvs att linkens riktningsvektor är normerad.

Definition 20. Derivatan av funktionen f i punkten \vec{a} i riktningen \vec{v} , $|\vec{v}| = 1$, definieras

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} \quad (\vec{v} = \vec{e}_j \text{ ger } f'_j(\vec{a}))$$

Sats 15. Om f är en differentierbar funktion och $\vec{v}, |\vec{v}| = 1$ en given riktning, så är $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$

Bevis. Sätt $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{v})$, så att φ beskriver f :s beteende kring linjen $\vec{a} + t\vec{v}$. Vi ser att

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

Samtidigt ger kedjeregeln:

$$\varphi'(t) = f'_1(\vec{a} + t\vec{v})v_1 + \dots + f'_n(\vec{a} + t\vec{v})v_n = \nabla f(\vec{a} + t\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

□

Ansätter vi $t = 0$ i ovanstående formel, så följer $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$. Använder vi Cauchy-Schwarz olikhet på formeln för $f'_{\vec{v}}(\vec{a})$, så får vi:

$$|f'_{\vec{v}}(\vec{a})| = |\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}| \leq |\nabla f(\vec{a})||\vec{v}| = |\nabla f(\vec{a})|$$

med likhet precis så \vec{v} och $\nabla f(\vec{a})$ är riktade åt samma håll. Riktningderivatan blir alltså som störst i gradientens riktning. Vi kan dra följande slutsatser:

- En funktion växer snabbast i riktningen $\nabla f(\vec{a})$ och tillväxten är i denna riktning $|\nabla f(\vec{a})|$.
- En funktion avtar snabbast i riktningen $-\nabla f$ och avtagandet är i denna riktning $|\nabla f(\vec{a})|$.

Exempel 32. Antag att funktionen $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$ beskriver temperaturen i ett område i rummet. Antag att vi befinner oss i punkten $(1, 1, 1)$. Hur förändras temperaturen då i riktningen $(1, 1, 1)$? I vilken riktning förändras temperaturen snabbast och hur stor är temperaturförändringen i denna riktning?

Vi deriverar funktionen partiellt för att bestämma gradienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2(-(x^2 + y^2)^{-2}2x) = -\frac{2xz^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2yz^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 1, 1) = \left(-\frac{2 * 1 * 1^2}{(1^2 + 1^2)^2}, -\frac{2 * 1 * 1^2}{(1^2 + 1^2)^2}, \frac{2 * 1}{1^2 + 1^2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Vektorn $(1, 1, 1)$ kan normeras till $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Riktningensderivatan i denna riktning är

$$\begin{aligned} f'_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}(1, 1, 1) &= \nabla f(1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} * 1 - \frac{1}{2} * 1 + 1 * 1\right) = 0 \end{aligned}$$

så temperaturen förändras ej i denna riktning. Den maximala temperaturförändringen sker i gradientens riktning, dvs. i riktningen $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Storleken av denna tillväxt är

$$\begin{aligned} |\nabla f(1, 1, 1)| &= \left| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Läs i kursboken om relationen mellan gradienten och tangentplan.

Föreläsning 13: Inversa- och Implicita funktionsatsen

Vi såg i förra kapitlet att gradienten spelade samma roll för funktioner av flera variabler som derivatan för funktioner av en variabel. Motsvarande för en vektorvärd funktion

$$\vec{y} = f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{är Jacobimatrisen } D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen är en $m \times n$ -matris där j :te raden i $D\vec{f}(\vec{x})$ är $\nabla f_j(\vec{x})$. Med hjälp av Jacobimatrisen kan kedjeregeln för en sammansatt funktion uttryckas med hjälp av en matrismultiplikation. Låt $\vec{x} = \vec{g}(\vec{t}) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, och $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, så

$$D\vec{g}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_q} \end{pmatrix}, \quad D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t}) = \underbrace{D\vec{f}(\vec{g}(\vec{t})) D\vec{g}(\vec{t})}_{\text{Matrismultiplikation}}$$

$(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t})$ är en funktion från \mathbb{R}^q till \mathbb{R}^m . Enligt kedjeregeln är $\frac{\partial}{\partial t_j} (\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t})$

$$\frac{\partial}{\partial t_j} (\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t}) = \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_1} \frac{\partial g_1(\vec{t})}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{t}))}{\partial x_n} \frac{\partial g_n(\vec{t})}{\partial t_j}$$

och detta är precis resultatet på rad i och kolonn j i matrismultiplikationen ovan.

Exempel 33. Bestäm Jacobimatrisen till avbildningen $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$

Eftersom

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos(\theta) \end{aligned} \quad \text{får vi Jacobimatrisen } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Betrakta nu en funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (som i ovanstående exempel). För linjära avbildningar $\vec{y} = A\vec{x}$ vet vi från den linjära algebran att viktiga egenskaper hos avbildningen kan härledas från determinanten av matrisen A . Vi ska nu se att determinanten av Jacobimatrisen kan ge viktig information om de *lokala* egenskaperna hos en funktion \vec{f} . Låt för enkelhetens skull $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pondera en rektangel vars hörn ligger i

$$(a_1, a_2), \quad (a_1 + h_1, a_2), \quad (a_1, a_2 + h_2) \text{ och } (a_1 + h_1, a_2 + h_2).$$

Arean som innesluts av denna rektangel är $h_1 h_2$. f ordnar rektangelns hörn enligt följande:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) \\ f_2(a_1, a_2) \end{pmatrix} \\ (a_1 + h_1, a_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1 + h_1, a_2) \\ f_2(a_1 + h_1, a_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 \\ f_2(a_1, a_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 \end{pmatrix} \\ (a_1, a_2 + h_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2 + h_2) \\ f_2(a_1, a_2 + h_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 \\ f_2(a_1, a_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 \end{pmatrix} \\ \text{Area} &\approx \begin{vmatrix} h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = h_1 h_2 \left| D\vec{f}(\vec{x}) \right| \end{aligned}$$

så areaförstoringen av en avbildning är $\det(D\vec{f}(\vec{x}))$ (jämför med $\det(A)$ för linjära avbildningar).

Definition 21. Determinanten av Jacobimatrisen för en funktion $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas Jacobianen av \vec{f} och betecknas $\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ eller ibland bara $J(\vec{x})$

En linjär avbildning $\vec{y} = A\vec{x}$ är inverterbar om determinanten av matrisen A är nollskild. På liknande sätt gäller följande lokala sats för funktioner.

Sats 16. Inversa funktionssatsen. Låt $\vec{f} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till punkten $\vec{a} \in D(\vec{f})$. Om $J(\vec{a}) \neq 0$, så finns öppna omgivningar U och V till \vec{a} respektive $\vec{f}(\vec{a})$ så att funktionen $\vec{f}(\vec{x})$ är inverterbar på U och inversen $\vec{f}^{-1}(\vec{x})$ har kontinuerliga partiella derivator på V .

Inversa funktionssatsen säkerställer bara att inversen existerar lokalt, även om Jacobianen är nollskild på hela definitionsmängden.

Exempel 34. För avbildningen $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$ som vi för tillfället definierar på $0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{5\pi}{2}$, så gäller:

$$\begin{aligned} J(\vec{x}) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(-r \sin(\theta)) = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) \\ &= r \neq 0 \end{aligned}$$

på hela definitionsmängden. Inversa funktionssatsen säkerställer existens av en lokal invers, men ingen global invers eftersom $(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi)$.

Observera att identitetsavbildningen har enhetsmatrisen som Jacobimatrix och därmed Jacobian 1. Alltså gäller:

$$1 = \det(D(\vec{f}^{-1} \circ \vec{f})(\vec{x})) \stackrel{\text{kedjeregeln}}{=} \det(D\vec{f}^{-1}(\vec{y})D\vec{f}(\vec{x})) \stackrel{\text{produktregeln för determinanter}}{=} (\det D\vec{f}^{-1}(\vec{y}))(\det D\vec{f}(\vec{x}))$$

så inversens Jacobian är det inverterade värdet av funktionens Jacobian. Vi såg i kursen envariabelanalys att det finns funktioner $F(x, y) = 0$ för vilka vi inte explicit kan lösa ut y som en funktion av x . Ett exempel på detta är $x^2 + y^2 = 1$. För de flesta punkter (x, y) på kurvan kan vi dock lösa ut y som funktion av x lokalt. För alla punkter på kurvan som uppfyller $y > 0$ gäller ju $y = \sqrt{1 - x^2}$ i en omgivning av punkten och för alla punkter som uppfyller $y < 0$ gäller $y = -\sqrt{1 - x^2}$ i en omgivning. I punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 0)$ kan vi inte ens lokalt skriva y som funktion av x eftersom kurvan här är helt lodrät (dock kan vi skriva x som funktion av y). Gemensamt för båda dessa punkter är att $F'_2(a, b) = 2b = 0$ i dessa punkter. Vi har därmed resonerat oss fram till ett specialfall av implicita funktionssatsen.

Sats 17. Implicita funktionssatsen. Betrakta följande ekvationssystem

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \quad \text{och en punkt } P = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \text{ som uppfyller ekvationssystemet. Antag att funktionerna } F_i \text{ har kontinuerliga partiella derivator nära } P \text{ och antag vidare att } \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \text{ är nollskild i punkten } P.$$

Då kan vi lösa ut y_1, \dots, y_n som funktioner av x_1, \dots, x_m , dvs. $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_m)$ i en omgivning till punkten (b_1, \dots, b_m)

Exempel 35. Betrakta ekvationssystemet $\begin{cases} \sin(x + y) + \sin(y + z) + 2 = 0 \\ \cos(x + y) + \cos(y + z) + y - 2 = 0 \end{cases}$ med två ekvationer och tre variabler. Systemet satisfieras av punkten $(0, 0, 0)$. Kan x och y lösas ut explicit som funktion av z ?

Enligt Implicita funktionssatsen bör vi undersöka Jacobianen $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}$ i $(0, 0, 0)$ och beräknar därför de partiella derivatorna

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \cos(x + y), & \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \cos(x + y) + \cos(y + z), \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= -\sin(x + y), & \frac{\partial F_2}{\partial y} &= -\sin(x + y) - \sin(y + z) + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \Big|_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Det finns alltså funktioner f_1 och f_2 sådana att $x = f_1(z)$ och $y = f_2(z)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 0)$. För att bestämma derivatorna av funktionerna f_1 och f_2 kan vi derivera

ekvationssystemet implicit:

$$\begin{cases} \cos(x+y) \left(\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dz} \right) + \cos(y+z) \left(\frac{dy}{dz} + 1 \right) + 1 = 0 \\ -\sin(x+y) \left(\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dz} \right) - \sin(y+z) \left(\frac{dy}{dz} + 1 \right) + \frac{dy}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dz} + 2\frac{dy}{dz} + 2 = 0 \\ \frac{dy}{dz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dz} = -2 \\ \frac{dy}{dz} = 0 \end{cases}$$

Vi hade lika gärna kunnat lösa ut x och z som funktion av y .

Föreläsning 14

Taylorapproximationer

För differentierbara funktioner av n variabler vet vi att $f(\vec{a} + \vec{h}) \approx f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}$. För att erhålla en bättre uppskattning av f nära punkten \vec{a} behöver vi härleda en flerdimensionell motvarighet till Taylors formel.

Låt, för enkelhetens skull, f vara en funktion av två variabler. Vi vill härleda en approximation av $f(a+h, b+k)$ och beräkna den endimensionella funktionen $F(t) = f(a+th, b+tk)$, $t \in [0, 1]$.

Kedjeregeln ger:

$$\begin{aligned} F'(t) &= hf'_1(a+th, b+tk) + kf'_2(a+th, b+tk) \\ F''(t) &= h^2 f''_{11}(a+th, b+tk) + 2hk f''_{12}(a+th, b+tk) + k^2 f''_{22}(a+th, b+tk) \end{aligned}$$

osv.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F'(0) &= hf'_1(a, b) + kf'_2(a, b) \\ F''(0) &= h^2 f''_{11}(a, b) + 2hk f''_{12}(a, b) + k^2 f''_{22}(a, b) \end{aligned}$$

Men eftersom F är endimensionell ger Taylors formel samtidigt

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= F(1) = F(0) + F'(0) * 1 + \frac{F''(0)}{2!} * 1^2 + \dots \\ &= \underbrace{f(a, b)}_{f(\vec{a})} + \underbrace{f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k}_{\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f''_{11}(a, b)h^2 + 2f''_{12}(a, b)hk + f''_{22}(a, b)k^2)}_{\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}} + \dots \end{aligned}$$

där $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är Hessianmatrisen $\begin{pmatrix} f''_{11}(a, b) & f''_{12}(a, b) \\ f''_{21}(a, b) & f''_{22}(a, b) \end{pmatrix}$ (notera att $f''_{12} = f''_{21}$). Vi har härlett Taylorpolynomet av ordning två. Notera att resttermen har storleksordningen $\mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2})$, eftersom h^3 , h^2k , hk^2 och k^3 alla är uppåt begränsade av $(h^2 + k^2)^{3/2}$.

Exempel 36. Bestäm Taylorpolynomet av ordning två till $f(x, y) = e^{xy} + x^2 + 2xy^3 + 3y$ kring punkten $(2, 0)$. Partiell derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_x &= ye^{xy} + 2x + 2y^3 & f''_{xx} &= y^2e^{xy} + 2 & f(2, 0) &= 5 & f''_{xx}(2, 0) &= 2 \\ f'_y &= xe^{xy} + 6xy + 3 & f''_{xy} &= (xy + 1)e^{xy} + 6y^2 \Rightarrow & f'_x(2, 0) &= 4 & f''_{xy}(2, 0) &= 1 \\ & & f''_{yy} &= x^2e^{xy} + 12xy & f'_y(2, 0) &= 5 & f''_{yy}(2, 0) &= 4 \end{aligned}$$

Taylorutvecklingen av ordning två blir därmed:

$$f(2 + h, k) = 5 + 4h + 5k + \frac{1}{2}(2h^2 + 2hk + 4k^2)$$

Extremvärden

Precis som för funktioner av en variabel är det ofta intressant att veta största och minsta värde för en funktion av n variabler. Vi börjar med att studera lokala extremvärden.

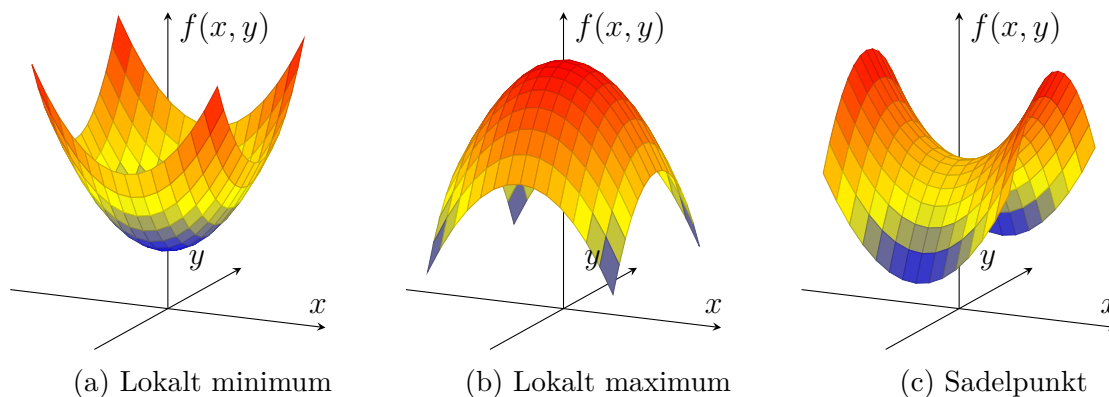
Definition 22. En funktion av n variabler sägs ha ett lokalt maximum i \vec{a} om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ för alla \vec{x} så att $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$.

I analogi med situationen för funktioner av en variabel är det lätt att visa att om f är partiellt deriverbar så är $f'_j(\vec{a}) = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$ i alla punkter \vec{a} där f' har lokala maxima eller minima.

Definition 23. En punkt \vec{a} där $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ kallas en kritisk punkt till f .

Eftersom alla lokala extrempunkter \vec{a} till f , i vilka f är partiellt deriverbar också är kritiska punkter, så kan lokala extrempunkter bara inträffa i kritiska punkter, singulara punkter (∇f existerar ej) och randpunkter till $D(f)$. Jämför situationen i envariabelanalysen.

Det är inte säkert att en kritisk punkt är en lokal extrempunkt. Allmänt kan en funktion ha tre typer av utseende kring en kritisk punkt.



Med hjälp av Taylorapproximationen av en funktion ska vi ta fram en metod för att konkretisera kritiska punkter.

Låt f vara en funktion av n variabler med en kritisk punkt i \vec{a} .

$$\text{Lokalt minimum i } \vec{a} \Rightarrow f(\vec{a} + \vec{h}) \geq 0 \text{ för alla } \vec{h} \text{ så att } |\vec{h}| < \delta$$

$$\text{Lokalt maximum i } \vec{a} \Rightarrow f(\vec{a} + \vec{h}) \leq 0 \text{ för alla } \vec{h} \text{ så att } |\vec{h}| < \delta$$

$$\text{Sadelpunkt i } \vec{a} \Rightarrow f(\vec{a} + \vec{h}) \text{ antar både positiva och negativa värden oavsett hur litet vi väljer } \vec{h}.$$

Taylorutveckling av f kring \vec{a} ger

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \underbrace{\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}}_{=0, \text{ om } f \text{ har en kritisk punkt i } \vec{a}} + \vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h} + \mathcal{O}(|\vec{h}|^3)$$

Tillräckligt nära origo är $\mathcal{O}(|\vec{h}|^3)$ obetydlig jämfört med $\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}$, som har storleksordning $\mathcal{O}(|\vec{h}|^2)$, så beteendet hos $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$ bestäms av beteendet hos $\vec{h}^T \mathcal{H}_f(\vec{a}) \vec{h}$ (för rigoröst bevis, se kursboken).

Definition 24. En $n \times n$ -matris A sägs vara positivt definit om $\vec{h}^T A \vec{h} > 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, positivt semidefinit om $\vec{h}^T A \vec{h} \geq 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ och indefinit om $\vec{h}^T A \vec{h}$ antar både positiva och negativa värden.

Genom att kombinera definitionen ovan med Taylorutvecklingen och diskussionen om tecknet på $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$, så ser vi tämligen direkt att:

Sats 18. Antag att \vec{a} är en kritisk punkt till f och att Hessianmatrisen $\mathcal{H}_f(\vec{x})$ är kontinuerlig i en omgivning till \vec{a} . Då gäller

1. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är positivt definit, så har f ett lokalt minimum i \vec{a} .
2. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är negativt definit, så har f ett lokalt maximum i \vec{a} .
3. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är indefinit, så har f en sadelpunkt i \vec{a} .
4. Om $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ är positivt eller negativt semidefinit, så kan f ha lokalt maximum, minimum, eller en sadelpunkt i \vec{a} .

Slutsatsen i fjärde fallet följer av att resttermen i Taylorutvecklingen för semidefinita $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ kommer bestämma tecknet på $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})$.

Exempel 37. Karaktärisera de kritiska punkterna $(0,0)$ och $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$ till funktionen $f(x, y) = 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3$.

Partiell derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= 6x + 3y \\ f'_2(x, y) &= 3x + 2y + 3y^2 \end{aligned} \quad (\text{och vi ser att de givna punkterna faktiskt är kritiska})$$

$$\begin{aligned} f''_{11} &= 6 \\ f''_{12} &= 3 \\ f''_{22} &= 2 + 6y \end{aligned}$$

Så Hessianmatrisen blir, i de kritiska punkterna:

$$\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f(0, 0) \vec{h} = 6h^2 + 6hk + 2k^2 \vec{h} = 6\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{2}$$

vilket endast antar positiva värden, och är således ett lokalt minimum

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}^T \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) \vec{h} = 6h^2 + 6hk + k^2 = 6\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - k^2$$

vilket antar både positiva och negativa värden, och är således en sadelpunkt.

Föreläsning 15

Extremvärden (forts.)

Vi börjar med att repetera metodiken från förra kapitlet med ett exempel.

Exempel 38. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = xy - x^2y - y^2$ och klassificera dessa.

Vi deriverar funktionen partiellt för att hitta de kritiska punkterna.

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= y - 2xy \\ f'_2(x, y) &= x - x^2 - 2y \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y - 2xy = 0 \\ x - x^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger $y = 0$ eller $1 - 2x = 0$

$$y = 0 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{kritiska punkter } (0, 0) \text{ och } (1, 0)$$

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{kritisk punkt i } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$$

Vi deriverar funktionen igen för att bestämma Hessianmatrisen.

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= -2y \\ f''_{12}(x, y) &= 1 - 2x \\ f''_{22}(x, y) &= -2 \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x \\ 1 - 2x & -2 \end{pmatrix}$$

I de kritiska punkterna får vi:

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi undersöker motsvarande kvadratiska former:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} &\Rightarrow 2hk - 2k^2 = -2\left(k - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2} && \text{(indefinit, alltså sadelpunkt)} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} &\Rightarrow -2hk - 2k^2 = -2\left(k + \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2} && \text{(indefinit, alltså sadelpunkt)} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} &\Rightarrow -\frac{h^2}{4} - k^2 && \text{(negativt definit, alltså lokalt maximum)} \end{aligned}$$

Om den kvadratiska formen är semidefinit för en kritisk punkt så kan den kritiska punkten konkretiseras genom studie av funktionsuttrycket eller Taylorutveckling av högre ordning kring punkten. För funktioner av en variabel gäller att om funktionen f har ett lokalt minimum i $x = a$ och inga andra kritiska eller singulära punkter så har f globalt maximum i $x = a$. Som följande exempel visar kan vi inte dra den slutsatsen för funktioner av flera variabler.

Exempel 39. Undersök de kritiska punkterna till $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$ och se om funktionen har ett globalt minimum.

Partiell derivering ger först:

$$f'_1(x, y) = 2x(1 + y)^3 = 0, \quad f'_2(x, y) = 2x^2(1 + y)^2 + 2y = 0$$

Den första ekvationen ger $x = 0$ eller $y = -1$, vilket insatt i den andra ekvationen ger den enda kritiska punkten $(0, 0)$. Vidare gäller

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= 2(1 + y)^3|_{(0,0)} && = 2 \\ f''_{12}(x, y) &= 6x(1 + y)^2|_{(0,0)} && = 0 \\ f''_{22}(x, y) &= 6x^2(1 + y) + 2|_{(0,0)} && = 2 \end{aligned}$$

så den kvadratiska formen för Hessianmatrisen är $2h^2 + 2k^2$, vilket motsvarar ett lokalt minimum 0. Funktionen har dock inget minsta värde. Längs den räta linjen $x = 1$ är

$$f(1, y) = (1 + y)^3 + y^2 \quad \text{vilket går mot } -\infty \text{ då } y \rightarrow -\infty.$$

Funktionen antar hur stora negativa värden som helst.

Om vi för en funktion $f(x, y)$ kan visa att $|f(x, y)| < L$ för alla $x^2 + y^2 > R$ så kan man dock dra slutsatsen att om m är det minsta lokala extremvärdet och $m < -L$ så har f globalt minimum m .

Extremvärden för funktioner på kompakta områden

För kontinuerliga funktioner av flera variabler som är definierade på ett kompakt (begränsat och slutet) område gäller, precis som i envariabelanalysen (satsen om extremvärden) att funktionen har ett maximum och ett minimum. Vi ska därför ta fram en metod för att bestämma dessa globala extremvärden.

Exempel 40. Bestäm största och minsta värde för $f(x, y) = xy^2 - x - y$ i kvadraten $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

1. Inre punkter. Vi undersöker om funktionen har några kritiska punkter i D° och deriverar partiellt:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) = y^2 - 1 = 0 & \Rightarrow y = \pm 1 \\ f'_2(x, y) = 2xy - 1 = 0 & \Rightarrow x = \frac{1}{2y} \end{aligned} \quad (\text{kritiska punkter } (\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -1))$$

Endast den första av de kritiska punkterna ligger inom definitionsmängden.

2. Rand. Vi parametriserar de fyra randbitarna och undersöker om f har några kritiska punkter på dessa.

$$\begin{aligned} g(x) = f(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ ger } g(x) = -x & \quad (\text{inga kritiska punkter}) \\ g(x) = f(x, 2), \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ ger } g(x) = 3x - 2 & \quad (\text{inga kritiska punkter}) \\ g(y) = f(0, y), \quad 0 \leq y \leq 2 \text{ ger } g(y) = -y & \quad (\text{inga kritiska punkter}) \\ g(y) = f(2, y), \quad 0 \leq y \leq 2 \text{ ger } g(y) = 2y^2 - 2 - y & \quad (\text{kritisk punkt i } (2, \frac{1}{4})) \end{aligned}$$

så på randen har vi bara den kritiska punkten $(2, \frac{1}{4})$

3. Hörn. Randstyckena har ändpunkter i hörnen $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$.

Vi undersöker slutligen funktionsvärdena i de sex punkter där maximum eller minimum kan inträffa.

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 2) = -2, \quad f(2, 0) = -2, \quad f(2, 2) = 4, \quad f(2, 2) = 4, \quad f(2, \frac{1}{4}) = -\frac{17}{8}$$

Vilket ger oss ett maximum 4, och ett minimum $-\frac{17}{8}$.

Vi hittar alltså eventuella extrempunkter i det inre genom att undersöka de kritiska punkterna som tidigare. Kritiska punkter på randen fås genom att vi parametriserar randen och betraktar funktionen på randen som en funktion av en variabel (parametern). Om vi hade velat hitta maximum och minimum till funktionen i exemplet ovan på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$, så hade vi fått använda parametriseringen

$$g(\theta) = f(2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

vilket ger

$$g(\theta) = 8 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 2 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta)$$

och sedan satt derivatan av g till noll och löst ut θ . "Hörnet" i detta fall hade varit $(2 \cos(0), 2 \sin(0)) = (2, 0)$.

Om en funktion f av flera variabler är definierad på ett icke-kompakt område är det inte säkert att den har ett största eller minsta värde, utan detta måste motiveras på något sätt.

Exempel 41. Avgör om funktionen $f(x, y) = \frac{4x - 3}{1 + x^2 + y^2}$ har ett maximum och ett minimum på området $-1 \leq y \leq 1$.

Om funktionen är begränsad får stora värden på $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, så kommer eventuella maximum eller minimum att finnas på den kompakta mängden $-1 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \leq r$ och på denna har varje kontinuerlig funktion maximum och minimum

$$|f(x, y)| = \frac{|4x - 3|}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{|4x| + 3}{1 + r^2} \leq \frac{4r + 3}{1 + r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Detta implicerar att f är begränsad för stora r , och följdaktligen att f har maximum och minimum.

Föreläsning 16: Lagrangemultiplikatorer

Vi ska i detta kapitel studera problemet att maximera eller minimera en funktion under ett eller flera bivillkor. Ett typexempel är:

$$\text{maximera } f(x, y) \quad \text{givet att } g(x, y) = C.$$

Bivillkoret $g(x, y) = C$ definierar en kurva i planet. Vi börjar med ett exempel där det, för kurvan $g(x, y) = C$, är lätt att lösa ut y som en funktion av x . Problemet blir då genast endimensionellt.

Exempel 42. Bestäm det kortaste anståndet från origo till kurvan $xy = 1, \quad x, y > 0$

Vi vill minimera $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, eller ekvivalent $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $xy = 1$. Villkoret kan skrivas $y = \frac{1}{x}$, så vi vill alltså minimera

$$g(x) = f(x, \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (\text{för } x > 0)$$

$$g'(x) = 2x - 2x^{-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(1 - \frac{1}{x^4}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

notera att de två första möjliga värdena på x ej uppfyller initialvillkoret $x, y > 0$.

I $x = 1$ får vi avståndet $\sqrt{1^2 + (\frac{1}{1})^2} = \sqrt{2}$ och det är det kortaste avståndet eftersom $g''(1) = 2 + \frac{6}{1^4} = 8 > 0$.

Ett alternativ som kan vara användbart om det inte går att lösa ut y som en funktion av x i $g(x, y) = C$ är att använda en parametrisering av $g(x, y) = C$. Om vi exempelvis vill maximera $f(x, y) = (2x + 3y + 1)^2$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ kan vi sätta $x = \cos(t)$ och $y = \sin(t)$ och istället försöka maximera $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Detta envariabelproblem liknar de vi stötte på när vi sökte extremvärden till randen av kompakta områden. Räkningarna blir dock ganska invecklade, så vi ska ta fram en mer generell metod som ger enklare räkningar.

Antag att vi på något sätt vet att $f(x, y)$ har ett maximum på kurvan $g(x, y) = 0$. Om maximumet inträffar i punkten (a, b) och $\nabla g(a, b) \neq 0$, så kan kurvan nära (a, b) parametriseras som $(x(t), y(t))$ med $(x(0), y(0)) = (a, b)$ (följer av implicita funktionsatsen). Funktionen $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ har då maximum i $t = 0$, så

$$0 = \varphi'(0) = f'_1(x(0), y(0))x'(0) + f'_2(x(0), y(0))y'(0) = \nabla f(a, b) - (x'(0), y'(0))$$

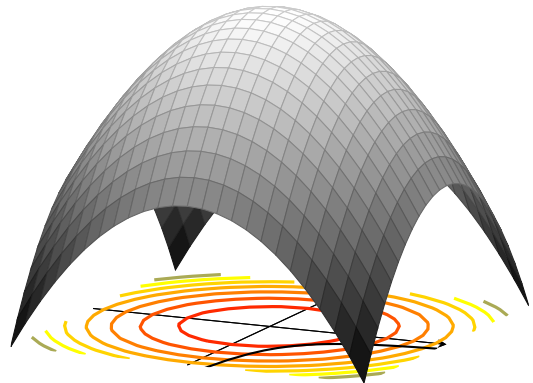
Men $(x'(0), y'(0))$ är tangentvektorn till kurvan $g(x, y) = 0$ i (a, b) . Denna vektor är vinkelrät mot $\nabla g(a, b)$, så enligt ekvationen ovan så är

$$\nabla f(a, b) \text{ och } \nabla g(a, b) \text{ parallella} \iff \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b).$$

Maximum (minimum) av $f(x, y)$ givet att $g(x, y) = 0$ kan alltså inträffa i följande punkter:

1. Ändpunkter till $g(x, y) = 0$
2. Punkter där $\nabla g(x, y) = \vec{0}$ (eller ej existerar)
3. Punkter som uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = \lambda g'_1(x, y) \\ f'_2(x, y) = \lambda g'_2(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$



Ekvationssystemet kan också skrivas kortfattat som $\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \vec{0}$ där $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ kallas för Lagrangefunktionen.

I figuren ovan ser vi paraboloiden som ges av $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 9$ med tillhörande nivåkurvor projicerade på xy -planet. Vi ser även funktionen $g(x, y)$ (svart) som tangerar en av nivåkurvorna.

Exempel 43. Maximera och minimera $f(x, y) = (2x + 3y + 1)^2$ för $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Eftersom enhetscirkeln är en sluten kurva med nollskild gradient, så uppfyller alla ex-

trempunkter ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = \lambda g'_1(x, y) \\ f'_2(x, y) = \lambda g'_2(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2x + 3y + 1)2 = \lambda 2x \\ 2(2x + 3y + 1)3 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dividerar vi andra ekvationen med den första får vi ekvationen

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = \frac{3}{2}x &\Rightarrow x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 1 = 0 &\Rightarrow \frac{13}{4}x^2 = 1 \\ \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} &\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) &\text{eller} &\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right). \end{aligned}$$

Ekvationssystemet har alltså lösningen $\lambda = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$. För denna lösning gäller uppenbarligen $f(x, y) = 0$. De övriga funktionsvärdena är $f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) = (\sqrt{13} + 1)^2$ och $f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = (-\sqrt{13} + 1)^2$, så maximum är $(\sqrt{13} + 1)^2$ och minimum är 0.

Lagranges multiplikator metod fungerar på samma sätt om vi vill maximera funktionen $f(x, y, z)$ på ytan $g(x, y, z) = 0$. Vi får då istället ett ekvationssystem med 4 ekvationer och 4 variabler.

$$\begin{cases} f'_1(x, y, z) = \lambda g'_1(x, y, z) \\ f'_2(x, y, z) = \lambda g'_2(x, y, z) \\ f'_3(x, y, z) = \lambda g'_3(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Låt oss härnäst undersöka problemet att maximera $f(x, y, z)$ givet två villkor $g(x, y, z) = 0$ och $h(x, y, z) = 0$. De båda villkoren definierar en kurva i rummet. I varje punkt (x, y, z) på kurvan är både $\nabla g(x, y, z)$ och $\nabla h(x, y, z)$ vinkelrät mot kurvan, så vektorn $T(x, y, z) = \nabla g(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z)$ är parallell med kurvans tangent i (x, y, z) . Enligt resonemanget när vi införde multiplikator metoden, så måste det i extrempunkten (a, b, c) gälla att $\nabla f(a, b, c) \cdot T(a, b, c) = 0$, dvs

$$\nabla f(a, b, c), \quad \nabla g(a, b, c), \quad \nabla h(a, b, c) \text{ ligger i samma plan.}$$

De tre gradienterna är linjärt beroende, vilket är ekvivalent med att determinanten av en matris med ∇f , ∇g , ∇h på var sin rad måste vara noll i ett maximum/minimum.

Exempel 44. Maximera och minimera $f(x, y, z) = y$ under bivillkoren $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ och $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Funktionen g definierar ett plan och h en sfär, så skärningskurvan mellan dessa funktioner blir en cirkel, dvs en kompakt mängd. Det sökta maximat och minimat existerar således. Eftersom $\nabla f(x, y, z) = (0, 1, 0)$, $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$ och $\nabla h(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ är linjärt oberoende så gäller:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2x - 2z. \quad \begin{array}{l} \text{Vi får } x = z, \text{ vilket insatt i } g \\ \text{och } h \text{ ger ekvationssystemet} \end{array} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Vi sätter in $y = 1 - 2x$ i $2x^2 + y^2 = 1$ och får då:

$$2x^2 + (1 - 2x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x(6x - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ ger } z = 0 \text{ och } y = 1 - 2 * 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f(0, 1, 0) = 1 \quad (\text{maximum})$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ ger } z = \frac{2}{3} \text{ och } y = 1 - 2 * \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \quad (\text{minimum})$$

Föreläsning 17

Derivering av integraler

Som avslutning på differentialkalkyldelen av kursen ska vi undersöka derivering av integraler. Från analysens fundamentalsats vet vi sedan tidigare att om $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, så gäller $F'(x) = f(x)$. Från kedjeregeln får man sedan enkelt att om $G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$, så gäller det, med $u = \psi(x)$ och $v = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\psi(x)} f(t)dt - \int_0^{\varphi(x)} f(t)dt \right) = \frac{d}{du} \left(\int_0^u f(t)dt \right) \frac{du}{dx} - \frac{d}{dv} \left(\int_0^v f(t)dt \right) \frac{dv}{dx} \\ &= f(u)\psi'(x) - f(v)\varphi'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x). \end{aligned}$$

Betrakta nu en funktion $f(x, t)$ och bilda integralen $\int_a^b f(x, t)dt$. Vad blir derivatan av F i detta fall? Om både $f(x, t)$ och $f'_1(x, t)$ är kontinuerliga på en kompakt mängd $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, så kan man visa att

$$F'(x) = \int_a^b f'_1(x, t)dt$$

dvs. att vi kan flytta in deriveringen innanför integraltecknet. Kärnan i beviset utgörs av att en kontinuerlig funktion på ett kompakt område är likformigt kontinuerlig (se krompendiet, Kap. 4). Derivering av integraler har många tillämpningar, bland annat i definitionen av Laplacetransformen, som kan användas för att lösa differentialekvationer. Vi tar här ett exempel på hur derivering av integraler kan användas för att beräkna en bestämd integral av en funktion som saknar primitiv funktion.

Exempel 45. Beräkna $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

Inför parametern s och definiera $F(s) = \int_0^1 \frac{1}{s^2+x^2} dx$. Vi vet att

$$F'(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s^2+x^2} \right) dx = \int_0^1 -\frac{2s}{(s^2+x^2)^2} dx = -2s \int_0^1 \frac{1}{s^2+x^2} dx$$

så $F'(1) = -2I$. Samtidigt kan vi uttrycka $F(s)$ explicit eftersom

$$F(s) = \int_0^1 \frac{1}{s^2+x^2} dx = \frac{1}{s^2} \int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{x}{s})^2} dx = \left[\frac{1}{s} \arctan \left(\frac{x}{s} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{s} \arctan \left(\frac{1}{s} \right),$$

så derivatan $F'(s)$ måste vara

$$F'(s) = -\frac{1}{s^2} \arctan \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{1}{s} \frac{1}{1+(\frac{1}{s})^2} \left(-\frac{1}{s^2} \right) = -\frac{1}{s} \arctan \left(\frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s(1+s^2)}$$

Fölaktligen gäller även $F'(1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, och kombinerar vi detta resultat med $F'(1) = -2I$, så får vi direkt att $I = \frac{\pi+2}{8}$.

Repetition 1

Exempel 46. Transformera differentialekvationen $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ genom att införa de nya variablerna $x = u + v$, $y = u - v$. Lös därefter ekvationen.

Sambandet mellan (x, y) och (u, v) kan skrivas $u = \frac{1}{2}(x+y)$ och $v = \frac{1}{2}(x-y)$. Kedjeregeln ger nu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v}$$

kombinerar vi båda dessa ekvationer får vi:

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial z}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

med lösningen $z = f(v) = f(x - y)$.

Exempel 47. Avgör om gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ existerar och bestäm det i fallet att det existerar.

När $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ så gäller $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0$. Alltså får vi:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) \underbrace{=}_\text{L'Hôpital} 0$$

Exempel 48. Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion med kontinuerliga partiella första-derivator. Antag att för alla reella tal $t > 0$, så gäller $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$. Visa att då gäller

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f(x, y).$$

Vi använder kedjeregeln på sambandet $t^3 f(x, y) = f(tx, ty)$ och får då:

$$3t^2 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial t} f(tx, ty) = f'_1(tx, ty)x + f'_2(tx, ty)y$$

samtidigt gäller

$$\frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) = f'_1(tx, ty)t \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty) = f'_2(tx, ty)t \quad \text{så}$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) + y \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty) = x f'_1(tx, ty)t + y f'_2(tx, ty)t = t * 3t^2 f(x, y) = 3f(tx, ty)$$

Exempel 49. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ då $x^2 + y^2 \leq 1$.

Vi söker först eventuella kritiska punkter i definitionsmängdens inre

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = 1 + 2x = 0 \\ f'_2(x, y) = 1 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2 \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

Vi parametriserar därefter randen enligt $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta) + \sin(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)$$

$$g'(\theta) = -\sin(\theta) + \cos(\theta) \Rightarrow \tan(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ger } (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ och } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ ger } (x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Funktionsvärdena i extrempunkterna är $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$ respektive $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$. Maximum blir $1 + \sqrt{2}$ och minimum blir $-\frac{1}{2}$

Exempel 50. bestäm alla kritiska punkter till $f(x, y) = 3xy - x^2 - 3y^2 + x - 12$ och karakterisera dessa.

De kritiska punkterna uppfyller

$$\begin{cases} f'_1(x, y) = 3y - 2x + 1 = 0 \\ f'_2(x, y) = 3x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2x + 1 = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4y + 1 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (2, 1)$$

Funktionen har andraderivatorna $f''_{11}(x, y) = -2$, $f''_{12}(x, y) = 3$, och $f''_{22}(x, y) = -6$ så Hessianmatrisen, med motsvarande kvadratiska form, blir

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow -2h^2 + 6hk - 6k^2 = -2(h^2 - 3hk) - 6k^2 = -2\left(\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2\right) - 6k^2 \\ = -2\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 + \frac{9}{4}k^2 - 6k^2 = -2\left(h - \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{3}{2}k^2 < 0 \quad \forall (h, k) \neq (0, 0)$$

Hessianmatrisen är negativt definit, så den kritiska punkten är ett lokalt maximum.

Föreläsning 18: Dubbelintegraler

Vi införde integraler för att kunna lösa problemet att räkna ut arean under grafen till en funktion i en variabel. Vi har tidigare sett att grafen till en funktion av två variabler kan tolkas som en yta i rummet. Vi kan använda integraler också för att räkna ut volymen under grafen till en funktion av två variabler. Vi börjar med ett enkelt specialfall.

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en rektangel i \mathbb{R}^2 . Låt P_1 vara en partition av $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) och låt P_2 vara en partition av $[c, d]$ ($c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$). $P_1 \times P_2$ är en partition av Δ i delrektanglar Δ_{ij} . En funktion $\phi(x, y)$ kallas för en trappstegsfunktion om det finns en partition $P_1 \times P_2$ av Δ sådan att $\phi(x, y) = c_{ij}$ för alla $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Volymen under en trappstegsfunktion ges direkt av

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \underbrace{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}_{\text{Arean av } \Delta_{ij}} \quad \text{vilket betecknas} \quad \underbrace{\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy}_{\text{Dubbelintegral}}$$

Dubbelintegraler kan beräknas genom att vi först integrerar över den ena variabeln, och sedan över den andra. dvs:

Sats 19. För trappstegsfunktioner ϕ gäller

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \phi(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \phi(x, y) dx \right) dy$$

Beviset följer av att vi först kan summera över i och sedan över j och vice versa (detaljerna utelämnas). Notera att integralen $\int_c^d \phi(x, y) dy$ ger tvärsnittsytan av kroppen under grafen till ϕ skuren så att x hålls konstant. Därmed gäller:

$$\int_a^b \left(\int_c^d \phi(x, y) dy \right) dx = \int_a^b A(x) dx$$

Vilket är formeln för volymen av en kropp med tvärsnitt $A(x)$ som vi härledde i envariabelanalysen.

Låt nu f vara en godtycklig begränsad funktion definierad på Δ . Då finns det med säkerhet två trappstegsfunktioner ϕ och ψ sådana att

$$\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta.$$

Definition 25. Det begränsade funktionen f sägs vara integrerbar över rektangeln Δ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns trappstegsfunktioner ϕ, ψ som uppfyller olikheten ovan, samt

$$\left| \iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \psi(x, y) dx dy \right| < \varepsilon.$$

Dubbelintegralen av ψ blir som en översumma till f och dubbelintegralen av ϕ blir som motsvarande undersumma, så precis som för enkelintegralen är en funktion integrerbar om under- och översumman kan komma godtyckligt nära varandra.

Sats 20. Om f är integrerbar över Δ så finns det exakt ett tal I sådant att

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy \leq I \leq \iint_{\Delta} \psi(x, y) dx dy$$

Vi låter därför talet I i ovanstående sats betecknas $I = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$. Avslutningsvis några egenskaper för dubbelintegraler (av integrerbara funktioner)

1. $\iint_{\Delta} (Af(x, y) + Bg(x, y)) dx dy = A \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy + B \iint_{\Delta} g(x, y) dx dy$
2. $f(x, y) \leq g(x, y) \forall (x, y) \in \Delta \Rightarrow \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\Delta} g(x, y) dx dy$
3. $\left| \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| dx dy$ (Bevisas först för trappstegsfunktioner)

Vi skulle vilja veta vilka funktioner som är integrerbara.

Sats 21. Om f är kontinuerlig på Δ , så är f integrerbar över Δ .

Precis som i envariabelfallet bygger beviset på att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd (rektangeln Δ är kompakt) är likformigt kontinuerlig. Det är ganska enkelt att visa att dubbelintegralen av alla integrerbara funktioner kan beräknas som en utvecklad enkelintegral och vi tar ett exempel på detta.

Exempel 51. Beräkna

$$\iint_{\Delta} \frac{x}{(1+xy)^2} dx dy, \quad \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1\}.$$

Integranden är kontinuerlig och därmed integrerbar. Vi integrerar först med avseende på y .

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{x}{(1+xy)^2} dx dy &= \int_1^3 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)^2} dy \right) dx = \int_1^3 \left[-\frac{1}{1+xy} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{1}{1+xy} + 1 \right) dx = [x - \ln|1+x|]_1^3 \\ &= 3 - \ln(4) - 1 + \ln(2) = 2 - \ln(2) \end{aligned}$$

Vi hade lika gärna kunnat börja med att integrera över x , men då hade vi behövt partiellbråksuppdelning av integranden och räkningarna hade blivit mycket mer invecklade.

För att kunna integrera funktioner över andra områden än rektanglar inför vi följande definition:

Definition 26. Låt f vara en begränsad funktion på den begränsade mängden D och inför den utvidgade funktionen

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Eftersom D är begränsad så finns det en rektangel Δ sådan att $D \subset \Delta$. Vi säger att f är integrerbar på D om f_D är integrerbar på Δ och definierar

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f_D(x, y) dx dy.$$

Men även om f är kontinuerlig på D så kommer bara f_D att vara kontinuerlig om $f(x, y) \rightarrow 0$ då (x, y) närmar sig randen ∂D . f_D kommer dock ändå att vara integrerbar om randen är en så kallad nollmängd, dvs. en mängd som vi kan täcka med ändligt många rektanglar ned total area ε . Man kan visa att grafen till en kontinuerlig funktion är en nollmängd (även detta bevis utnyttjar likformig kontinuitet) och därmed gäller följande, mycket användbara sats.

Sats 22. Om f är kontinuerlig på mängden $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c(x) \leq y \leq d(x), \quad a \leq x \leq b\}$ för två kontinuerliga funktioner c och d , så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

På samma sätt gäller att om det finns två kontinuerliga funktioner a och b , så $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \leq x \leq b(y), \quad c \leq y \leq d\}$ så är

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

De flesta områden kan skrivas som en ändlig union av ovanstående två typer av områden. Notera också att om $D = D_1 \cup D_2$ där $D_1 \cap D_2$ är en nollmängd så gäller

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Föreläsning 19

Dubbelintegraler (forts.)

Vi inleder med två räkneexempel med dubbelintegraler över icke-rektangulära områden i planet.

Exempel 52. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0, 1)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$.

Området begränsas i y -led av $1 - x \leq y \leq 1$ och i x -led av $0 \leq x \leq 1$, så om vi först integrerar med avseende på y och sedan med avseende på x , så får vi:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{(1-x)^3}{3} + x^3 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{(1-x)^4}{12} + \frac{x^4}{4} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

I exemplet ovan hade vi kunnat använda $1 - y \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och istället först integrerat över x och sedan över y . Räkningarna hade dock blivit identiska fast med y utbytt mot x och vice versa. Som synes i nästa exempel kan det dock vara omöjligt att beräkna vissa integraler om vi börjar med fel variabel.

Exempel 53. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{x^2} dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0, 1)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$.

Funktionen $f(x) = e^{x^2}$ saknar primitiv funktion, så vi måste börja med att integrera med avseende på y .

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x}^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[ye^{x^2} \right]_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^1 2xe^{x^2} dx \\ &= \left[e^{x^2} \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \end{aligned}$$

Variabelsubstitution för Riemann-integralen

Precis som i envariabelfallet kan beräkning av dubbelintegraler ibland förenklas evsevärt som vi gör ett variabelbyte från (x, y) till ett annat par av variabler, exempelvis polära koordinater (r, θ) . För att ta fram formeln för variabelbyte i dubbelintegraler måste vi dock först undersöka Riemannsummor.

Låt f vara en funktion som är definierad på en mängd D . En Riemannsumma till f är en summa

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) (\text{Arean av } D) \quad \text{där } (x_k, y_k) \in D_k.$$

Man kan visa (återigen med likformig kontinuitet) att om f är kontinuerlig så konvergerar Riemannsumman till f mot

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

när största $\text{diam}(D_k)$ (dvs största avståndet mellan två punkter i D_k) $\rightarrow 0$.

Låt nu $x = g(u, v)$ och $y = h(u, v)$ vara en bijektiv avbildning mellan området E i uv -planet och området D i xy -planet. Varje uppdelning av D i småbitar D_k motsvarar en uppdelning av E i småbitar E_k . Vi undersöker hur arean av D_k och E_k är relaterade.

När vi studerade Jacobimatrisen såg vi att areaförstoringen vid en avbildning var lika med determinanten av Jacobimatrisen (Jacobianen). Alltså gäller:

$$(\text{Arean av } D_k) = (\text{Arean av } E_k) \underbrace{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}_{\neq 0 \text{ för bijektiva avbildningar}}, \quad \text{där} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Från areaförstöringsformeln för vi följande relation mellan Riemannsummor uttryckta i (x, y) och (u, v) :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) (\text{arean av } D_k)}_{\iint_D f(x, y) dx dy} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^n f(g(u_k, v_k), h(u_k, v_k)) (\text{arean av } E_k) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}_{\iint_E f(g(u, v), h(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv}$$

Sats 23. Om $(x, y) = (g(u, v), h(u, v))$ är en bijektiv funktion med kontinuerliga partiella derivator och om $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, $\forall (u, v) \in E$ utom på en nollmängd, så är:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

för alla integrerbara funktioner f

Jämför den endimensionella motsvarigheten

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) \underbrace{g'(u)}_{\frac{dx}{du}} du$$

för $x = g(u)$. Vi tar två exempel på variablebyte för dubbelintegraler.

Exempel 54. Beräkna integralen

$$\iint_D \frac{x^2 e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dx dy$$

över den halva cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

Vi byter till polära koordinater $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. Jacobianen blir då

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial r, \theta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) - (-r \sin^2(\theta)) = r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r$$

Integrationsområdet begränsas i polära koordinater av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, så

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2 e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^\pi \int_0^1 \frac{r^2 \cos^2(\theta) e^{r^2}}{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 \cos^2(\theta) e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 r e^{r^2} dr \right) \end{aligned}$$

När integranden i en dubbelintegral är en produkt av en funktion av den ena variabeln och en funktion av den andra variabeln, så kan dubbelintegralen skrivas som en produkt av två integraler. Vidare gäller

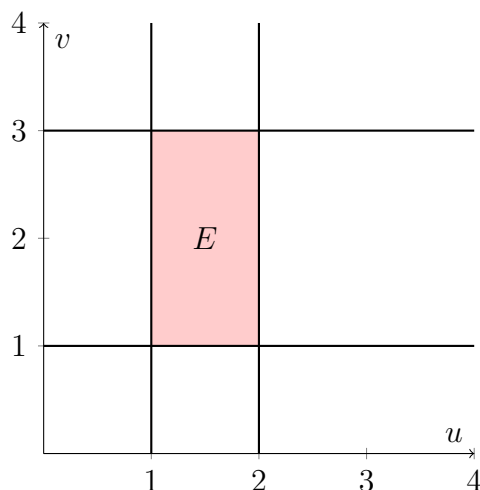
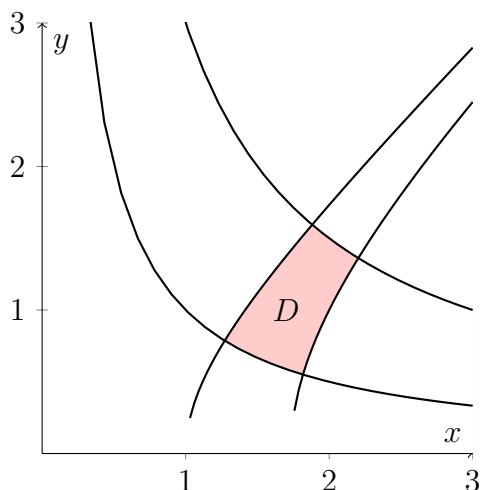
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta &= \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4} \\ \int_0^1 r e^{r^2} dr &= \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Så dubbelintegralen är $\frac{\pi(e-1)}{4}$

Exempel 55. Beräkna integralen

$$\iint_D (x^4 - y^4) dx dy$$

där D är det område i xy -planet som begränsas av de fyra kurvorna $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 0$, $xy = 1$ och $xy = 3$. Om vi byter till koordinaterna $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$ så kan integrationsområdet uttryckas som $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 3$.



Jacobianen blir

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}^{-1} = (2x^2 + 2y^2)^{-1} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

vilket slutligen ger oss:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^4 - y^4) dx dy &= \iint_D (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) dx dy = \iint_E (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_E u du dv = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 u du \right) \left(\int_1^3 dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 [v]_1^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) (3 - 1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Föreläsning 20: Generaliserade dubbelintegraler

Vi har hittills studerat dubbelintegraler av begränsade funktioner över slutna, begränsade områden i planet. Precis som för enkelintegraler kan vi utvidga integralbegreppet till att omfatta även obegränsade integrander och obegränsade integrationsområden.

Definition 27. Låt f vara en funktion av två variabler som är definierad på en, möjligen obegränsad, mängd D i planet och antag att $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in D$. Låt $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D$ vara en följd av mängder med följande egenskaper:

- $\cup_{i=1}^{\infty} D_i = D$
- D_i är begränsad för alla i .
- f är begränsad på D_i för alla i .

Den generaliserade integralen av f på området D definieras av

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$

om gränsvärdet existerar.

Exempel 56. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy$$

där D är första kvadranten i xy -planet. Funktionen är begränsad på hela mängden D , men mängden D är obegränsad. Vi kan låta $D_i = [0, i] \times [0, i]$ och får då:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^i \int_0^i \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_0^i \frac{dx}{1+x^2} \right) \left(\int_0^i \frac{dy}{1+y^2} \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_0^i [\arctan(y)]_0^i = \lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{(\arctan(i) - \arctan(0))}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} \underbrace{(\arctan(i) - \arctan(0))}_{\rightarrow 0} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Den generaliserade dubbelintegralen var konvergent med värdet $\frac{\pi^2}{4}$

Precis som för vanliga dubbelintegraler har vi ofta användning av variabelbyten när vi ska beräkna generaliserade dubbelintegraler. Vi illustrerar med ett mycket viktigt exempel med otaliga tillämpningar.

Exempel 57. Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Integralen saknar primitiv funktion, men genom att gå omvägen via en dubbelintegral kan vi ändå beräkna den bestämda integralen.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\text{polära koordinater}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R d\theta \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}e^{-R^2} + \frac{1}{2}\right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-R^2})2\pi \\
&= \frac{1}{2}(1 - 0)2\pi = \pi.
\end{aligned}$$

I ovanstående exempel beräknade vi generaliserade dubbelintegraler med hjälp av itererade enkelintegraler. Om en generaliserad dubbelintegral med positiv integrand är konvergent, så spelar det ingen roll i vilken ordning vi integrerar enkelintegralerna. Om integranden har olika tecken kan värdet dock bero på ordningen. Vi tar ett exempel där integranden är obegränsad.

Exempel 58. Avgör om integralen

$$\iint_D \frac{1}{y-x}$$

är divergent för $D = \{(x, y) : 0 < x < y < 1\}$.

Integranden är obegränsad längs linjen $y = x$, så

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{y-x} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{1}{y-x} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 [\ln|y-x|]_{y=x+\varepsilon}^1 dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 (\ln|1-x| - \ln(\varepsilon)) dx = \infty \quad \text{efter integranden är } \infty \text{ för alla } x.
\end{aligned}$$

Vi tar ett till exempel på variabelbyte i generaliserade dubbelintegraler:

Exempel 59. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D xy e^{-xy} dx dy$$

där D är remsan $1 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0$.

Vägleda av formen på integranden sätter vi $u = xy$, $v = x$. Remsan D kan då skrivas $u \geq 0$, $1 \leq v \leq 1$. Jacobianen blir:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x = -v$$

så

$$\begin{aligned} \iint_D xy e^{-xy} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_1^2 u e^{-u} \frac{1}{v} dv du = \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R u e^{-u} du \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{v} dv \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left([-u e^{-u}]_0^R - \int_0^R -e^{-u} du \right) [\ln(v)]_1^2 \\ &= \ln(2) \lim_{R \rightarrow \infty} (-R e^{-R} - e^{-R} + 1) = \ln(2) \end{aligned}$$

För integrander med varierande tecken kunde vi inte dra säkra slutsatser från itererade enkelintegraler. Dock gäller det att

$$\iint_D f(x, y) dx dy \text{ är konvergent} \iff \iint_D |f(x, y)| dx dy \text{ är konvergent.}$$

Så om vi vill avgöra om en generaliserad dubbelintegral vars integrand f har varierande tecken är konvergent, så behöver vi bara undersöka motsvarande integral av $|f|$. Om vi inte kan hitta primitiva funktioner kan vi använda ett jämförelsekriterium för att avgöra konvergens. För att visa att

$\iint_D \frac{1 + 2 \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ är konvergent på $x^2 + y^2 \geq 1$, så kan vi undersöka

$$\iint_D \left| \frac{1 + 2 \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| dx dy \leq \iint_D \frac{3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{3r}{(r^2)^{3/2}} dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{3}{r} \right]_1^\infty = 6\pi$$

Och eftersom integralen av $|f|$ är mindre än en konvergent integral, så måste integralen av f , och därmed även av $|f|$, vara konvergent.

Vi avslutar detta kapitel med att härleda den flerdimensionella motsvarigheten av integralkalkylens medelvärdesats. Låt f vara en kontinuerlig funktion av två variabler definierad på ett kompakt område D . Då har f ett största och ett minsta värde M respektive m på D , och alltså gäller $m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in D$. Integration över D ger:

$$\begin{aligned} m(\text{arean av } D) &\leq \iint_D m dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D M dx dy \leq M(\text{arean av } D) \\ \Rightarrow m &\leq \frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \end{aligned}$$

Om D är bågvis sammanhängande, så finns det en kurva $(x(t), y(t))$ som uppfyller $f(x(0), y(0)) = m$ och $f(x(1), y(1)) = M$. Eftersom både f och kurvan är kontinuerliga, så är $g(t) = f(x(t), y(t))$ en kontinuerlig funktion av en variabel med egenskaperna $g(0) = m$ och $g(1) = M$. Enligt satsen om mellanliggande värden så finns det ett $t \in [0, 1]$, sådant att $g(t) = f(x(t), y(t)) = C$. Det finns alltså en punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att:

$$f(x, y) = \frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x, y) dx dy$$

Högerledet kan tolkas som medelvärdet av funktionen f på området D . Om D_r är en cirkel med radie r och centrum i (a, b) så gäller:

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y) dr d\theta \rightarrow f(a, b) \quad \text{då } r \rightarrow 0.$$

För harmoniska funktioner är ovanstående integral lika med $f(a, b) \quad \forall r > 0$.

Föreläsning 21

Trippelintegraler

På precis samma sätt som vi definierade dubbelintegraler över rektanglar i planet, kan vi definiera trippelintegraler över rätblock R i rummet genom att dela in rätblocket i delrätblock. Genom att approximera den funktion f som man vill integrera med en trappstegsfunktion som är konstant på varje delrätblock så får man en Riemannsumma som konvergerar mot

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$$

Vi kan också definiera trippelintegraler över kroppar K i rummet som inte är rätblock genom att låta integranden vara noll utanför K och integrera över ett rätblock som innehåller K .

Man kan också på motsvarande sätt definiera multipelintegralen av en funktion f av n variabler över ett område $K \subset \mathbb{R}^n$. Denna betecknas

$$\int \cdots \int_K f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Trippel- och multipelintegraler har ingen geometrisk tolkning, men många fysikaliska tolkningar. Om exempelvis $\rho(x, y, z)$ är densiteten i punkten (x, y, z) så ges massan m och volymen V av en kropp K av

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz \quad V = \iiint_K dx dy dz$$

Vi kan beräkna trippelintegraler med hjälp av itererad integration eller genom att utnyttja symmetrier och variabelbyten. Om integrationskroppen K kan skrivas som

$$K = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : b(x, y) \leq z \leq a(x, y), \quad (x, y) \in D)\}$$

så kan en trippelintegral över K beräknas

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{b(x,y)}^{a(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Om vi på ett enkelt sätt kan bestämma tvärsnitten av kroppen vinkelräta mot någon av koordinataxlarna, så kan trippelintegralen beräknas

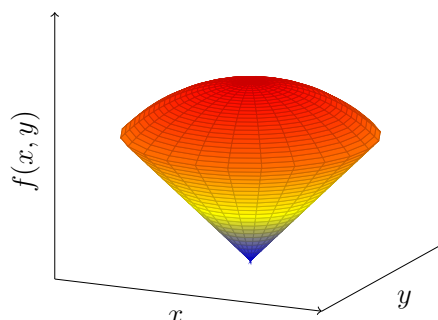
$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

där D_z är tvärsnittet av kroppen vinkelrät mot z -axeln.

Exempel 60. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K z dx dy dz$$

där kroppen K definieras av de två olikheterna $x^2 + y^2 \leq z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Den första olikheten motsvarar innandömet av en cirkulär kon med spetsen i origo och de båda andra olikheterna övre halvan av enhetsfären.



Kroppen K har formen av en 'glasstrut'. Vi beräknar trippelintegralen med den första metoden ovan och tar fram projektionen av området i xy -planet. Projektionen av skärningskurvan har ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

Så $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$.

Vidare är $a(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $b(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, så

$$\begin{aligned}
\iiint_D z \, dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx dy = \iint_D \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\
&= \frac{1}{2} \iint_D (1 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D 1 - 2x^2 - 2y^2 \, dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} 1 - 2r^2 r \, dr d\theta = \frac{1}{2} 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Variabelbyte i trippelintegraler

I exemplet ovan så utförde vi ett variabelbyte i den anlutande dubbelintegralen. Vi kan också utföra variabelbyte direkt i trippelintegralen. Om vi byter variabler från (x, y, z) till (u, v, w) så måste vi ta hänsyn till hur volymelement skalas vid avbildningen. Precis som för dubbelintegraler så bestäms detta av absolutbeloppet av Jacobianen, så trippelintegralen kan skrivas:

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{K'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Där K' är kroppen K uttryckt i variablerna u, v och w . Vi tillämpar denna formel på ett exempel.

Exempel 61. Beräkna

$$\iiint_K z \, dx dy dz$$

där kroppen K är 'glasstruten' i föregående exempel. I sfäriska koordinater kan kroppen uttryckas med olikheterna $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, vilket innebär att kroppen alltså är ett rätblock i dessa koordinater. Jacobianen för detta variabelbyte är

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \rho^2 \sin(\phi)$$

och eftersom $z = \rho \cos(\phi)$ så får vi:

$$\begin{aligned}
\iiint_K z \, dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \rho \cos(\phi) \rho^2 \sin(\phi) \, d\theta d\phi d\rho = \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{\pi/4} \sin(\phi) \cos(\phi) \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2\phi)}{2} \, d\phi \right) 2\pi = \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos(2\phi)}{4} \right]_0^{\pi/4} 2\pi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Om integrationsområdet har axiell symmetri kan vi dra nytta av cylindriska koordinater. Vi tar ett exempel även på detta.

Exempel 62. Beräkna

$$\iiint_K z \, dx \, dy \, dz$$

där K ges av olikheterna $z^2 \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

I cylindriska koordinater kan området uttryckas med olikheterna $0 \leq r \leq z$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Jacobianen blir:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

precis som för polära koordinater. Så

$$\begin{aligned} \iiint_K z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z z r \, dr \, d\theta \, dz = 2\pi \int_0^1 \int_0^z z r \, dr \, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[z \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=z} dz = 2\pi \int_0^1 \frac{z^3}{2} dz = 2\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Många gånger kan beräkningar av trippelintegraler förenklas avsevärt om man tar eventuella symmetrier hos integranden i beaktande. Exempelvis är, av symmetriskäl

$$\iiint_K x \, dx \, dy \, dz = \iiint_K y \, dx \, dy \, dz = 0$$

både om K är konen i föregående exempel och 'glasstruten' i exemplet innan det (jämför med enkelintegralen an en udda funktion över ett symmetriskt intervall $[-a, a]$). Hur svår en trippelintegral är att beräkna kan också påverkas av i vilken ordning vi väljer att beräkna de tre enkelintegralerna. I trippelintegralen.

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_0^4 f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^4 f(x, y, z) \, dx$$

ges området av olikheterna $0 \leq z \leq 1$, $z \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y$. Om vi istället först vill integrera över z och sedan över y och sist över x , så måste vi skriva om området som $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq y$, och får trippelintegralen

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^y f(x, y, z) dz$$

Föreläsning 22: Tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler

Som vi nämnde i förra kapitlet så ges volymen av en kropp K av

$$\iiint_K dx dy dz = \iint_D \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} dz \right) dx dy = \iint_D (b(x,y) - a(x,y)) dx dy$$

där de två sista formlerna gäller i specialfallet då K har formen $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a(x, y) \leq z \leq b(x, y), (x, y) \in D\}$. Vi tar ett exempel som visar hur vi kan beräkna volymen av en implicit definierad kropp (där vi inte kan göra ovanstående omskrivning till en dubbelintegral).

Exempel 63. Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq y\}$

Eftersom vänsterledet i olikheten är ickenegativt, så vet vi att $y \geq 0$. På grund av termen $x^2 + y^2 + z^2$ så väljer vi att studera kroppen K uttryckt i sfäriska koordinater. $y \geq 0$ motsvarar då $0 \leq \theta \leq \pi$. Olikheten $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq y$ innebär då att

$$(\rho^2)^2 \leq \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \rho^3 \leq \sin(\phi) \sin(\theta)$$

och eftersom Jacobianen i sfäriska koordinater är $\rho^2 \sin(\phi)$, så får vi:

$$\begin{aligned} \iiint_K dx dy dz &= \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^{\sqrt{\sin(\phi) \sin(\theta)}} \rho^2 \sin(\phi) d\rho = \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\sin(\phi) \sin(\theta)}} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \sin(\phi) \sin(\phi) \sin(\theta) d\phi = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\phi)}{2} d\phi \\ &= \frac{1}{3} [-\cos(\theta)]_0^\pi \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} (-(-1) - (-1)) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Alternativt hade vi kunnat göra omskrivningen $x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{y}$ och därefter $x^2 + y^2 \leq \sqrt{y} - y^2$ och använt att projektionen av kroppen på xz -planet är cirklar med radie $\sqrt{\sqrt{y} - y^2}$ och centrum i $x = z = 0$. Tvärsnitt av kroppen med fixt y har alltså arean $A(y) = \pi(\sqrt{y} - y^2)$ och enligt envariabelanalysen så gäller

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 \sqrt{y} - y^2 dy = \pi \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Vi ska härnäst undersöka problemet att bestämma arean av en yta i rummet. Vi visade i envariabelanalysen att om ytan fås genom rotation av en funktion $y = f(x)$ kring x -axeln

så ges arean av

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Vi ska nu studera det med generella fallet då arean är grafen till en funktion av två variabler. Relationen mellan arean dS av ett d ytelement på grafen och arean dA av projektionen av ytelementet på xy -planet är, eftersom båda är approximativt plana,

$$dA = dS \cos(\gamma),$$

där γ är vinkeln mellan grafens normalvektor och z -axeln. Normalvektorn till grafen av en funktion av två variabler är $(f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1)$, eller dess uppåtriktade motsvarighet $(-f'_1(x, y), -f'_2(x, y), 1)$. Med $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, så får vi då:

$$dA = dS \cos(\gamma) = dS \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{n}| |\vec{e}_3|} = \frac{dS}{|\vec{n}|} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy$$

Hela grafens yta ger av integralen

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy,$$

där D är funktionens definitionsmängd. Notera likheten med formeln för båglängden av en funktionsgraf $y = f(x)$, som lyder

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Man kan ganska enkelt härleda formeln för arean av en rotationskropp från formeln för arean av en funktionsgraf. Senare i kursen kommer vi att ta fram en formel för arean av varje parametriserbar yta.

Exempel 64. Bestäm arean av övre halvan av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Vi vill bestämma arean av grafen till funktionen $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ vars partiella derivator ges av:

$$f'_1(x, y) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$f'_2(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Eftersom funktionens definitionsmängd är $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ så får vi:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} dx dy = \iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr \\ &= 2\pi \left[-R\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

Vi ägnar resten av kapitlet åt massrelaterade beräkningar. Vi har redan sett att massan av en kropp K vars densitet i punkten (x, y, z) ges av funktionen $\rho(x, y, z)$ kan beräknas med trippelintegralen

$$\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för en kropp K i rummet är den punkt kring vilken kroppen är i momentjämvikt med avseende på en konstant, parallell gravitationskraft riktad åt ett godtyckligt håll. Antag först att gravitationen är riktad i z -riktning. Vridmomentet för ett masselement $\rho(x, y, z) dx dy dz$ kring en axel som är parallell med x -axeln är

$$\underbrace{\rho(x, y, z) dx dy dz}_m \underbrace{g(y - y_T)}_r \quad \text{och hela kroppens vridmoment}$$

$$\iiint_K g(y - y_T) \rho(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad \text{eftersom vi har momentjämvikt i } (x_T, y_T, z_T)$$

om vi nu låter massan m vara trippelintegralen av funktionen $\rho(x, y, z)$ över kroppen K så får vi ekvationen:

$$\iiint_K y \rho(x, y, z) dx dy dz = m y_T \quad \Rightarrow \quad y_T = \frac{1}{m} \iiint_K y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

och motsvarande ekvationer gäller även av symmetriskäl för x_T och y_T

Exempel 65. Bestäm tyngdpunkten till kroppen K som begränsas av $x + y + z \leq 1$ i första oktanten.

Av symmetriskäl på kommer $(x_T, y_T, z_T) = k(1, 1, 1)$, så vi behöver bara beräkna en av x_T, y_T, z_T . Kroppen begränsas av $0 \leq z \leq 1 - x - y$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$, så vi får

integralen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
 &= \int_0^1 x \left(0 + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

Samtidigt gäller

$$\begin{aligned}
 m &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2x+x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

vilket slutligen ger oss att

$$x_T = \frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad (x_T, y_T, z_T) = \frac{1}{4}(1, 1, 1).$$

Föreläsning 23

Vektorfält

Under merparten av återstoden av kursen ska vi arbeta med vektorfält. Ett vektorfält är en funktion vars definitions- och värdemängder är delmängder av \mathbb{R}^3 . Till varje punkt (x, y, z) i rummet ordnar vektorfältet \vec{F} en vektor $\vec{F}(x, y, z)$ som kan skrivas

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

Många fysikaliska fenomen kan beskrivas med hjälp av vektorfält, exempelvis gravitationskraften kring en massa, det elektriska kraftfältet kring en laddning, eller hastighetsfältet i ett materiaflöde. För att kunna ta fram en fysikalisk teori för dessa fenomen behöver vi utveckla matematiska metoder för vektorfält.

Om $F_3(x, y, z) \equiv 0$ och F_1, F_2 är oberoende av z , talar man om ett planärt vektorfält.

$$\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Planära vektorfält kan bland annat beskriva magnetfältet kring en lång, rak ledare genomfluten av en konstant elektrisk ström.

Exempel 66. En punktmassa m_0 i punkten $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ger upphov till ett vektorfält för gravitationskraften. En massa m i $\vec{r} = (x, y, z)$ påverkas av kraften

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= -\frac{km_0m}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ &= -km_0m \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}\end{aligned}$$

med belopp

$$|\vec{F}| = \frac{km_0m}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$

Så kraften avtar, som bekant, med kvadraten på avståndet $|\vec{r} - \vec{r}_0|$.

En massa m_0 som placeras i gravitationsfältet till en punktmassa kommer, om $m_0 \ll m$, att röra sig längs en rät linje mot punkten (x_0, y_0, z_0) . Dessa räta linjer är så kallade fältlinjer för kraftfältet. En fältlinje är en kurva vars tangent i varje punkt är parallell med kraftfältet.

Vi ska ta fram en metod för att bestämma fältlinjer till ett vektorfält \vec{F} och antar att fältlinjerna har parametriseringen $\vec{r}(t)$. Per definition gäller

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda(t)\vec{F}(\vec{r}(t))$$

för någon funktion $\lambda(t)$. Det är inte alltid som detta system av differentialekvationer kan lösas, men vi tar ett exempel när så är fallet.

Exempel 67. Bestäm en ekvation för den fältlinje till det planära vektorfältet $F(x, y) = (1, \sin(x))$, som går genom origo.

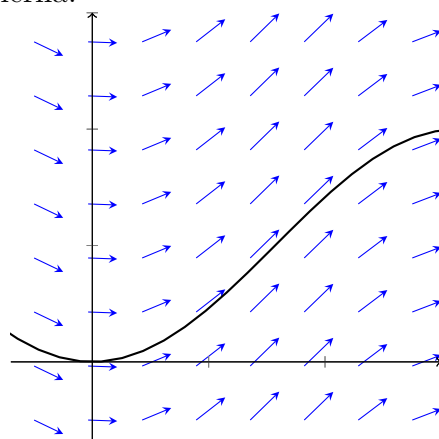
Fältlinjerna $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uppfyller ekvationerna:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda(t) * 1 & \frac{dy}{dt} &= \lambda(t) \sin(x) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\lambda(t) \sin(x)}{\lambda(t) * 1} = \sin(x) \\ \Rightarrow y(x) &= \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C\end{aligned}$$

Insättning av villkoret $y(0) = 0$ ger därefter

$$0 = -\cos(0) + C \Rightarrow C = 1,$$

Så fältlinjen genom origo har ekvationen $y = 1 - \cos(x)$, och oscillerar därmed mellan y -värdena 0 och 2.



Konservativa vektorfält

Funktioner $\Phi(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kallas ibland för skalärfält. Gradienten $\nabla\Phi(x, y, z)$ av ett godtyckligt skalärfält är ett vektorfält. Däremot gäller det inte i allmänhet att ett godtyckligt vektorfält \vec{F} kan skrivas som gradienten av ett skalärfält.

Definition 28. Vektorfältet $\vec{F}(x, y, z)$ sägs vara konservativt i det öppna området D om det finns ett skalärfält $\Phi(x, y, z)$ sådant att $\vec{F}(x, y, z) = \nabla\Phi(x, y, z)$. Funktionen Φ kallas för potentialen till \vec{F} (definitionen är analog i \mathbb{R}^2 eller \mathbb{R}^n).

Potentialen till ett konservativt vektorfält är inte entydigt bestämd. Om Φ är en potential till \vec{F} , så är också $\Phi + C$ en potential för varje konstant C eftersom $\nabla(\Phi + C) = \nabla\Phi + \nabla C = \vec{F} + 0 = \vec{F}$. Två potentialer Φ_1, Φ_2 till ett och samma vektorfält uppfyller dock alltid $\Phi_1 = \Phi_2 + C$, för någon konstant C , så alla potentialer till ett vektorfält är identiska, så när som på en konstant (precis som primitiva funktioner till en funktion).

En potential till gravitationskraftfältet kring en punktmassa m i punkten $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ges av

$$\Phi(x, y, z) = \frac{km}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Undersök på egen hand att $\nabla\Phi(x, y, z)$ blir vektorfältet från förra kapitlet.

För att visa att ett vektorfält är konservativt kan man försöka hitta en potential till det. Vi tar ett exempel.

Exempel 68. Visa att vektorfältet $\vec{F} = (3x^2y^2z + 2xy, 2x^3yz + x^2 + 1, x^3y^2)$ är konservativt och bestäm en potential till det.

En eventuell potential Φ uppfyller $\nabla\Phi = \vec{F}$, dvs

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2xy \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^3yz + x^2 + 1 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = x^2y^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Den sista ekvationen ger } \Phi(x, y, z) = x^3y^2z + f(x, y). \\ \text{Partiell derivering med avseende på } x \text{ ger sedan} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2y^2z + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \text{och efter jämförelse med första ekvationen inser vi att} \\ f'_x = 2xy, \text{ vilket implicerar att } f(x, y) = x^2y + g(y). \end{array}$$

Partiell derivering av Φ med avseende på y ger slutligen

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x^3y^2z + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz + x^2 + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y + C$$

Så vektorfältet är konservativt med potentialen $\Phi(x, y, z) = x^3y^2z + x^2y + y + C$

Att bestämma potentialen till ett vektorfält kan leda till ganska komplicerade räkningar. Som tur är finns det ett enkelt villkor som måste vara uppfyllt för att ett vektorfält

ska vara konservativt (villkoret är lokalt och inte tillräckligt för att visa att fältet ska vara konservativt). (dvs. fältet är konservativt \Rightarrow villkoret är uppfyllt, men villkoret är uppfyllt $\not\Rightarrow$ fältet är konservativt).

Om ett planärt vektorfält $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ är konservativt så gäller, för varje potential $\Phi(x, y)$ till \vec{F} ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

eftersom blandade partiella derivator är lika. Ett planärt vektorfält kan alltså bara vara konservativt på D om villkoret $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ är uppfyllt i alla punkter $(x, y) \in D$.

För vektorfält $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ i rummet ges motsvarande nödvändiga villkor för att \vec{F} ska vara konservativt av de tre ekvationerna

$$\underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}}_{\text{Tänk } \nabla \times F}$$

som alla måste vara uppfyllda för att \vec{F} ska vara konservativt

Föreläsning 24: Kurvintegraler av vektorfält

Betrakta en partikel som rör sig längs en kurva γ i ett kraftfält som påverkar partikeln med kraften $\vec{F}(\vec{r})$ där \vec{r} är partikelns läge. Vi vill beräkna det arbete som fältet uträttar vid partikelns förflyttning längs γ . Vi parametriserar kurvan γ så att $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ längs kurvan. Välj sedan en partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ av parameterintervallet och betrakta delintervallet $[t_{k-1}, t_k]$. Om intervallet är kort, så kan vi betrakta kraften $\vec{F}(\vec{r}(t))$ som konstant för $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Under delintervallet $[t_{k-1}, t_k]$ utför fältet arbetet

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})) \approx \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \Delta t_k$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \Delta t_k$$

Det totala arbetet blir Riemannsumman

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

som konvergerar mot integralen

när vi låter längden av delintervallen i partitionen gå mot noll.

För ett infinitesimalt tidsintervall dt , så blir $\vec{r}'(t)dt$ en infinitesimal sträcka längs kurvan som vi skulle kunna beteckna $d\vec{r}$. Man använder därför beteckningen

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

för en parametrisering $\vec{r}(t)$ av γ .

Eftersom

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

så kan kurvintegralen av ett vektorfält också skrivas

$$\underbrace{\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Differentialform}} = \int_a^b (F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

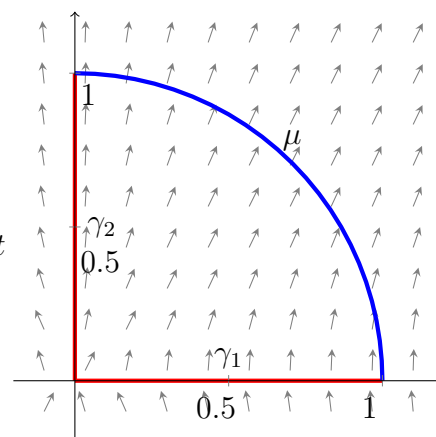
Kurvintegraler längs två olika kurvor mellan ett par punkter har i allmänhet olika värden som vi ser i nästa exempel.

Exempel 69. Beräkna kurvintegralen av differentialformen $xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$ från $(1, 0)$ till $(0, 1)$ längs kurvan μ respektive kurvan $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

För μ väljer vi parametreringen $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi/2]$ och får enligt definitionen

$$\int_{\mu} xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = \int_0^{\pi/2} (-\sin^2(t) \cos(t) + \cos(t)) \, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3} \sin^2(t) + \sin(t) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

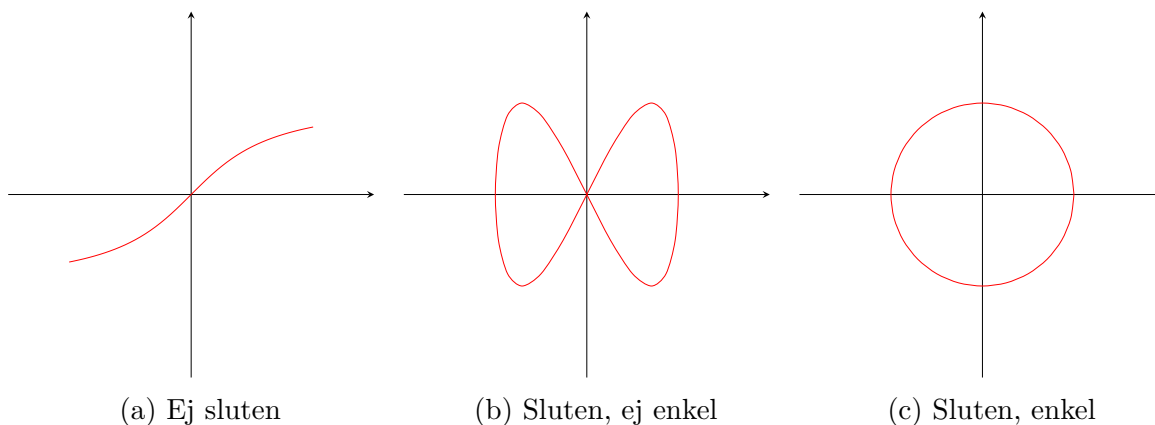


För γ_1 respektive γ_2 tar vi parametriseringarna $(x, y) = (1 - t, 0)$, $t \in [0, 1]$ respektive $(x, y) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$. Vi får

$$\int_{\gamma} xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = \int_0^1 \underbrace{((1-t) * 0 * (-1))}_{0} + \underbrace{(((1-t)^2 * 0^2) * 0)}_0 \, dt + \int_0^1 \underbrace{0 * t * 0}_0 + \underbrace{(0^2 + t^2) * 1}_{t^2} \, dt$$

$$= 0 + \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Innan vi går vidare behöver vi ett par definitioner. En kurva vars start- och slutpunkt sammanfaller kallas en sluten kurva. Kurvan $\gamma_1 + \gamma_2 = \mu$ i exemplet ovan är således sluten. Om en sluten kurva inte skär sig själv i någon ytterligare punkt kallas den enkel, så kurvan i exemplet ovan är också enkel.



Vi ska nu visa att för konservativa vektorfält så är kurvintegralen mellan två punkter oberoende av vilken kurva mellan dessa båda punkter man väljer och att beräkning av kurvintegraler enkelt kan göras med hjälp av vektorfältets potential.

Sats 24. Låt \vec{F} vara ett konservativt vektorfält i D med potential Φ . För varje kurva $\gamma \in D$ mellan \vec{a} och \vec{b} , så gäller:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Notera likheten med analysens fundamentalsats. Potentialen är motsvarigheten till den primitiva funktionen. Satsen implicerar att kurvintegralen mellan två punkter är oberoende av val av kurva. För slutna kurvor γ kallas kurvintegralen av \vec{F} längs γ för cirkulationen av \vec{F} längs γ och betecknas

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Om fältet är konservativt gäller alltså att ovanstående integral är lika med noll (då ändpunkterna sammanfaller med varandra).

Bevis. Låt $\vec{r}, \quad t \in [\alpha, \beta]$ vara en parametrisering av kurvan γ från $\vec{a} = \vec{r}(\alpha)$ till $\vec{b} = \vec{r}(\beta)$. Enligt kedjeregeln gäller

$$\frac{d}{dt}\Phi(\vec{r}(t)) = \Phi'_1(\vec{r}(t))r'_1(t) + \dots + \Phi'_3(\vec{r}(t))r'_3(t) = \nabla\Phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

Insättning av detta samband i kurvintegralen av \vec{F} ger då:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla\Phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\Phi(\vec{r}(t)) dt \\ &= \Phi(\vec{r}(\beta)) - \Phi(\vec{r}(\alpha)) = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}) \end{aligned}$$

□

Det är bara för konservativa vektorfält som kurvintegraler är vägoberoende. Låt \vec{F} vara ett vektorfält definierat på ett bågvis sammanhängande område D . Antag att kurvintegralen mellan två punkter är vägoberoende. Fixera punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och definiera, för varje $(x, y, z) \in D$ funktionen

$$\Phi(x, y, z) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där γ är en godtycklig kurva i D mellan (x_0, y_0, z_0) och (x, y, z) . Välj $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, där γ_1 går mellan (x_0, y_0, z_0) och (x_1, y, z) och γ_2 är en rät linje mellan (x_1, y, z) och (x, y, z) . γ är oberoende av x , så

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x F_1(t, y, z) dt = F_1(x, y, z) \end{aligned}$$

Analogt inses att $\Phi'_y = F_2$ och $\Phi'_z = F_3$, så $\nabla\Phi = \vec{F}$. Vi har alltså visat att om kurvintegralen av \vec{F} är vägoberoende på D så måste \vec{F} vara konservativt på D .

Sats 25. $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ är vägoberoende på $D \iff \vec{F}$ är konservativt på D

Exempel 70. Beräkna

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

om γ är halvcirkeln $\vec{r}(t) = (2 + \cos(t), 1 + \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$ och $\vec{F}(x, y) = (y + 2x, x)$.

Eftersom $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, så misstänker vi att fältet är konservativt och vi vill därför hitta en potential Φ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = y + 2x \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Andra ekvationen ger } \Phi(x, y) = xy + f(x), \text{ vilket} \\ \text{efter instättning i första ekvationen ger} \\ \phi'_x = y + f'(x) = y + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow \\ f(x) = x^2 + C \end{array}$$

Vi har alltså $\Phi(x, y) = xy + x^2 + C$. Kurvans startpunkt är $(3, 1)$ och dess slutpunkt är $(1, 1)$, och eftersom \vec{F} är konservativt på \mathbb{R}^2 , så gäller:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(1, 1) - \Phi(3, 1) = 1 * 1 + 1^2 - (3 * 1 + 3^2) = -10$$

Föreläsning 25: Greens Formel

Vi ska nu visa ett samband mellan kurvintegraler för slutna kurvor i planet och dubbelintegraler över området som innesluts av kurvan i fråga.

Definition 29. För ett kompakt område D i planet, så sägs γ vara den positivt orienterade randen till D om γ är en kurva som genomlöper hela ∂D och för vilken D alltid ligger till vänster om γ .

Sats 26. Greens Formel. Låt $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ vara ett planärt vektorfält med kontinuerliga partiella derivator. För ett kompakt område D i planet med positivt orienterad rand γ så gäller

$$\oint_{\gamma} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Bevis. Precis som när vi undersökte dubbelintegraler, så antar vi att vi kan dela upp området D i ändligt många delområden på formen

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$$

Vi börjar med att på valfritt delområde E visa "F₁-delen" av satsen, dvs.

$$\oint_{\gamma_E} F_1(x, y) dx = \iint_E -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy \quad (*)$$

Vi beräknar dubbelintegralen i högerledet:

$$\iint_E -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy = \int_a^b (-F_1(x, g(x)) + F_1(x, f(x))) dx$$

Å andra sidan kan kurvan γ_1 parametreras som $\vec{r}(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$ och kurvan γ_2 kan parametreras som $\vec{r}(t) = (t, g(t))$, $t \in [a, b]$, så

$$\int_{\gamma_1} F_1(x, y) dx = \int_a^b F_1(t, f(t)) dt, \quad \int_{\gamma_2} F_1(x, y) dx = -\int_a^b F_1(t, g(t)) dt$$

Eftersom integralerna över kurvorna γ_1 , γ_2 båda är lika med noll, så har vi visat (*) för varje delområde E .

"F₁-delen" av satsen gäller på hela D eftersom dubbelintegralerna adderas och kurvintegralerna över de linjer som tillhör randen av två delområden men inte randen av D tar ut varandra, så summan av integralerna över de interna linjerna är lika med integralen över unionen av linjerna.

För att visa "F₂-delen" av satsen delar man upp D i ändligt många delområden på formen

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(y) \leq x \leq g(y), a \leq y \leq b\}.$$

Detaljerna utelämnas

□

Exempel 71. Bestäm arean under cykloiden

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Eftersom vi inte kan lösa ut y som en funktion av x så fungerar inte tidigare metoder. Greens formel ger dock att

$$\oint_{\gamma} y \, dx = \iint_D -1 \, dx dy = -\text{Areal av } D.$$

Så arean är

$$\begin{aligned} A &= - \int_{\gamma} y \, dx = \int_0^{2\pi} \underbrace{(1 - \cos(t))}_y \underbrace{(1 - \cos(t))}_{dx} dt + \int_0^{2\pi} \underbrace{0}_y \underbrace{(-1)}_{dx} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos(t) + \cos^2(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} - 2 \cos(t) \right) dt \\ &= \left[\frac{3t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} - 2 \sin(t) \right]_0^{2\pi} = 3\pi \end{aligned}$$

Vi tar nu ett exempel på ur beräkning av kurvintegraler kan förenklas med hjälp av Greens formel.

Exempel 72. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} -y^3 \, dx + x^3 \, dy,$$

där γ är den positivt orienterade randen till cirkelsektorn $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq x$.

Problemet kan lösas genom att parametrisera de tre randstyckena, men med Greens formel blir räkningarna mycket enklare.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \underbrace{-y^3}_{F_1} \, dx + \underbrace{x^3}_{F_2} \, dy &= \iint_D \underbrace{3x^2}_{\frac{\partial F_2}{\partial x}} - \underbrace{(-3y^2)}_{\frac{\partial F_1}{\partial y}} \, dx dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 3r^2 r \, dr \\ &= 3 \frac{\pi}{4} \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

Vi har tidigare sett att om ett planärt vektorfält är konservativt i D , så gäller $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i alla punkter i D (Greens formel ger då $\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$).

Definition 30. En öppen mängd D är enkelt sammanhängande om den är bågvis sammanhängande och om varje enkel sluten kurva $\gamma \in D$ avgränsar ett område som helt ligger i D (med andra ord om D saknar hål”).

Sats 27. Om det planära vektorfältet \vec{F} uppfyller $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i en enkelt sammanhängande mängd D , så är \vec{F} konservativt i D .

Bevis. Tag en godtycklig kurva γ i D . Eftersom D är enkelt sammanhängande så är mängden Ω , som innesluts av γ , en delmängd av D . Alltså gäller $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i alla punkter i Ω och Greens formel ger;

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Kurvintegralen är vägoberoende} \\ \vec{F} \text{ är konservativt i } D. \end{array}$$

□

Vi avslutar med att undersöka det planära magnetfältet kring en oändligt lång ledare genomfluten av en konstant ström. Bortsett från en konstant ger fältet av

$$\vec{B}(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

utanför origo gäller:

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial B_1}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

så $\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{\partial B_1}{\partial y}$ utanför origo. På en kompakt, enkelt sammanhängande mängd som inte innehåller origo, så är \vec{B} alltså konservativt och integralen över randen av denna mängd är således lika med noll.

På en cirkel med radie R och centrum i origo gäller, eftersom cirkeln har parametriseringen $(x, y) = (R \cos(t), R \sin(t))$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{B} \cdot d\vec{r} &= - \int_0^{2\pi} \frac{(-R \sin(t), R \cos(t))}{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} \cdot (-R \sin(t), R \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

oberoende av cirkelns radie R .

Låt nu γ vara en godtyckligt enkel sluten kurva som går ett varv runt origo i positiv riktning (dvs. moturs). Kurvan omsluter då en cirkulär kurva σ kring origo. Greens formel ger:

$$\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right)}_{0 \text{ överallt i } D \text{ som ej innehåller origo}} dx dy - \int_{\sigma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{-\sigma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

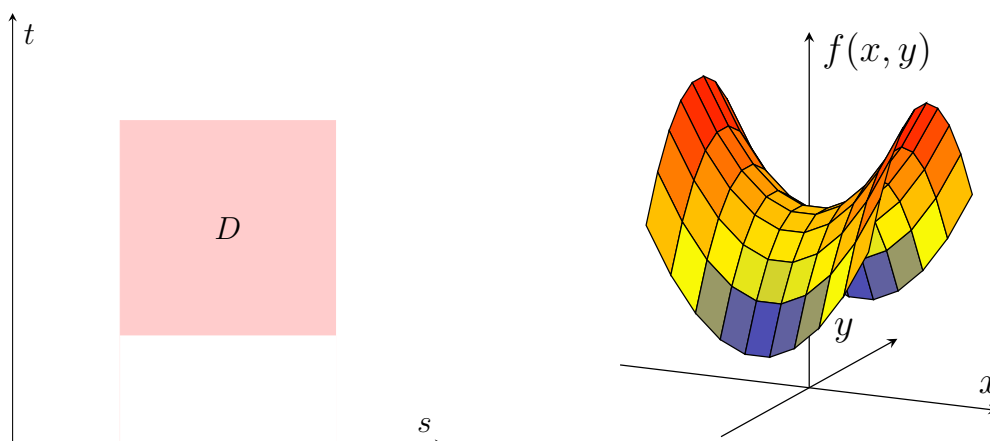
Föreläsning 26: Ytintegraler

Precis som vi kunde utvidga enkelintegraler från att vara definierade på intervall till att vara definierade på krökta kurvor så kan vi utvidga dubbelintegraler från att vara definierade på mängder i planet till att vara definierade på krökta ytor. Vi får då ytintegraler.

Vi har tidigare under kursen stött på ytor i form av grafen till en funktion $f(x, y)$ av två variabler och också som nivåytor $f(x, y, z) = C$ till en funktion av tre variabler. Vi kan även definiera ytor med hjälp av en parametrisering. Eftersom ytor är tvådimensionella objekt, så behövs två parametrar för att beskriva en yta.

Definition 31. En parametriserad yta bestäms av en funktion $\vec{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ och en definitionsmängd D för (s, t) .

Notera att om vi fixerar en av parametrarna så får vi funktioner av typen $\vec{r}(s, t_0)$ och $\vec{r}(s_0, t)$, som båda beskriver kurvor på ytan (se figuren till höger). Ytan i skissen är inte grafen av en funktion $f(x, y)$ eftersom vissa värden på (x, y) motsvaras av flera olika z -värden. Grafen till en funktion $f(x, y)$ kan parametriseras med $r(s, t) = (s, t, f(s, t))$, dvs. genom att vi identifierar ena parametern med x och den andra med y .



Exempel 73. Parametriseringen $\vec{r}(s, t) = (R \sin(s) \cos(t), R \sin(s) \sin(t), R \cos(s))$, $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$ motsvarar en sfär med radie R och centrum i origo (sfäriska

koordinater). Kurvorna $\vec{r}(s, t_0)$ är kurvor med konstant längdgrad och kurvorna $\vec{r}(s_0, t)$ är kurvor med konstant breddgrad.

Låt nu S vara en yta i rummet och f en funktion som är definierad i alla punkter på ytan S . En ytintegral av f över S betecknas

$$\iint_S f(x, y, z) dS.$$

Hur ska vi göra för att beräkna denna? Dela in S i n stycken delytor med areorna $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots$ och låt (x_i, y_i, z_i) vara en punkt på ytan S_i . Ytintegralen har då Riemannsumman

$$\sum_{k=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \rightarrow \iint_S f(x, y, z) dS$$

Vi kan uttrycka (x_i, y_i, z_i) med hjälp av en parametrisering av ytan och skulle vilja kunna uttrycka även ΔS_i med parametriseringen. Enligt samma resonemang som vi använde när vi visade att Jacobianen kunde tolkas som areaförstoringen för en avbildning, så gäller

$$\Delta S_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \Delta s \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Delta t \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| \Delta s \Delta t$$

Alltså kan ytintegralen uttryckas med hjälp av parametriseringen av S som

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt \quad \left(dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt \right)$$

vektorprodukten i integranden kan beräknas med hjälp av en determinant

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| &= \left\| \begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{array} \right\| = \left\| \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} & \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} & \\ \hline & & \dots, \dots \end{array} \right) \right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right)^2} \end{aligned}$$

Formeln för arean av grafen till en funktion av två variabler som vi tog fram som en tillämpning av dubbelintegraler är ett specialfall av formeln ovan. Grafen till en funktion har parametriseringen $\vec{r}(s, t) = (s, t, f(s, t))$ så

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = (1, 0, f'_1(s, t)), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = (0, 1, f'_2(s, t))$$

och

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt = \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & f'_1(s, t) \\ 0 & 1 & f'_2(s, t) \end{matrix} \right\| ds dt = |(-f'_1, -f'_2, 1)| ds dt \\ = \sqrt{(f'_1(s, t))^2 + (f'_2(s, t))^2 + 1^2} ds dt$$

precis som förväntat. Notera också att arean av en parametriserad yta ges av

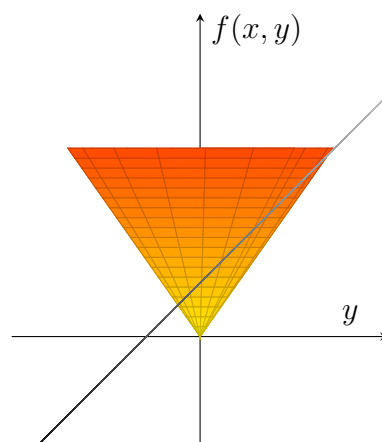
$$A = \iint_S dS = \iint_S \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt$$

Exempel 74. Antag att konen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ har ytdensiteten $\rho(x, y, z) = y^2$. Bestäm massan för den del av konen som ligger under planet $z = 1 + y$.

Den sökta massan ges av ytintegralen

$$\iint_S y^2 dS$$

där S är delen av konen som ligger under planet $z = 1 + y$. Eftersom konen är grafen av en funktion $z = f(x, y)$, där $f(x, y) = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$, så kan vi bestämma dS med hjälp av de partiella derivatorna av funktionen f .



$$f'_1(x, y) = \frac{1}{2}(2(x^2 + y^2))^{-1/2} 4x = \frac{2x}{z}, \quad f'_2(x, y) = \frac{2y}{z} \Rightarrow \\ dS = \sqrt{1 + (f'_1)^2 + (f'_2)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{z}\right)^2 + \left(\frac{2y}{z}\right)^2} dx dy \\ = \sqrt{1 + 2} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

För att veta vilken yta i xy -planet vi ska integrera över så bestämmer vi projektionen av skärningskurvan mellan konen och planet i fråga.

$$1 + y = \sqrt{2(x^2 + y^2)} \Rightarrow 1 + 2y + y^2 = 2(x^2 + y^2) \Rightarrow 2x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \\ \Rightarrow 2x^2 + (y - 1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{(y - 1)^2}{2} = 1$$

Integrationsområdet kan parametreras $(x, y) = (r \cos(\theta), 1 + \sqrt{2}r \sin(\theta))$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Variabelbytet från (x, y) till (r, θ) har Jacobianen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sqrt{2} \sin(\theta) & \sqrt{2}r \cos(\theta) \end{vmatrix} = \sqrt{2}r \cos^2(\theta) + \sqrt{2}r \sin^2(\theta) = \sqrt{2}r$$

så

$$\begin{aligned}
 \iint_S y^2 dS &= \iint_S y^2 \sqrt{3} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \sqrt{2}r \sin(\theta))^2 \sqrt{3} \sqrt{2} r dr d\theta \\
 &= \sqrt{6} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + 2\sqrt{2}r^2 \sin(\theta) + 2r^3 \sin^2(\theta)) dr d\theta = \left\{ \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0 \right\} \\
 &= \sqrt{6} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r + 2r^3 \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) dr d\theta = \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = 0 \right\} \\
 &= 2\pi\sqrt{6} \int_0^1 (r + r^3) dr = 2\pi\sqrt{6} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{2} \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

Om ytan som vi vill integrera över är en nivåyta $g(x, y, z) = 0$ till en funktion av tre variabler, så är det inte säkert att det går att parametrisera ytan på ett lätt sätt. Vi har dock tidigare under kursen sett att, om γ är vinkeln mellan ytans normalvektor och z -axeln, så gäller:

$$dx dy = |\cos(\gamma)| dS \quad \Rightarrow \quad dS = \left| \frac{1}{\cos(\gamma)} \right| dx dy = \frac{|\vec{n}| |\vec{e}_3|}{|\vec{n} \cdot \vec{e}_3|} dx dy$$

Normalvektorn till en nivåyta $g(x, y, z) = 0$ är gradienten $\nabla g(x, y, z)$, så i detta fall blir $\vec{n} \cdot \vec{e}_3 = g'_3(x, y, z)$, så ytelementet dS kan skrivas

$$dS = \frac{|\nabla g(x, y, z)|}{|g'_3(x, y, z)|} dx dy.$$

Föreläsning 27: Flödesintegraler

Flödesintegraler är en speciell typ av ytintegraler som används för att beräkna flöden av exempelvis materia eller energi genom en yta. För att definiera flödesintegraler måste vi först införa begreppet orientering av en yta.

Definition 32. En slät yta är orienterbar om det finns ett enhetsvektorfält \hat{N} som varierar kontinuerligt och som för varje punkt P på ytan uppfyller att $\hat{N}(P)$ är vinkelrät mot ytan. \hat{N} ger upphov till en orientering av ytan. Vi kallar den sida som \hat{N} pekar ut från den positiva sidan av ytan och den andra sidan av ytan för den negativa sidan av ytan.

En yta kan vara sluten och sakna randpunkter (som sfären) eller ha en rand. För en sluten yta väljer man ofta \hat{N} så att den positiva sidan blir utsidan av ytan. För en orienterad yta med rand, så ger orienteringen upphov till en orientering av randen. Randen γ är positivt orienterad om γ är en kurva som genomlöper hela ∂D och för vilken D , sett

från positiva sidan av ytan, alltid ligger på vänster sida av γ (\hat{N} och γ är relaterade med högerhandsregeln, där högerhandens tumme är normalvektorns riktning, och pekfingeret är riktningen i vilken γ genomlöper randen till ytan).

Även styckvis släta ytor är orienterbara (till exempel en kub i rummet) om \hat{N} ger uppov till olika orienteringar på randstyckena. Notera att alla ytor inte är orienterbara. Möbiusbandet, exempelvis, har bara en enda sida.

Vi såg i förra kapitlet att en yta kunde parametreras som s, t och att de partiella derivatorna var parallella med ytan. Vektorn

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

är således en normalvektor till ytan. Alltså kan vi sätta

$$\hat{N} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|}.$$

Om \hat{N} med denna definition skulle visa sig peka åt fel håll så kan helt enkelt byta plats på parametrarna s och t , varvid \hat{N} pekar åt motsatt håll.

Låt nu \vec{F} vara ett vektorfält som betecknar ett flöde av materia (enhet kg/m^2s). Vi vill bestämma den mängd materia som flödar genom ytan S per tidsenhet. Betrakta ett infinitesimalt ytelement dS på ytan. Under tidsintervallet Δt så strömmar genom ytelementet dS den materia som ryms i en cylinder med basarea dS och höjd

$$|\vec{F}(P)|\Delta t \cos(\gamma) = |\vec{F}(P)|\Delta t \frac{\vec{F}(P) \cdot \hat{N}}{|\vec{F}(P)||\hat{N}|} = \vec{F}(P) \cdot \hat{N} \Delta t.$$

Cylindern innehåller massan $\vec{F}(P) \cdot \hat{N} \Delta t dS$, så flödet per tidsenhet genom ytelementet dS är $\vec{F}(P) \cdot \hat{N} dS$. Flödet av \vec{F} genom hela ytan S ges av ytintegralen

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS \text{ vilket ibland betecknas } \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{så } d\vec{S} = \hat{N} dS$$

Ovanstående integraler är flödesintegraler. Om ytan S är sluten används ofta beteckningarna

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS \text{ och } \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{jämför med kurvintegraler})$$

Från formeln för \hat{N} ovan och formeln för dS från förra kapitlet får vi:

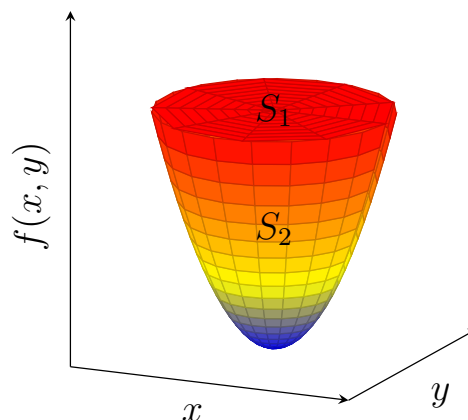
$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS &= \iint_S \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|} \right) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| ds dt \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt. \end{aligned}$$

Vi ägnar resten av kapitlet till att räkna några exempel på flödesintegraler.

Exempel 75. Beräkna flödet ut ur området $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ för fältet $\vec{F} = (x, y, 3)$.

Området begränsas av två ytor. Dels planet $z = 4$, och dels av paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Totala flödet är summan av flödesintegralerna över dessa båda ytor. För planet är den utåtriktade normalen $\hat{N} = (0, 0, 1)$ och flödesintegralen blir

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS &= \iint_{S_1} (x, y, 3) \cdot (0, 0, 1) \, dS = \iint_{S_1} 3 \, dS \\ &= 3 \iint_{S_1} dS = 3\pi 2^2 = 12\pi \end{aligned}$$



eftersom S_1 är en cirkelskiva med radie 2.

Paraboloidytan S_2 har parametriseringen $\vec{r}(s, t) = (s, t, s^2 + t^2)$ där parametrarnas definitionsmängd är $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 4\}$ nu gäller

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = (1, 0, 2s), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = (0, 1, 2t), \quad \text{och} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2s \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = (-2s, -2t, 1)$$

Eftersom z -komponenten är positiv är denna vektor dock riktad in i området K . Den motsvarande yttre normalen är $(2s, 2t, -1)$. Flöderintegralen över S_2 blir:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS &= - \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \, ds dt = \iint_D (s, t, 3) \cdot (2s, 2t, -1) \, ds dt \\ &= \iint_D (2s^2 + 2t^2 - 3) \, ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^2 - 3)r \, dr d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{2r^4}{4} - \frac{3r^2}{2} \right]_0^2 = 2\pi \left(\frac{2^4}{2} - \frac{3}{2} \cdot 2^2 \right) = 4\pi \end{aligned}$$

Det totala flödet är $12\pi + 4\pi = 16\pi$

Exempel 76. Beräkna flödet av fältet $\vec{F} = (x + y, z, 0)$ ut ur sfären S med radie R och centrum i origo.

Den yttre enhetsnormalen i en punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ på sfären kan skrivas $\hat{N} = \vec{r}/R$ (ty $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Alltså blir flödesintegralen

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_S (x + y, z, 0) \cdot (x, y, z) \frac{1}{R} \, dS = \iint_S (x^2 + xy + yz) \frac{1}{R} \, dS$$

Av symmetriskäl så måste

$$\iint_S xy \, dS = \iint_S yz \, dS = 0,$$

så bara integralen av x^2 återstår. Vi hade här kunnat parametrisera ytan med sfäriska koordinater, man använder istället ett knep. Av symmetriskäl så gäller:

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 \, dS &= \iint_S y^2 \, dS = \iint_S z^2 \, dS = \frac{1}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS \\ \Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS &= \frac{1}{3} \iint_S \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{R^2} \frac{1}{R} \, dS = \frac{R}{3} \underbrace{\iint_S dS}_{\text{Arean av } S} \\ &= \frac{R}{3} 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

I det första exemplet behövde vi bara parametrisera den ena ytan eftersom det var lätt att bestämma den plana ytans gradient. Eftersom den välvda ytan var grafen till en funktion av två variabler, hade vi kunnat bestämma normalen utan parametrisering eftersom vi tidigare visat att normalen till en graf $z = f(x, y)$ ges av $(f'_1(x, y), f'_2(x, y), -1) = (2x, 2y, -1)$. I förra kapitlet visade vi också att $dS = \sqrt{1 + (f'_1(x, y))^2 + (f'_2(x, y))^2} \, dx dy$, så

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS &= \pm \iint_S \vec{F} \cdot \frac{(f'_1, f'_2, -1)}{\sqrt{1 + (f'_1)^2 + (f'_2)^2}} \sqrt{1 + (f'_1)^2 + (f'_2)^2} \, dx dy \\ &= \pm \iint_S \vec{F} \cdot (f'_1, f'_2, -1) \, dx dy \end{aligned}$$

I det andra exemplet behövde vi inte heller använda någon parametrisering tack vare alla symmetrier som problemet hade. Om ytan ges av $f(x, y, z) = 0$ kan följande formel användas:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_S \vec{F} \cdot \frac{\nabla f}{f'_3} \, dx dy$$

Föreläsning 28: Divergens och rotation

Vi har under kursen sett att ur många aspekter så utgör gradienten $\nabla\Phi(x, y, z)$ av ett skalärfält $\Phi(x, y, z)$ motsvarighet till derivata.

För vektorfält $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ finns nio olika partiella derivator av första ordningen. Vi ska nu studera två speciella kombinationer av dessa partiella derivator lite mer noggrant, eftersom de, liksom gradienten, visar sig ha många

användningsområden.

Definition 33. För ett vektorfält $\vec{F}(x, y, z)$ så definieras divergensen och rotationen av

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \text{resp.} \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Notera att sista komponenten i rotationsvektorn är samma som integranden i Greens formel. Vi återkommer till detta senare. Gradienten, divergensen och rotationen kan alla uttryckas enkelt med hjälp av symbolen nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

som är en vektorvärd differentialoperator. En operator är en funktion vars definitions- och värdemängder är mängder av funktioner. En differentialoperator deriverar elementen i definitionsmängden på något lämpligt sätt (i fallet med nabla partiellt).

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} \Phi$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3)^T = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \operatorname{rot} \vec{F}$$

Gradienten av ett skalärfält kunde tolkas som den riktning i vilken skalärfältet snabbast ökade. Vi ska nu titta på hur divergensen av ett vektorfält kan ges fysikalisk mening.

Sats 28. Låt \vec{F} vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält. Låt P vara en punkt i rummet och låt V vara ett område med volym ΔV som omger P .

$$(\operatorname{div} \vec{F})(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS \quad (\text{HL är utflödet per volymenhet})$$

Bevis. Man kan visa att satsen gäller oavsett vilken form V har, så vi antar att V är ett rätblock med sidor Δx , Δy , Δz . Flödet i z -led är:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot (-\vec{e}_3) \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{e}_3 \, dS$$

S_1 och S_2 kan projiceras på S_z i xy -planet

$$\begin{aligned} &= \iint_{S_z} (F_3(x, y, z_0 + \frac{\Delta z}{z}) - F_3(x, y, z_0 - \frac{\Delta z}{z})) dx dy \\ &= (F_3(x_1, y_1, z_0 + \frac{\Delta z}{z}) - F_3(x_1, y_1, z_0 - \frac{\Delta z}{z})) \Delta x \Delta y \\ &= \frac{\partial F_3}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial F_3}{\partial z}(P') \Delta V, \end{aligned}$$

för någon punkt $P' \in V$. Om vi krymper volymen ΔV så kommer $P' \rightarrow P$, så flödet i z -led per volymenhet konvergerar mot $\partial F_3 / \partial z (P)$. På samma sätt konvergerar flödet i y -led mot $\partial F_2 / \partial y (P)$ osv., så totala utflödet per volymenhet blir $\text{div } \vec{F}(P)$. \square

Divergensen av ett vektorfält motsvarar alltså utflödet per volymenhet. Om vektorfältet beskriver hastighetsfältet för en strömmande vätska, så innebär ett positivt utflöde ur ett område V att vätska måste produceras inuti området. Divergensen är alltså ett mått på produktionen per volymenhet, även kallad källtätheten, i en punkt. Om $\text{div } \vec{F} > 0$ i punkten P så är P en källa. Om $\text{div } \vec{F} < 0$ i punkten P så är P en sänka.

Definition 34. Ett vektorfält \vec{F} är källfritt (solenoidalt) i D om $\text{div } \vec{F}(P) = 0, \quad \forall P \in D$

I nästa kapitel visar vi Gauss sats som relaterar utflödet ur en sluten yta i rummet till trippelintegralen av källtätheten (divergensen) över området som innesluts av ytan. Vi ska härnäst ge även rotationen an ett vektorfält fysikalisk mening.

Sats 29. Låt \vec{F} vara ett kontinuerligt deriverbart vektorvärt. Låt P vara en punkt i rummet, och låt S vara en plan disk i rummet med centrum i P , area ΔS , normal \hat{N} och positivt orienterad rand C . Då gäller

$$\hat{N} \cdot (\text{rot } \vec{F})(P) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{HL är cirkulationen per volymenhet})$$

Bevis. Vi visar ett specialfall med Greens formel. Om normalvektorn $\hat{N} = \vec{e}_3$, så är cirkulationen

$$\oint_{C_z} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_z} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{S_z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (P') \Delta S_z$$

Om vi nu krymper arean ΔS_z , så kommer $P' \rightarrow P$ och

$$\frac{1}{\Delta S_z} \oint_{C_z} \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (P) = \vec{e}_3 \cdot (\text{rot } \vec{F})(P) = \hat{N} \cdot (\text{rot } \vec{F})(P)$$

\square

Rotationen av ett vektorfält motsvarar alltså cirkulationen per areaenhet. Det är naturligt att tala om $(\text{rot } \vec{F})(P)$ som virveldensiteten av fältet \vec{F} i punkten P . Riktningen av $(\text{rot } \vec{F})(P)$ indikerar den axel kring vilken rotationen sker och beloppen av $|(\text{rot } \vec{F})(P)|$ är ett mått på virvelns styrka. Uttrycket $\hat{N} \cdot (\text{rot } \vec{F})(P)$ beskriver om ett litet skovelhjul i P med normalvektor \hat{N} börjar rotera kring sin axel.

Exempel 77. Fälten $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ och $\vec{B}(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$ har samma fältlinjer men ger inte båda upphov till rotation.

För fältet \vec{F} har vi

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2),$$

så ett skovelhjul i xy -planet (med normalvektor \vec{e}_3) kommer att börja rotera om det utsätts för fältet \vec{F} . Rotationen kommer att bli den samma oavsett vilken punkt vi placerar skovelhjulet i. För fältet \vec{B} har vi istället

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

alltså gäller $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$ i alla punkter P (utom origo). Ett skovelhjul som utsätts för fältet \vec{B} kommer alltså inte att börja rotera.

Definition 35. Ett vektorfält \vec{F} är virvelfritt (irrotational) i D om $(\text{rot } \vec{F})(P) = \vec{0}$, $\forall P \in D$. Vi har tidigare visat att konservativa vektorfält har denna egenskap (omvändningen gäller för enkelt sammanhängande områden).

Föreläsning 29: Gauss sats (divergenssatsen)

Vi ska nu visa det resultat som vi annonserade i förra kapitlet, nämligen relationen mellan flödet genom en sluten yta och källtätheten i området som innesluts av ytan.

Sats 30. *Gauss sats. Låt \vec{F} vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält definierat en öppen mängd D i rummet vars rand S är en orienterad, sluten yta med utåtriktad normal*

\hat{N} . Då gäller

$$\iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS$$

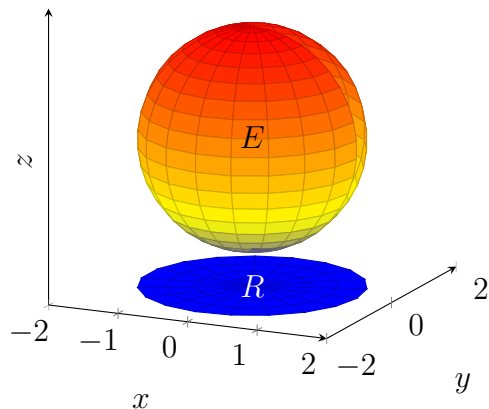
Bevis. Vi visar satsen under det extra villkoret att området D kan delas upp i områden på formen

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) \leq z \leq g(x, y), \quad (x, y) \in R\}$$

och att motsvarande uppdelningar kan göras längs de andra koordinatriktingarna. Om vi lyckas visa att

$$\iiint_E \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS, \quad (*)$$

så kan vi sedan göra motsvarande bevis för F_1 , och F_2 och satsen följer eftersom flödena mellan två delområden med gemensam rand tar ut varandra (jämför beviset av Greens formel).



$$\iiint_E \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_R \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_R (F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, f(x, y))) dx dy$$

Ytan S_1 kan parametriseras $(x, y, z) = (x, y, g(x, y))$ för $(x, y) \in R$, så vi får

$$\hat{N} dS = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \Rightarrow \iint_{S_1} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iint_R F_3(x, y, g(x, y)) dx dy$$

och på motsvarande sätt gäller det att på ytan S_2 får vi:

$$\hat{N} dS = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dx dy \Rightarrow \iint_{S_2} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = - \iint_R F_3(x, y, f(x, y)) dx dy$$

På sidoytan S_3 är \hat{N} riktad i \vec{e}_1 -led eller \vec{e}_2 -led, så där gäller $(0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = 0$ och dessa ytor ger inget bidrag till flödesintegralen av $(0, 0, F_3)$. Vi har visat (*) och därmed hela satsen. □

Exempel 78. Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F} = (xz^2, 2xy, z^2 + 2)$ ut ur enhetssfären.

Divergensen av \vec{F} ges av

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z^2 + 3x + 2z \quad \text{så Gauss sats ger}$$

$$\oiint_{x^2+y^2+z^2=1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2=1} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \iiint_{x^2+y^2+z^2=1} (z^2 + 2x + 2z) dx dy dz$$

Funktionerna $2x$ och $2z$ är udda i x - respektive z -led och eftersom enhetsfäran är symmetrisk kring origo så blir trippelintegralen av dessa funktioner noll. Sfäriska koordinater ger nu: $(x, y, z) = (r \sin(\phi) \cos(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\phi))$,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} = r^2 \sin(\phi),$$

så

$$\begin{aligned} \iiint_{x^2+y^2+z^2=1} z^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 (r \cos(\phi))^2 r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^1 r^4 dr \right) \left(\int_0^{\pi} \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\phi \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 \left[-\frac{\cos^3(\phi)}{3} \right]_0^{\pi} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{5} \frac{2}{3} 2\pi = \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

(Direkt beräkning hade blivit mycket mer komplicerat.)

Vi tar nu exempel som visar att Gauss sats kan vara användbar för att beräkna flödesintegraler även genom ytor som inte är slutna, men som går att "sluta till" genom att lägga till ett ytstycke med enkel geometri.

Exempel 79. Beräkna flödet av $\vec{F} = (-e^{yz}, e^{xz}, z^2)$ ut ur den koniska ytan T som bestäms av $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

Ytan T är inte sluten. Däremot innesluter T tillsammans med "locket" $L = \{(x, y, z) \in T : z = 1\}$ en konisk kropp K . Vi kan använda Gauss sats på kroppen K :

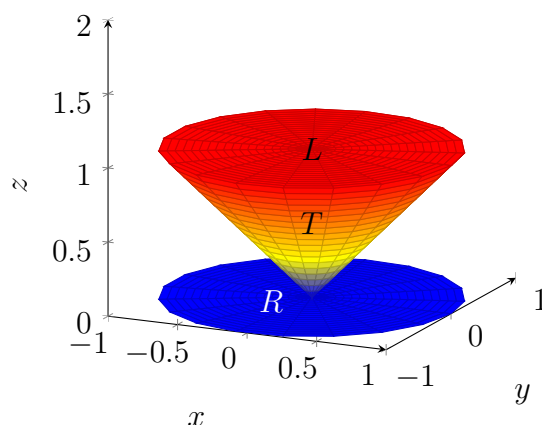
$$\iint_T \vec{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_L \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \cdot \vec{F} dV$$

Divergensen av \vec{F} ges av

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + 0 + 2z$$

och om R betecknar enhetsskivan i xy -planet så får vi:

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \cdot \vec{F} dV &= \iiint_K 2z dx dy dz = \iint_R \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \right) dx dy = \iint_R [z^2]_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dx dy \\ &= \iint_R (1 - (x^2 + y^2)) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



Vidare gäller det på L att $\hat{N} = (0, 0, 1)$, och $z = 1$ så:

$$\iint_L \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_L (-e^{yz}, e^{xz}, z^2) \cdot (0, 0, 1) \, dS = \iint_L z^2 \, dS = \iint_R 1^2 \, dx dy = \pi$$

Det sökta flödet blir slutligen:

$$\iint_T \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K \nabla \cdot \vec{F} \, dK - \iint_L \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

Vilket innebär att vi har ett nettoflöde ur struten, trots att produktionen inuti området K är positiv.

Gauss sats är en flerdimensionell motsvarighet till analysens fundamentalsats som ju kan skrivas

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$$

vänsterledet är, precis som i Gauss sats, en integral av en derivata på ett område $[a, b]$ och högerledet bestäms, precis som i Gauss sats, av funktionens värden i randpunkterna a och b . I nästa kapitel studerar vi en annan flerdimensionell motsvarighet till analysens fundamentalsats: Stokes sats. Med hjälp av räknereglerna för partiella derivator så kan man härleda många samband mellan gradienten, divergensen och rotationen, och därigenom härleda olika varianter av Gauss sats (se sats 9 i kapitel 16.4 i kursboken).

Sats 31. Låt Φ vara ett skalärfält och \vec{F} ett vektorfält. Då gäller:

1. $\nabla \cdot (\Phi \vec{F}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{F} + \Phi (\nabla \cdot \vec{F})$
2. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ (div (rot \vec{F}) = 0)
3. $\nabla \times (\Phi \vec{F}) = (\nabla \Phi) \times \vec{F} + \Phi (\nabla \times \vec{F})$
4. $\nabla \times (\nabla \Phi) = \vec{0}$ (rot $\nabla \Phi = 0$)

Det fjärde påståendet implicerar att konservativa vektorfält är virvelfria. Notera att Laplacianen $\Delta \Phi$ kan skrivas $\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \text{grad div } \Phi$.

Exempel 80. Första sambandet i satsen kombinerat med Gauss sats ger:

$$\oiint_S (\Phi \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_D \nabla \cdot (\Phi \vec{F}) \, dV = \iiint_D \nabla \Phi \cdot \vec{F} \, dV + \iiint_D \Phi (\nabla \cdot \vec{F}) \, dV$$

Exempel 81. Låt Φ vara ett skalärfält som är harmoniskt på D ($\Delta \Phi = 0$) och som är identiskt lika med noll på randen S till D . Visa att $\Phi = 0$ på hela D .

Sätt $\vec{F} = \nabla \Phi$ i satsen i förra exemplet. Då får vi:

$$\oiint_S \Phi \nabla \Phi \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_D |\nabla \Phi|^2 \, dV + \iiint_D \Phi \Delta \Phi \, dV \Rightarrow |\nabla \Phi|^2 = 0 \Rightarrow \Phi = \text{konstant}$$

men $\Phi = 0$ på randen, så $\Phi = 0$ i D .

Föreläsning 30: Stokes sats

Gauss sats gav ett samband mellan flödesintegralen över en sluten yta och trippelintegralen över kroppen som inneslöts av ytan. Vi ska nu undersöka vilket samband som gäller mellan kurvintegraler längs en sluten kurva i rummet och flödesintegralen över en ytan som har den slutna kurvan som rand. I planet har vi tidigare visat Greens formel som säger att

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dx dy.$$

Stokes sats säger att detta samband gäller för alla ytor S i rummet med positivt orienterad rand γ (och inte bara för den plana ytan D). Observera att till den slutna ytan i Gauss sats fanns bara en motsvarande kropp, men till den slutna kurvan i Stokes sats finns oändligt många motsvarande ytor.

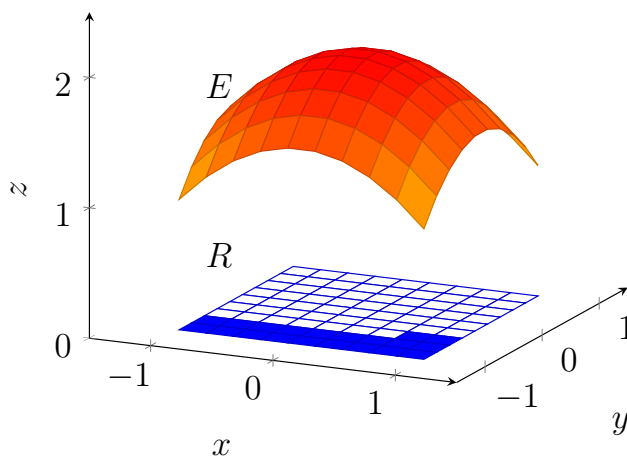
Sats 32. Låt \vec{F} vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält definierat på en öppen mängd D i rummet. Låt S vara en orienterad yta i D , med normal \hat{N} och positivt orienterad rand γ . Då gäller:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dS$$

Bevis. Vi visar satsen under det extra villkoret att ytan S kan delas i delytor på formen

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), \quad (x, y) \in R\}$$

Om vi lyckas visa satsen på varje delyta så gäller satsen på hela ytan eftersom kurvintegralerna över de kurvor som skiljer två delytor åt tar ut varandra så att bara kurvintegralen över γ återstår. Vi visar satsen genom att överföra integralerna från den krökta delytan E till det plana området R . Ytan E har parametreringen $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in R$. Kurvintegralen längs γ_E kan skrivas som:



$$\begin{aligned} \int_{\gamma_E} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma_E} \vec{F} \cdot (dx, dy, f'_1 dx, f'_2 dy) = \int_{\gamma_E} (F_1 + f'_1 F_3) dx + (F_2 + f'_2 F_3) dy \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} (F_2 + f'_2 F_3) - \frac{\partial}{\partial y} (F_1 + f'_1 F_3) \right) dx dy \end{aligned}$$

Greens formel ger oss nu:

$$\begin{aligned} & \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} f'_1 + \cancel{f''_{21} F_3} + f'_2 \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial x} f'_1} \right) \right) \\ & - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} f'_2 + \cancel{f''_{21} F_3} + f'_1 \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z} f'_2} \right) \right) dx dy \\ = & \iint_R \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} + f'_1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) + f'_2 \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \right)}_{(*)} dx dy \end{aligned}$$

Å andra sidan så ges $\hat{N} dS$ av $(-f'_1, -f'_2, 1) dx dy$ så flödesintegralen över E kan skrivas som en dubbelintegral över R med integrand

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot (-f'_1, -f'_2, 1) = (*)$$

Så kurv- och flödesintegralerna är lika och vi har visat Stokes sats på delytan E och därmed även på hela ytan S . \square

Från Stokes sats är det enkelt att visa att konservativa fält måste vara rotationsfria. Vi har nämligen att:

$$\begin{aligned} \vec{F} \text{ konservativt} & \Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ för alla slutna kurvor } \gamma \\ & \Rightarrow \iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{N} dS = 0 \text{ för alla ytor } S \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0} \end{aligned}$$

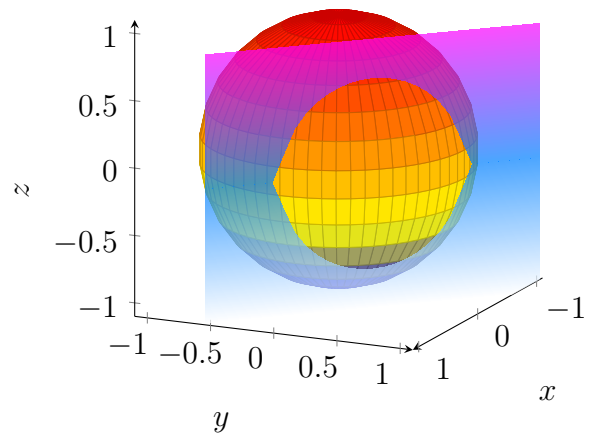
Omvändningen gäller, som tidigare nämnts, på enkelt sammanhängande områden.

Exempel 82. Beräkna cirkulationen av vektorfältet $\vec{F} = (yz + y - z, xz + 5x, xy + 2y)$ längs skärningslinjen L mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + y = 1$.

L är orienterad så att positiv riktning i punkten $(1, 0, 0)$ är $(0, 0, 1)$. Skärningslinjen L omsluter en plan yta med parametrisering $\vec{r}(s, t) = (s, 1 - s, t)$ och definitionsmängd

$$\begin{aligned} s^2 + (1 - s)^2 + t^2 \leq 1 & \Rightarrow 2s^2 - 2s + 1 + t^2 \leq 1 \\ & \Rightarrow 2 \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 + t^2 \leq \frac{1}{2} \\ & \Rightarrow 4 \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 + 2t^2 \leq 1 \end{aligned}$$

vilket är en ellips med storaxel $1/\sqrt{2}$ och lillaxel $1/2$. För att kunna använda Stokes sats



beräknar vi rotationen av \vec{F}

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + y - z & xz + 5x & xy + 2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(xy + 2y) - \frac{\partial}{\partial z}(xz + 5x) \\ \frac{\partial}{\partial z}(yz + y - z) - \frac{\partial}{\partial x}(xy + 2y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(xz + 5x) - \frac{\partial}{\partial y}(yz + y - z) \end{pmatrix}^T \\ &= (x + 2 - x, y - 1 - y, z + 5 - z - 1) = (2, -1, 4) \end{aligned}$$

Stokes sats ger nu:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS = \iint_S (2, -1, 4) \cdot (-1, -1, 0) \, dS \\ &= \iint_S -1 \, dS = -(\text{Arean av } S) = -\pi \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \end{aligned}$$

Ovan ser vi att \hat{N} väljs sådan att γ blir positivt orienterad.

I exemplet hade vi kunnat använda vilken yta som helst med rand L , exempelvis någon av de sfäriska, men då blir beräkningarna svårare. Vi kan också använda Stokes sats för att visa hur flödesintegraler över två olika ytor med identisk rand är relaterade.

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \iint_R (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} \, dS$$

Eftersom integranden i flödesintegralerna är $\operatorname{rot} \vec{F}$, så har vi bara nytta av detta samband för vektorfält \vec{G} som kan skrivas som $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$ för något vektorfält \vec{F} .

Definition 36. Om $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$, så kallas \vec{F} en vektorpotential till \vec{G} .

Om \vec{G} har en vektorpotential \vec{F} så är \vec{G} källfritt, eftersom $\operatorname{div} \vec{G} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$. Omvändningen gäller om varje sluten yta i D omsluter ett område som ligger helt i D . Under vissa villkor gäller alltså:

- \vec{F} har skalärpotential $\Phi \iff \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$
- \vec{G} har vektorpotential $\vec{F} \iff \operatorname{div} \vec{G} = 0$

En vektorpotential är inte entydig. Om \vec{F}_1 och \vec{F}_2 är två vektorpotentialer till \vec{G} , så gäller $\operatorname{rot}(\vec{F}_1 - \vec{F}_2) = \vec{G} - \vec{G} = \vec{0} \implies \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ .

Föreläsning 31: Kontinuitets- och värmeledningsekvationen

I detta kapitel och de två nästföljande ska vi visa att ett antal fysikaliska problem kan modelleras matematiskt med de verktyg som vektoranalysen ger oss och vi ska se att

många av de fysikaliska problemen kan beskrivas i termer av partiella differentialekvationer. Vi ska i några fall också undersöka lösningar till de mest vanligt förekommande partiella differentialekvationerna.

Betrakta den tidsberoende störningen av ett ämne i rummet. Ämnets täthet ges av skälrfältet $\rho(\vec{r}, t)$, med enhet [mängdenhet/m³], där mängdenheten kan vara Kg (materieströmning), C (laddningsströmning), J (värmeströmning) etc. Hastigheten beskrivs av vektorfältet $\vec{v}(\vec{r}, t)$ [m/s]. Låt S vara en godtycklig tänkt sluten yta i rummet som innesluter området V . Vid tiden t innehåller V mängden

$$\iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV$$

av ämnet. Låt nu $\kappa(\vec{r}, t)$ [mängdenhet/m³s] beteckna eventuell produktion av ämnet. Materiens oförstörbarhet ger sambandet

$$\text{ökning/tidsenhet av ämne i } V = \text{produktion i } V - \text{utflöde genom } S$$

vilket matematiskt kan uttryckas som

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV = \iiint_V \kappa(\vec{r}, t) dV - \iint_S \underbrace{\rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)}_{\text{mängdenhet/m}^2\text{s}} \cdot \hat{N} dS$$

Vi kan flytta in tidsderivatan i första termen (eftersom integralen sker över \vec{r}) och använda Gauss sats på tredje termen. Vi får då integralekvationen

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) - \kappa \right) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = \kappa$$

Där implikationen följer eftersom mängden V var godtycklig. Det härledda sambandet mellan ρ , \vec{v} och κ kallas kontinuitetsekvationen och gäller för alla typer av strömning.

Exempel 83. Betrakta fallet med gas- eller vätskeströmning. Mängdenheten är då Kg. Om mediet som strömningen sker i är isotropt (likadant i alla riktningar) och hastighetsflödet virvelfritt, så kommer flödet att uppfylla det empiriska sambandet Ficks lag, som säger att

$$\underbrace{\rho\vec{v}}_{[kg/m^2s]} = -D \underbrace{\text{grad } \rho}_{[kg/m^4]}$$

där D [m²/s] kallas för diffusionskonstanten. Denna typ av strömning kallas för diffusion och innebär fysikaliskt att strömningen sker i den riktning längs vilken tätheten minskar som snabbast och att strömstyrkan är proportionell mot täthetsförändringen. Strömningen söker alltså att utjämna täthetsskillnader. Insatt i kontinuitetsekvationen ger Ficks lag

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\text{grad } \rho) = \kappa \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - D\nabla^2 \rho = \kappa$$

jämvikt: ρ stationär $\Rightarrow \Delta\rho = -\frac{\kappa}{D}$, dvs. Poissons ekvation.

Diffusionsekvationen är en partiell differentialekvation som beskriver hur tätheten i en virvelfri strömmande gas eller vätska förändras över tid och rum. Om gasen eller vätskan är inkompressibel (ρ konstant) och saknar källor ($\kappa = 0$), så reduceras kontinuitetsekvationen till

$$0 + \rho \operatorname{div} \vec{v} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Exempel 84. Betrakta nu fallet med värmeströmning. Storheten ρ motsvaras nu av värmeinnehållet per volymenhet vilken kan skrivas $\rho c T$ med enhet $[J/m^3]$, där $c [J/K Kg]$ är värmekapaciteten och $\rho [Kg/m^3]$ är densiteten. Man kan inte tala om en hastighet \vec{v} hos värmeflödet. Dock kan termen innanför divergensen i kontinuitetsekvationen tolkas som en värmeströmvektor \vec{j} . I ett isotropt medium gäller Fouriers lag

$$\underbrace{\vec{j}}_{[J/m^2 s]} = -k \underbrace{\operatorname{grad} T}_{[K/m]} \quad \begin{array}{l} \text{där konstanten } k [J/kms] \text{ kallas för värmeledningsförmågan.} \\ \text{Om } \kappa [J/m^3 s] \text{ är värmeproduktionen, så ger kontinuitetsekvationen} \end{array}$$

$$\frac{\partial \rho c T}{\partial t} + \operatorname{div} (-k \operatorname{grad} T) = \kappa \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\rho c} \Delta T = \frac{\kappa}{\rho c} T \text{ stationär} \Rightarrow \Delta T = -\frac{\kappa}{k}$$

Detta är värmeledningsekvationen som är en partiell differentialekvation som beskriver temperaturens förändring i rum och tid. Ekvationen har samma form som diffusionsekvationen. En analog ekvation finns för den elektriska laddningstätheten (övning 5 i kapitel 16.6 i kursboken).

Vi ska nu härleda en lösning till värmeledningsekvationen och betraktar för enkelhets skull den endimensionella homogena specialfallet.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Om $T(t, x)$ är en lösning till denna ekvation så är även $T(\lambda^2 t, \lambda x)$ en lösning för varje konstant λ . Från detta drar vi slutsatsen att kvoten $(\lambda x)^2 / \lambda^2 t = x^2 / t$ är central för lösningen. Vi ansätter därför lösningen

$$T(t, x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

och kallas nedan variabeln x/\sqrt{t} för r . Insättning av ansättningens derivator ger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(r) + \frac{1}{t^\alpha} v'(r) \left(-\frac{1}{2} \frac{x}{t^{3/2}}\right) & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{t^\alpha} v''(r) \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left(-\alpha v(r) - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{t}}}_{r} v'(r) - v''(r) \right) = 0 \end{aligned}$$

sätt nu $\alpha = 1/2$. Uttrycket innanför parentesen reduceras då till

$$\frac{1}{2}(v(r) + rv'(r) + v''(r)) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(rv'(r)) + v''(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}rv(r) + v'(r) = A$$

Av fysikaliska skäl vill vi att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0$$

för alla t , och detta implicerar att $A = 0$. Vi får nu den separabla, ordinära differentialekvationen

$$\begin{aligned} v'(r) = -\frac{1}{2}rv(r) &\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{1}{2}r dr \Rightarrow \ln(v) = -\frac{r^2}{4} + B \\ &\Rightarrow v(r) = e^{-r^2/4+B} = Ce^{-r^2/4} \Rightarrow T(t, x) = \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-x^2/4t} \end{aligned}$$

Om vi väljer konstanten C så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(t, x) dx = 1 \text{ så blir } C = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

Vi får den så kallade fundamentallösningen till värmeledningsekvationen.

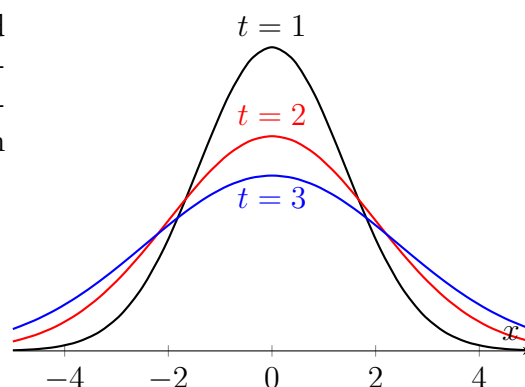
$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-x^2/4) \text{ eller i } \mathbb{R}^n \Phi(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-|x|^2/4t)$$

Vi kan notera att fundamentallösningen är lika med täthetsfunktionen för en normalfördelning med standardavvikelse $\sqrt{2t}$. En initial koncentration av materia eller energi sprids ut över rummet när t ökas. Man kan konstruera lösningarna till

$$\begin{cases} \partial T / \partial t - \Delta T = f, & t > 0 \\ T = g, & t = 0 \end{cases}$$

som integraler av $\Phi(t, x)$:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y)g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t - s, x - y)f(y, s) dy ds$$



Föreläsning 32: Maxwells ekvationer och vågekvationen

Vi ska i detta kapitel motivera Maxwells ekvationer för elektriska och magnetiska fält och utifrån dessa visa existensen av elektromagnetiska vågor som fortplantas med ljusets hastighet.

Det elektriska fältet kring en punktladdning q med läge \vec{r}_0 ges av

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad \text{för en fysikalisk konstant } \epsilon_0, \text{ jämför med gravitationsfältet.}$$

Precis som gravitationsfältet så är det elektriska fältet konservativt och har potentialen

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad \vec{r} \neq \vec{r}_0$$

Flödet ut ur en godtycklig yta S som innehåller \vec{r}_0 uppfyller, för varje sfär S_a kring \vec{r}_0 med radie a sådan att $S_a \subset S$,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot \hat{N} dS - \iint_{S_a} \vec{E} \cdot \hat{N} dS &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{E} dV = 0 \\ \Rightarrow \iint_S \vec{E} \cdot \hat{N} dS &= \iint_{S_a} \vec{E} \cdot \hat{N} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_a} \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}}_{|\vec{r} - \vec{r}_0|^{-2} = a^{-2}} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \underbrace{\iint_{S_a} dS}_{4\pi a^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Låt nu istället $\rho(\vec{r})$ vara en laddningstäthet, så att $dq = \rho dV$. Då blir flödet ut ur ytan S

$$\iint_S \vec{E} \cdot \hat{N} dS = \iiint_V \frac{dq}{\epsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \stackrel{\text{Gauss sats}}{\Rightarrow} \iiint_V \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

Eftersom S var godtycklig så gäller $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Gauss lag)

Magnetfält uppkommer till följd av laddningar som rör sig, dvs. elektriska strömmar. Betrakta ett infinitesimalt stycke $d\vec{r}_0$ av en ledare som genomflyts av strömmen I . Enligt Biot-Savarts lag så ger denna ström upphov till det magnetiska fältet

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{r}_0 \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

Om vi antar att laddningarna inte kan bildas eller förstöras, så måste strömmen gå längs en sluten kurva γ och vi får:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{r}_0 \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

Vi ska visa att magnetfältet är källfritt ($\text{div } \vec{H} = 0$) genom att hitta en vektorpotential \vec{A} till \vec{H} ($\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \text{div } \vec{H} = \text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$). Låt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Från potentialen till det elektriska fältet ser vi att $\text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$. Låt nu $\Phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ och $\vec{F} = d\vec{r}_0$ i sambandet $\nabla \times (\Phi \vec{F}) = \Phi(\nabla \times \vec{F}) + (\nabla \Phi) \times \vec{F}$. Vi får

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \frac{I}{4\pi} \oint_{\gamma} \nabla \times \left(\frac{d\vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) \stackrel{\nabla \times d\vec{r}_0 = 0}{=} \frac{I}{4\pi} \oint_{\gamma} \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) \times d\vec{r}_0 \\ &= -\frac{I}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \times d\vec{r}_0 = \vec{H}(\vec{r}). \end{aligned}$$

Magnetfältet är alltså källfritt, vilket betyder att det inte finns några magnetiska källor eller sänkor. Ekvationerna $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ och $\text{div } \vec{H} = 0$ gäller både i det stationära och det icke-stationära fallet, dvs. oberoende av om fälten är tidsberoende eller inte. I det stationära fallet gäller också $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ (\vec{E} är konservativt) och $\text{rot } \vec{H} = \vec{0}$ (gäller utanför ledaren), men dessa ekvationer gäller, som vi snart ska se, inte för tidsberoende fält.

Vi ska nu undersöka vad som gäller för $\text{rot } \vec{E}$ och $\text{rot } \vec{H}$ när \vec{E} och \vec{H} är tidsberoende. Faraday visade empiriskt att cirkulationen av ett elektriskt fält kring en sluten kurva motsvarade en förändring i magnetiskt flöde genom en yta vars rand ges av kurvan, dvs

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{H} \cdot \hat{N} dS$$

Stokes sats ger sedan, eftersom S är en godtycklig yta

$$\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \hat{N} dS = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \hat{N} dS \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

För magnetiska fält kan man visa att om \vec{J} [C/m^2s] är strömtätheten så gäller $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ i det stationära fallet. I det icke-stationära fallet är dock detta inkonsekvent eftersom kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning säger att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\text{div}(\text{rot } \vec{H})}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

vilket är en motsägelse. För att kontinuitetsekvationen ska kunna vara uppfylld måste vi istället låta \vec{H} uppfylla

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \left(\Rightarrow \text{div } \vec{J} = -\epsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Det sista sambandet upptäcktes av Maxwell och sambanden nedan kallas Maxwells ekvationer (1861).

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Vi ska härnäst visa att i frånvaron av strömmar och laddningar ($\delta = 0, \vec{J} = 0$), så uppfyller \vec{E} och \vec{H} (det elektriska, respektive magnetiska fältet) den så kallade vågekvationen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &\stackrel{3:e \text{ lagen}}{=} -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \stackrel{4:e \text{ lagen}}{=} -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{H}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\operatorname{grad} (\underbrace{\operatorname{div} \vec{H}}_{=0}) - \Delta \vec{H}) = \frac{1}{\underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=c^2, c \text{ är ljushastigheten}}} \Delta \vec{H} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{H} = 0 \end{aligned}$$

Skillnaden mot värmeledningsekvationen är en extra derivata med avseende på tiden (och att det är mycket lättare att hitta lösningarna). Vi undersöker det endimensionella fallet och inför de nya variablerna $\alpha = x + ct, \beta = x - ct$. Derivatorna av $u(t, x)$ blir, uttryckta i α och β ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial \alpha} - c \frac{\partial u}{\partial \beta} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) \\ &= -4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \Rightarrow u(\alpha, \beta) = F(\alpha) + G(\beta) \end{aligned}$$

eller med andra ord: $u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$. Den första funktionen är en våg som rör sig åt vänster med hastighet c , och den andra funktionen är en våg som rör sig åt höger med hastighet c .

Föreläsning 33: Potetialteori

Vi såg i förra kapitlet att det elektriska fältet $\vec{E}(\vec{r})$ var konservativt och hade en potential Φ som uppfyllde

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} (\operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

där ρ är laddningstätheten. Även gravitationskraftfältet är konservativt och har en potential V som man kan visa uppfyller ekvationen $\Delta V = 4\pi G\rho$, där G är gravitationskonstanten, och ρ är materialtätheten. Både elektrostatiken och gravitationen kan alltså

beskrivas med hjälp av potentialer u som uppfyller Poissons ekvation $\Delta u = f$, där f är en mängdtäthet. I frånvaro av laddningar eller materia i ett område uppfyller potentialen Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ på området, dvs. potentialen är en harmonisk funktion.

Studien av lösningar till Laplaces och Poissons ekvationer kallas potentialteori och dess matematiska resultat kan som synes användas inom vitt skilda områden av fysiken. Notera också att vi i förrförra kapitlet visade att såväl koncentrationen vid stationär värmespridning som temperaturen vid stationär värmespridning uppfyllde Poissons ekvation. Vi ska i detta kapitel undersöka några grundläggande egenskaper hos lösningarna till Laplaces och Poissons ekvationer. Till vår hjälp har vi följande resultat som kallas för Greens satser.

Sats 33. *Greens satser. Låt Φ och Ψ vara två skalärfält som är två gånger kontinuerligt deriverbara i området V med rand S och utåtriktad enhetsnormal \hat{N} . Då gäller:*

$$\begin{aligned} \iiint_V (\Phi \Delta \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV &= \iint_S \Phi \nabla \Psi \cdot \hat{N} dS \\ \iiint_V (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dV &= \iint_S (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot \hat{N} dS \end{aligned}$$

Bevis. Använder vi Gauss sats på vektorfältet $\Phi \nabla \Psi$, så får vi:

$$\iint_S \Phi \nabla \Psi \cdot \hat{N} dS = \iiint_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) dV$$

Om vi nu använder $\nabla \cdot (\Phi \vec{F}) = \Phi (\nabla \cdot \vec{F}) + \nabla \Phi \cdot \vec{F}$ med $\vec{F} = \nabla \Psi$ får vi:

$$= \iiint_V (\Phi (\nabla \cdot (\nabla \Psi)) + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV$$

varvid första påståendet följer, eftersom $\nabla \cdot (\nabla \Psi) = \Delta \Psi$. Om vi byter plats på Φ och Ψ i första påståendet, så får vi:

$$\iiint_V (\Psi \Delta \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi) dV = \iint_S \Psi \nabla \Phi \cdot \hat{N} dS$$

Subtraherar vi denna ekvation från första påståendet i satsen, så följer direkt andra påståendet i satsen. \square

Notera att om vi sätter $\Phi = 1$ i Greens första sats, så får vi Gauss sats.

Låt nu $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{N}$ beteckna riktningsderivatan av en funktion u i normalriktningen \hat{N} . Om u är en harmonisk funktion så ger Gauss sats

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_S \nabla u \cdot \hat{N} dS = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla u) dV = \iiint_V \Delta u dV = 0,$$

så nettoflödet av ett fält \vec{F} vars potential u är harmonisk är noll ut ur varje sluten yta S . Om potentialen u uppfyller Poissons ekvation $\Delta u = f$ blir nettoflödet

$$\iiint_V f dV$$

ut ur ytan S som omsluter området V . I förra kapitlet visade vi att för \vec{E} så gäller, om $\vec{r}_0 \in S$,

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{N} dS &= \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) \\ \Rightarrow \oiint_S -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) \cdot \hat{N} dS &= \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oiint_S \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) \cdot \hat{N} dS = -4\pi \end{aligned}$$

Vi har tidigare under kursen visat att om D_r är en cirkel med radie r och centrum i (a, b) , så gäller, för varje kontinuerlig funktion f av två variabler,

$$f(a, b) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y) dx dy$$

Sats 34. Låt S vara en sfär med centrum i \vec{r}_0 och radie R . För varje funktion u som är harmonisk på det område som omsluts av S , så gäller

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(\vec{r}) dS$$

dvs. funktionsvärdet av $u(\vec{r})$ är lika med medelvärdet av funktionsvärdet på S .

Bevis. Låt V vara det inre av S bortsett från en liten sfär S_a med centrum i \vec{r}_0 och radie a . Det andra påståendet i Greens sats med $\Phi = u$, $\Psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ ger nu

$$\iiint_V u \underbrace{\Delta \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right)}_{=0, \vec{r}_0 \notin V} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \underbrace{\Delta u}_{=0} dV = \iint_{S \cup S_a} \left(u \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \nabla u \right) \cdot \hat{N} dS$$

Eftersom $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ är konstant på respektive sfär och

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) \cdot \hat{N} = \pm \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^4}$$

också är konstant på respektive sfär, så får vi

$$0 = -\frac{1}{R^2} \iint_S u dS + \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} u dS - \frac{1}{R} \iint_S \underbrace{\nabla u \cdot \hat{N}}_{=0} dS - \frac{1}{a} \iint_{S_a} \underbrace{\nabla u \cdot \hat{N}}_{=0} dS$$

u är harmonisk på S (och S_a), så de sista två integralerna är noll. Vi låter nu $a \rightarrow 0$ och får, av kontinuitetsskäl

$$\frac{1}{R^2} \iint_S u(\vec{r}) dS = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} u(\vec{r}) dS = 4\pi \vec{u}(\vec{r}_0)$$

vilket visar satsen. □

Satsen ovan gäller även om vi tar medelvärdet över det inre av S

Sats 35. *Låt u vara en icke-konstant harmonisk funktion definierad på något område D . Då antar u maximum/minimum på ∂D .*

Bevis. Mängden $D \cup \partial D$ är sluten och varje kontinuerlig funktion på en sluten mängd antar maximum och minimum någonstans på mängden. Vi antar att maximum antas i en punkt P_0 i det inre av D . Då gäller $u(P) \leq u(P_0)$ för alla $P \in D \cup \partial D$. På grund av medelvärdesegenskapen måste likhet gälla för alla P på ytan av varje sfär kring P_0 som helt ligger i D . Varje punkt i D kan nås från P_0 med en kedja av sfärer som ligger helt i D . Alltså måste u vara konstant i D , men detta motsäger vad vi antagit ska gälla för u . Vi kan dra slutsatsen att u antar maximum på ∂D . □

Satsen om maximum och minimum ovan är rimlig ur fysikalisk mening om vi tänker oss u som temperaturen vid stationär värmeledning. Den maximala/minimala temperaturen måste då uppträda på randen till området.

Satsen om maximum och minimum kan användas för att visa att det bara kan finnas en lösning till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{i } V \\ u = g, & \text{på } S \end{cases}$$

Antag att u_1 och u_2 är två lösningar till randvärdesproblemet. Då uppfyller $v = u_1 - u_2$ att $\Delta v = 0$ i V och $v = 0$ på S . Eftersom v är harmonisk, så antar den sitt maximum och minimum på randen S . Men $v = 0$ på S , så v måste vara noll på hela V , dvs. $u_1 = u_2$ på V .

Föreläsning 34: System av ordinära differentialekvationer

I detta kapitel ska vi studera $n \times n$ system av första ordningens linjära ordinära differentialekvationer. Sådana system består av följande n ekvationer med n obekanta funktioner

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

Systemet kallas homogent om $f_1(t) = \dots = f_n(t) = 0$ för alla t och sägs ha konstanta koefficienter om $a_{ij}(t)$ är konstanta för $1 \leq i, j \leq n$. Om vi inför matriserna

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

så kan systemet uttryckas kortfattat på matrisform $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}$. Lösningarna till ett $n \times n$ system av ODE kommer att vara vektorvärda funktioner av variabeln t , dvs kurvor i \mathbb{R}^n . Vi kommer härnäst enbart att betrakta fallet $n = 2$, men metodiken som vi tar fram är generell och gäller för alla n .

Vi ska nu bestämma den allmänna lösningen till homogena 2×2 system av första ordningens ODE $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ med konstanta koefficienter. För motsvarande endimensionella ODE, $y' = ay$ ges lösningen av funktionen $y = Ce^{at}$. Vägleda av detta undersöker vi om $\vec{x} = (c_1, c_2)^T e^{\lambda t}$ kan vara en lösning för något lämpligt val av $\lambda \in \mathbb{R}$ och $c = (c_1, c_2)^T$. I så fall gäller:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{c}e^{\lambda t}) = \vec{c} \frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \vec{c}\lambda e^{\lambda t}$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} = A\vec{c}e^{\lambda t} &\Rightarrow \lambda\vec{c}e^{\lambda t} = A\vec{c}e^{\lambda t} \Rightarrow A\vec{c} = \lambda\vec{c} \Rightarrow A\vec{c} = \lambda I\vec{c} \\ &\Rightarrow (A - \lambda I)\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

Kurvan $\vec{x} = \vec{c}e^{\lambda t}$ är alltså en lösning till $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, när λ och \vec{c} uppfyller ekvationen $A\vec{c} = \lambda\vec{c}$, dvs. λ är ett egenvärde till matrisen A med tillhörande egenvektor. Den allmänna lösningen ges av

$$\vec{x} = \vec{c}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{c}_2 e^{\lambda_2 t},$$

där λ_1 och λ_2 är de båda egenvärdena till A , och \vec{c}_1 och \vec{c}_2 är motsvarande egenvektorer.

Exempel 85. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av ODE:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Systemet kan skrivas på matrisform som

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

och egenvektorerna till matrisen A uppfyller ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm 3$$

För egenvärdet $\lambda = 5$ respektive $\lambda = -1$ uppfyller motsvarande egenvektorer

$$\begin{aligned} (A - 5I)\vec{c}_1 = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{c}_1 = 0 \Rightarrow \vec{c}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (A + 1I)\vec{c}_2 = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \vec{c}_2 = 0 \Rightarrow \vec{c}_2 = b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi ska nu studera lösningen till exemplet ovan lite närmare.

$$\vec{x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = ae^{5t} + be^{-t} \\ x_2(t) = 2ae^{5t} - be^{-t} \end{cases}$$

Om vi låter $a = 0$ så får vi $x_1(t) = -x_2(t)$ och då gäller $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$. Om vi istället låter $b = 0$, så får vi $2x_1(t) = x_2(t)$ och då gäller $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \pm\infty$. För stora t , så dominerar e^{5t} , och lösningskurvan närmar sig $2x_1(t) = x_2(t)$. För små t så dominerar e^{-t} och lösningskurvan närmar sig $x_1(t) = -x_2(t)$. Vi kan skissa lösningskurvorna och få ett så kallat fasporträtt. Lösningskurvorna är fältlinjer till vektorfältet $\vec{F} = A\vec{x}$.

Om matrisen A bara har ett egenvärde (med multiplicitet 2), så ger metoden från exemplet tidigare bara en partikulärlösning $\vec{x} = \vec{c}e^{\lambda t}$ och inte den allmänna lösningen. Vi undersöker om $\vec{x} = \vec{c}te^{\lambda t} + \vec{d}e^{\lambda t}$, där \vec{c} är en egenvektor och λ ett egenvärde till A , kan vara en lösning.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{c}te^{\lambda t} + \vec{d}e^{\lambda t}) = \vec{c}\lambda e^{\lambda t} + \vec{d}\lambda e^{\lambda t} \quad A\vec{x} = A\vec{c}te^{\lambda t} + A\vec{d}e^{\lambda t}$$

Om vi undersöker $e^{\lambda t}$ -termerna och $te^{\lambda t}$ -termerna var för sig så får vi de båda ekvationerna

$$\begin{aligned} te^{\lambda t} : \quad A\vec{c} &= \lambda\vec{c} && \iff && \lambda \text{ är egenvärde till } A \text{ med egenvektor } \vec{c} \\ e^{\lambda t} : \quad A\vec{d} &= \lambda\vec{d} + \vec{c} && \iff && (A - \lambda I)\vec{d} = \vec{c} \end{aligned}$$

Det allmänna lösningen ges nu av $\vec{x} = a\vec{c}e^{\lambda t} + b(\vec{c}te^{\lambda t} + \vec{d}e^{\lambda t})$, där λ är ett egenvärde till A med egenvektor \vec{c} , och \vec{d} löser ekvationen $(A - \lambda I)\vec{d} = \vec{c}$.

Eftersom matrisen $\det(A - \lambda I) = 0$ är en andragsgradsekvation i λ , så finns det också en möjlighet att matrisen A har två komplexa egenvärden $\lambda_1 = r + si$ och $\lambda_2 = r - si$

med motsvarande egenvektorer \vec{c}_1 och \vec{c}_2 (man kan visa att \vec{c}_2 alltid är det komplexa konjugatet till \vec{c}_1 , vi skriver detta $\vec{c}_2 = \vec{c}_1^+$). Den allmänna lösningen blir

$$\vec{x} = a\vec{c}_1 e^{(r+si)t} + b\vec{c}_1^+ e^{(r-si)t} = e^{rt}(a\vec{c}_1(\cos(st) + i\sin(st)) + b\vec{c}_1^+(\cos(st) - i\sin(st))),$$

där vi har använt definitionen av exponentialfunktionen för komplexa tal i det sista steget. Lösningen blir dock en komplex kurva, men vi är främst intresserade av reella lösningar. Om vi dock väljer konstanterna $a = b = 1/2$ så får vi:

$$a\vec{c}_1 + b\vec{c}_1^+ = \frac{1}{2}(\vec{c}_1 + \vec{c}_1^+) = \Re(\vec{c}_1) \quad i(a\vec{c}_1 - b\vec{c}_1^+) = \frac{i}{2}(\vec{c}_1 - \vec{c}_1^+) = -\Im(\vec{c}_1)$$

och en lösning blir $e^{rt}(\Re(\vec{c}_1)\cos(st) - \Im(\vec{c}_1)\sin(st))$. Sätter vi istället $a = -b = -1/2$, så får vi:

$$a\vec{c}_1 + b\vec{c}_1^+ = -\frac{i}{2}(\vec{c}_1 - \vec{c}_1^+) = \Im(\vec{c}_1) \quad i(a\vec{c}_1 - b\vec{c}_1^+) = -\frac{i^2}{2}(\vec{c}_1 + \vec{c}_1^+) = \Re(\vec{c}_1)$$

och en lösning blir $e^{rt}(\Im(\vec{c}_1)\cos(st) + \Re(\vec{c}_1)\sin(st))$. Dessa båda lösningar är reella och linjärt oberoende (båda är dessutom spiralformade). Den allmänna reella lösningen ges av:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= ae^{rt}(\Re(\vec{c}_1)\cos(st) - \Im(\vec{c}_1)\sin(st)) + be^{rt}(\Im(\vec{c}_1)\cos(st) + \Re(\vec{c}_1)\sin(st)) \\ &= e^{rt}((a\Re(\vec{c}_1) + b\Im(\vec{c}_1))\cos(st) + (b\Re(\vec{c}_1) - a\Im(\vec{c}_1))\sin(st)) \end{aligned}$$

Föreläsning 35

System av orinära differentialekvationer (forts.)

I förra kapitlet härledde vi den allmänna lösningen till homogena 2×2 system av första ordningens ODE med konstanta koefficienter med hjälp av egenvärden och egenvektorer. Vi ska nu undersöka en annan metod som kan användas även till lösning av inhomogena 2×2 system.

Definition 37. För en $n \times n$ -matris A , så definieras exponentialmatrisen e^A som

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad (\text{jämför med Maclaurinutvecklingen av } e^x.)$$

Man kan visa at exponentialmatrisen uppfyller i stort sett samma räkneregler som exponentialfunktionen. I synnerhet gäller det att:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dt} (At)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (At)^j \right) = Ae^{At} = e^{At}A \end{aligned}$$

Betrakta nu det inhomogena 2×2 -systemet $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}$. Vi multiplicerar med den integrerande faktorn e^{-At} och får:

$$\begin{aligned} e^{-At} \frac{d\vec{x}}{dt} &= e^{-At} A\vec{x} + e^{-At} \vec{f} \Rightarrow e^{-At} \frac{d\vec{x}}{dt} - A e^{-At} \vec{x} = e^{-At} \vec{f} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-At} \vec{x}) &= e^{-At} \vec{f} \Rightarrow e^{-At} \vec{x} = \int e^{-At} \vec{f} dt \\ \Rightarrow \vec{x}(t) &= e^{At} \int e^{-At} \vec{f} dt \quad (\vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \text{HL}=(C_1, C_2)^T \Rightarrow \vec{x} = e^{At}(c_1, c_2)^T) \end{aligned}$$

Formeln ovan är analog med formeln för den linjära, inhomogena ODE:n $y' = ay + f$ som vi härledde i envariabelanalysen. För att kunna använda denna metod i praktiken måste vi kunna beräkna exponentialmatrisen och det är ofta ganska komplicerat. Vi tar ett relativt enkelt exempel.

Exempel 86. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av ODE:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases} \iff \frac{d\vec{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

som har de båda komplexa egenvärdena $\lambda = \pm i$, ($\lambda^2 + 1 = 0$). Vi bestämmer A^k för $k = 0, 1, 2, 3, 4$, och ser om vi kan upptäcka ett mönster så att vi kan bestämma e^{At} .

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

så

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

där vi i sista steget ser att matrisens element är Maclaurinutvecklingarna av sinus och cosinus. Den allmänna lösningen blir nu

$$\begin{aligned} \vec{x} &= e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t) \\ c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Vi hade också kunnat härleda de linjärt oberoende lösningarna $(\cos(t), \sin(t))^T$ och $(-\sin(t), \cos(t))^T$ med hjälp av metoden från förra kapitlet. I allmänhet är det ofta svårt att se mönstret i e^{At} (jämför med första exemplet i kapitlet Föreläsning 35).

Exakta ODE och variation av parametrar

En första ordningens ODE på formen $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ för några funktioner M och N av två variabler kallas för exakt om det planära vektorfältet $\vec{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ är konservativt. Det finns då en potential Φ sådan att $\nabla\vec{F} = \Phi$. Om vi nu betraktar y som en funktion av x , så gäller

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = \Phi'_1 + \Phi'_2 \frac{dy}{dx} = M(x, y) + N(x, y) \frac{dx}{dy} = M(x, y) + N(x, y) \left(-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}\right) = 0$$

Lösningarna till ODE:n ges följaktligen av kurvorna $\Phi(x, y) = C$.

Exempel 87. Bestäm den allmänna lösningen till ODE:n

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + \sin(y)}{x \cos(y)}.$$

Vi undersöker om ODE:n är exakt (den är inte separabel), genom att se om vi kan finna en potential till $\vec{F} = (2x + \sin(y), x \cos(y))$.

Integration av den andra ekvationen ger:

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + \sin(y) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = x \cos(y) \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Phi(x, y) = x \sin(y) + f(x), \\ &\text{för någon funktion } f. \end{aligned}$$

Derivering och jämförelse med första ekvationen ger sedan

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \sin(y) + f'(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2$$

Vektorfältet \vec{F} har alltså en potential $\Phi(x, y) = x^2 + x \sin(y)$, så den givna ODE:n var exakt med den allmänna lösningen $x^2 + x \sin(y) = C$, vilket kan skrivas

$$y(x) = \arcsin\left(\frac{C}{x} - x\right) \text{ (kolla att } \frac{dy}{dx} \text{ blir som i ODE:n).}$$

I kursen envariabelanalys löste vi inhomogena ODE genom att göra en kvalificerad gissning av partikulärlösning baserat på utseendet hos inhomogeniteten. Vi ska nu undersöka en annan metod som är användbar även för andra högerled än de som togs upp i envariabelanalysen. Betrakta den inhomogena ODE:n

$$a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = f(x)$$

och antag att vi vet två linjärt oberoende lösningar $y_1(x)$ och $y_2(x)$ till den motsvarande homogena ODE:n. Vi söker nu en partikulärlösning bland mängden av funktioner som har formen

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = f(x)$$

för några funktioner $u_1(x)$ och $u_2(x)$ som uppfyller $u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$.

Exempel 88. Bestäm den allmänna lösningen till $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$.

Med metoderna från envariabelanalysen kan vi härleda att den homogena ekvationen har lösningarna $y_1(x) = e^{-2x}$ och $y_2(x) = xe^{-2x}$. Vi sätter $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ och deriverar:

$$y'_p = \underbrace{u'_1y_1 + u'_2y_2}_{=0} + u_1y'_1 + u_2y'_2 = u_1y'_1 + u_2y'_2$$

$$y''_p = u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + u_1y''_1 + u_2y''_2$$

Insättning i ODE:n ger:

$$y''_p + 4y'_p + 4y_p = u_1 \underbrace{(y''_1 + y_1y'_1 + 4y_1)}_{=0} + u_2 \underbrace{(y''_2 + 4y_2y'_2 + 4y_2)}_{=0} + u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} u'_1(x)e^{-2x} + u'_2(x)xe^{-2x} = 0 \\ u'_1(x)(-2e^{-2x}) + u'_2(-2xe^{-2x} + e^{2x}) = \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{cases}$$

med lösningarna

$$u'_1(x) = -\frac{1}{x}, \quad u'_2(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = -\ln(x), \quad u_2(x) = -\frac{1}{x}.$$

Vi får partikulärlösningen $y_p(x) = -\ln(x)e^{-2x} + \frac{-1}{x}xe^{-2x} = -e^{-2x}(1 + \ln(x))$ och den allmänna lösningen blir:

$$y(x) = (ax + b)e^{-2x} - e^{-2x}(1 + \ln(x)) = (ax + b - \ln(x))e^{-2x}$$

Föreläsning 36: Funktionsföljder och likformig konvergens

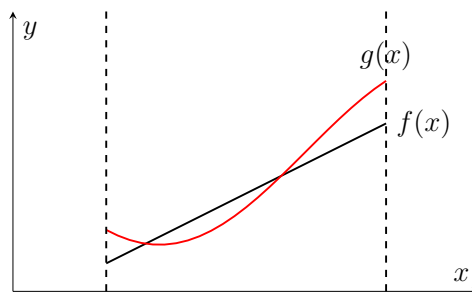
Vi ska i detta kapitel undersöka följder av funktioner. Låt A vara en mängd i \mathbb{R} (\mathbb{R}^n fungerar lika bra). För $n = 1, 2, 3, \dots$ låter vi f_n vara en funktion med definitionsmängd A . Mängden av alla dessa funktioner f_n blir en funktionsföljd, som betecknas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

För talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sade vi att talföljden konvergerar mot gränsvärdet a om avståndet mellan a_n och a gick mot noll då $n \rightarrow \infty$, dvs. om $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$. Men det är inte uppenbart hur man ska definiera avståndet mellan två funktioner. Två möjliga avstånd är

$$d(f, g) = \int_A (f(x) - g(x))^2 dx \quad \text{och} \quad d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

En skillnad mellan dessa båda avstånd är att i det första fallet kan $d(f, g) = 0$, även om f och g skiljer sig åt i enstaka punkter (punkter är nollmängden för integralen), men detta gäller ej för det andra fallet. För varje fixt värde på $x \in A$ så är $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ en talföljd. Talföljder kan vara konvergenta eller divergenta. Om talföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ är konvergent för varje fixt $x \in A$, så kan vi definiera en funktion f som

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$



Vi säger att funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar punktvis mot gränsvfunktionen f .

Exempel 89. Avgör om funktionsföljderna $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ och $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar punktvis på intervallen $[0, \infty)$ för

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad h_n(x) = x^n$$

Vi undersöker först f_n och g_n och noterar att $f_n(0) = g_n(0) = 0$, samt att för $x > 0$ gäller det att:

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2x} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \forall x > 0$$

$$0 \leq g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \forall x > 0$$

Både $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ och $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar punktvis mot 0 på $[0, \infty)$. För h_n gäller det att $h_n(x) \rightarrow 0$ för $x \in [0, 1)$, att $h_n(x) \rightarrow 1$ för $x = 1$ och att $h_n(x) \rightarrow \infty$ då $x \in (1, \infty)$.

Exemplet med $\{h_n\}$ ovan visar att trots att h_n är en kontinuerlig funktion för alla n , så är gränsvfunktionen diskontinuerlig. Vi ska senare undersöka när gränsvfunktionen blir kontinuerlig. Vi undersöker nu på vilket sätt f_n och g_n konvergerar mot noll. Båda funktionerna uppfyller $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ och $f_n(0) = g_n(0) = 0$ oavsett val av n . För varje n finns det ett $x \in [0, \infty)$ som maximerar $|f_n(x) - 0|$ och ett $x \in [0, \infty)$ som maximerar $|g_n(x) - 0|$. Vi undersöker dessa avstånd.

$$f'_n(x) = \frac{(1+n^2x^2) - x \cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{n^2}$$

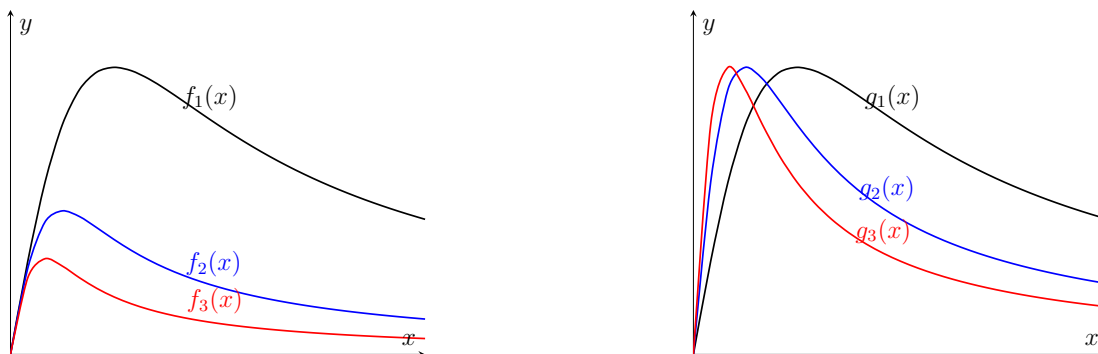
$$g'_n(x) = n \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{n^2}$$

Det maximala avståndet för f_n och g_n är:

$$\max_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - 0| = \frac{\frac{1}{n}}{1+n^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2n}$$

$$\max_{x \in [0, \infty)} |g_n(x) - 0| = \frac{n \frac{1}{n}}{1+n^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

För $g_n(x)$ finns det, för alla n , någon punkt $x \in [0, \infty)$ där avståndet till gränsvfunktionen är $1/2$. Funktionskurvan $g_n(x)$ kommer inte att ligga nära kurvan $g(x) = 0$ på hela intervallet. Konvergensen är ej likformig.



Definition 38. Funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt mot gränsvfunktionen f på mängden A om

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Likformig konvergens innebär alltså konvergens där avståndet mellan två funktioner mäts av $d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$. I exemplet ovan så var $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ likformigt konvergent mot 0 på $[0, \infty)$, men $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ var inte likformigt konvergent. Vi kan dra följande slutsatser:

Sats 36. *Likformig konvergens medför punktvis konvergens, men punktvis konvergens medför inte likformig konvergens*

Sats 37. *Låt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en funktionsföljd med definitionsmängd A och anta att alla funktionerna f_n är kontinuerliga på A . Om $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt mot en funktion f på A , så är gränsvfunktionen f kontinuerlig.*

Bevis. Tag ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ och en godtycklig punkt $x_0 \in A$. Vi ska visa att f är kontinuerlig i x_0 . Eftersom $f_n \rightarrow f$ likformigt, så finns det ett N , sådant att för alla $n > N$ och alla $x \in A$, så gäller $f_n(x) - f(x) < \varepsilon/3$. Fixera ett sådant $n > N$ och kalla det n_0 . Funktionen f_{n_0} är kontinuerlig i x_0 , så det finns ett $\delta > 0$ sådant att för alla $|x - x_0| < \delta$ gäller $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$. För alla $|x - x_0| < \delta$ gäller nu:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon$$

Detta visar att f är kontinuerlig i den godtyckliga punkten $x_0 \in A$ och därmed i hela A . \square

Om gränsvfunktionen är diskontinuerlig, som i exemplet ovan med $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, så kan alltså inte funktionsföljden konvergera likformigt. Men gränsvfunktionen kan vara kontinuerlig

även om funktionsföljden inte konvergerar likformigt, som i exemplet ovan med $\{g_n\}_{n=1}^\infty$. Vi inleder nästa kapitel med att ytterligare undersöka sambandet mellan likformig konvergens och gränsv funktionens kontinuitet. Vi undersöker nu när det gäller att:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_A f(x) dx \quad (*)$$

för en följd $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ av kontinuerliga funktioner.

Sats 38. Om A är ett kompakt intervall $[a, b]$ och $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ är likformigt konvergent på A , så gäller (*).

Bevis. Om $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ är likformigt konvergent, så är f kontinuerlig. Såväl f_n som f är kontinuerliga och därmed integrerbara.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| dx = \underbrace{\left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\int_a^b dx}_{b-a} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

så

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx, \quad n \rightarrow \infty$$

□

Likformig konvergens är inte nödvändigt för att (*) ska gälla. För funktionsföljden $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ i exemplet ovan, på intervallet $[0, 1]$, så gäller:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} [\ln(1+n^2x^2)]_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

Föreläsning 37

Funktionsföljder och likformig konvergens (forts.)

I förra kapitlet visade vi att en likformigt konvergent funktionsföljd av kontinuerliga funktioner konvergerar mot en kontinuerlig gränsv funktion, men vi noterade också att

gränsvfunktionen kunde vara kontinuerlig även om funktionsföljden inte konvergerade likformigt. Vi ska nu visa Dinis sats som ger ett villkor för när man från gränsvfunktionens kontinuitet kan dra slutsatsen att funktionsföljden konvergerar likformigt.

Definition 39. En funktionsföljd $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ kallas monoton om antingen $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ för alla n och alla $x \in A$ eller $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ för alla n och alla $x \in A$.

Sats 39. *Dinis sats.* Låt $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ vara en monoton funktionsföljd med kompakt definitionsmängd A . Om alla funktionerna f_n är kontinuerliga på A och $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar punktvis mot en kontinuerlig funktion f , så är konvergensen likformig på A .

Bevis. Vi kommer att använda Bolzano-Weierstrass sats som säger att varje begränsad talföljd $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ har minst en hopningspunkt ξ och en konvergent delföljd $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, sådan att $a_{n_k} \rightarrow \xi$, då $k \rightarrow \infty$.

Vi antar för enkelhetens skull att f_n avtar mot f , vilket implicerar att för alla $x \in A$, så är $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$, där $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ en avtagande talföljd. f_n och f är kontinuerliga och därmed är g_n kontinuerlig på en kompakt mängd. g_n har därför ett största värde

$$m_n = \sup_{x \in A} |g_n(x)| = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \quad ((\text{vi vill visa att } \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 0))$$

Eftersom $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ är avtagande så gäller $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq 0$. En nedåt begränsad, avtagande talföljd är konvergent, så $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \alpha \geq 0$ existerar. Vi ska visa att $\alpha = 0$.

Satsen om extremvärden säger att det finns en punkt $x_n \in A$ sådan att $g_n(x_n) = m_n$. Talföljden $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är begränsad, så det finns ett tal $\xi \in A$ och en delföljd $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sådan att $x_{n_k} \rightarrow \xi$. Antag nu att $\alpha > 0$. Välj N så stort att $g_N(\xi) < 2\alpha/3$ för alla $|x - \xi| < \delta$. På grund av monotoniteten, så gäller då $g_n(x) < 2\alpha/3$ för alla $|x - \xi| < \delta$ för alla $n > N$. Men för tillräckligt stora n_k så är $|x_{n_k} - \xi| < \delta$ och samtidigt $g_{n_k}(x_{n_k}) = m_{n_k} \geq \alpha$ vilket motsäger att $g_{n_k}(x_{n_k}) < 2\alpha/3$. Alltså gäller $\alpha = 0$ och konvergensen är likformig.

□

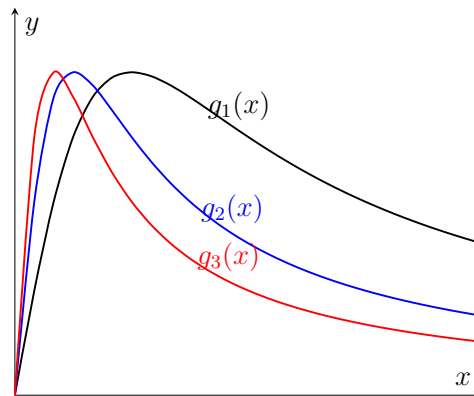
Exempel 90. Vi återvänder till exemplen $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ och $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, där

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad \text{och} \quad g_n(x) = \frac{xn}{1 + n^2 x^2}$$

från förra kapitlet. Båda funktionsföljderna består av kontinuerliga funktioner och konvergerar punktvis mot noll. På det kompakta intervallet $[0, a]$ så är funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ monoton, eftersom

$$f_{n+1}(x) = \frac{x}{1 + (n+1)^2 x^2} \leq \frac{x}{1 + n^2 x^2} = f_n(x),$$

för alla $x \in [0, a]$. Så, enligt Dinis sats så är konvergenen likformig. Funktionsföljden $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ kan inte vara monoton eftersom maximumet $\sup_{x \in [0, a]} g(x) = \frac{1}{2}$ antas för olika x och olika n , så för vissa $x \in [0, a]$ och n så gäller $g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$ och för andra så gäller $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$. Enligt Dinis sats kan konvergenen inte vara likformig.



Vi återkommer till Dinis sats för funktionsserier senare.

Funktionsserier

Genom att summera elementen i en talföljd $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ får vi en serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

dvs. en summa med oändligt många termer. På samma sätt kan vi summera elementen i en funktionsföljd $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ för att bilda en funktionsserie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Definition 40. För en funktionsföljd $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ för funktionerna u_k har definitionsmängd A , så definierar vi funktionsföljden av partialsummor $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ som

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (*) \right)$$

Funktionsserien (*) sägs konvergera (punktvis) mot en funktion f i A om $f_n(x)$ konvergerar punktvis mot $f(x)$ i A då $n \rightarrow \infty$. Funktionsserien (*) sägs konvergera likformigt mot f i A om $f_n(x)$ konvergerar likformigt mot $f(x)$ i A då $n \rightarrow \infty$.

Den differens som är intressat för båda dessa konvergenstyper är

$$f(x) - f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad (\text{dvs. seriens "svans"})$$

Punktvis respektive likformig konvergens av serien motsvarar att svansen går mot noll punktvis respektive likformigt. För funktionsföljder avgjorde vi om en funktionsföljd $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ var likformig genom att först bestämma gränzfunktionen f och sedan undersöka

om $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$. För funktionsserier är gränsvärdet oftast okänt, så ovanstående metod är ej tillämpbar. En möjlig utväg är dock Weierstrass majorantsats.

Sats 40. *Weierstrass majorantsats.* Om $|u_k(x)| \leq M_k$ för alla $x \in A$ och $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ är en konvergent serie, så konvergerar funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt i A .

Observera att vi inte kräver punktvis konvergens av funktionsserien. Kärnan i beviset är att begränsningarna M_k är oberoende av x .

Bevis. Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ är en konvergent positiv serie, så säger jämnförelsekriteriet för positiva serier att $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ är en (punktvis) konvergent serie. Alltså gäller, för seriens "svans"

$$\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sup_{x \in A} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \right) \leq \sup_{x \in A} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k,$$

men högerledet går mot noll då $n \rightarrow \infty$, eftersom det är en konvergent serie. Alltså konvergerar funktionsserien likformigt i A .

□

Exempel 91. Avgör om funktionsserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(x^2 + 2x)^k}{3^k}$$

konvergerar punktvis och likformigt.

För stora k är det potens termen som dominerar. Från p -testet inses att serien är punktvis konvergent för alla x som uppfyller

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 + 2x}{e} \right| < 1 &\Rightarrow |x^2 + 2x| < 3 &\Rightarrow |(x+1)^2 - 1| < 3 \\ &\Rightarrow (x-1)^2 < 4 &\Rightarrow -3 < x < 1 \end{aligned}$$

För $x = -3$ blir funktionsserien $\sum_{k=0}^{\infty} k(-1)^k$ och för $x = 1$ blir funktionsserien $\sum_{k=0}^{\infty} k$, och båda dessa serier är divergenta. Punktvis konvergens gäller på $A = (-3, 1)$. Vi har likformig konvergens på varje slutet intervall $[a, b] \subset (-3, 1)$. Exempelvis gäller på $[-1, 0]$

att

$$\left| k \frac{(x^2 + 2x)^k}{3^k} \right| \leq \overbrace{k \frac{1}{3^k}}^{M_k} \quad \text{och} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{1}{3} \right)^k \quad \text{är konvergent, ty}$$
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} \rightarrow \frac{1}{3} < 1.$$

Föreläsning 38: Funktionsserier

Många egenskaper om funktionsserier kan härledas direkt från de satser som vi har visat för funktionsföljder.

Sats 41. Om funktionerna u_k är kontinuerliga i A och funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergerar

likformigt i A , så är funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ kontinuerlig i A .

Sats 42. Om funktionerna u_k är kontinuerliga i det kompakta intervallet $[a, b]$, och funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergerar likformigt på $[a, b]$, så gäller

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

För att ge Dinis sats en mening i fallet med funktionsserier, så noterar vi att funktionsföljden av partialsummor ($f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$) är monotont växande om $u_k(x) \geq 0$, dvs. om serien är positiv.

Sats 43. Om funktionerna u_k är kontinuerliga och positiva på en kompakt mängd A och om serien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar punktvis mot en kontinuerlig funktion på A , så är serien likformigt konvergent på A .

Potensserier av typen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ som studerade i envariabelanalysen är ett specialfall av funktionsserier. Vi nämnde då att en viktig egenskap hos potensserier var att de kunde deriveras term för term. Exempelvis så gäller

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{och} \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^k) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

för $|x| < 1$. I fallet med integration kunde vi flytta in integrationen innanför summationstecknet om funktionsserien var likformigt konvergent. Följande exempel visar att likformig konvergens inte räcker för att vi ska kunna flytta in derivatan innanför summationstecknet.

Exempel 92. Funktionsserien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin(12^k x)$ är likformigt konvergent enligt Weierstrass majorantsats eftersom

$$|u_k(x)| = \left| \frac{1}{2^k} \sin(12^k x) \right| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \text{ är konvergent}$$

Funktionen f är alltså en kontinuerlig funktion. Termerna i funktionsserien är dessutom deriverbara överallt, men den funktionsserie som vi får om vi deriverar varje term är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12^k}{2^k} \cos(12^k x)$$

som är divergent för varje värde på x .

Det är alltså inte tillräckligt med likformig konvergens för att visa att

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

(faktiskt inte nödvändigt heller, för den delen). Funktionen f ovan är ett exempel på en funktion som är kontinuerlig, med som inte går att derivera i någon punkt (en så kallad Weierstrassfunktion).

Exempel 93. Betrakta funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, där $f_n(x) = \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^n$, $x \in A$. Vi vet sedan tidigare att $f_n(x) \rightarrow e^{3x}$, så för gränsfunktionen $f(x)$ så gäller $\frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x}$. Termvis derivering ger samtidigt

$$f'_n(x) = n \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n-1} \frac{3}{n} = 3 \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n-1} = \underbrace{\frac{3}{1 + 3x/n}}_{\rightarrow 3} \underbrace{\left(1 + \frac{3x}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{3x}}$$

Eftersom funktionsföljden är monoton, så konvergerar, enligt Dinis sats, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ likformigt mot $3e^{3x}$.

Följande sats visar när en funktionsserie kan deriveras termvis. En motsvarande sats finns för funktionsföljder, men den tas inte upp här.

Sats 44. Om funktionerna $u_k(x)$ har kontinuerliga derivator på A , om funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar punktvis mot en funktion $s(x)$ på A och om funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ konvergerar likformigt mot en funktion $t(x)$ på A , så är funktionen s deriverbar på A och

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \quad (\text{eller } s'(x) = t(x)).$$

Bevis. Låt x_n vara en godtycklig punkt i A . Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ konvergerar likformigt mot t på A så konvergerar serien också likformigt mot t på varje intervall $[x_0, x] \subset A$. Enligt satsen om termvis integration gäller då:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x t(y) dy &= \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_k(y) dy \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [u_k(y)]_{y=x_0}^{y=x} = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(x) - u_k(x_0)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = s(x) - s(x_0) \end{aligned}$$

där det sista steget följer eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar punktvis mot s på A . Eftersom u'_k är kontinuerliga och konvergerar likformigt på A , så är gränsvfunktionen t kontinuerlig på A . Vänsterledet är alltså deriverbart med derivatan $t(x)$. Då måste också högerledet vara deriverbart med derivatan $s'(x)$. Alltså gäller $t(x) = s'(x)$. \square

Det avgörande för om en funktionsserie kan deriveras termvis är således om funktionsserien av derivatorna är likformigt konvergent. Detta gällde inte för exemplet där funktionsföljden gavs av $\frac{1}{2^k} \sin(12^k x)$, men det gäller för alla potensserier $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x-a)^k$ innanför konvergensradien. Vi avslutar med att undersöka om generaliserade integraler av samma typ som Laplacetransformer. Med hjälp av teorin för funktionsserier kan man visa följande sats (se kap. 4.6 i Vretblads kompendium).

Sats 45. Låt $D = [a, b] \times [c, \infty)$ och anta att f är en kontinuerlig funktion på D . Antag att $F(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$ konvergerar för alla $x \in [a, b]$, att f'_x är kontinuerlig i D och att

$|f'_x| \leq g(y)$, för någon funktion som uppfyller $\int_c^\infty g(y) dy < \infty$. Då gäller

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \quad (\text{deriveringen kan flyttas innanför integraltecknet}).$$

Exempel 94. Beräkna $F'(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Det är svårt att hitta en primitiv funktion till integranden. Villkoren i satsen ovan är dock uppfyllda (visa detta på egen hand) och

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = \int_0^\infty -te^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt = - \underbrace{\int_0^\infty e^{-xt} \sin(t) dt}$$

Partiell integration två gånger ger

$$I = \underbrace{[-e^{-xt} \cos(t)]_0^\infty}_{=0+1} - \int_0^\infty -te^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt = 1 - \underbrace{[xe^{-xt} \sin(t)]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty -x^2 e^{-xt} \sin(t) dt}_{=-x^2 I}$$

$$\Rightarrow I = 1 - x^2 I \Rightarrow I(1 + x^2) = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow F'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Det måste alltså gälla att $F(x) = -\arctan(x) + C$. gränsvärdet då $x \rightarrow \infty$ ger

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty \underbrace{e^{-xt}}_{\rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\arctan(x) + C) = C - \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Repetition 2

I detta avslutande kapitel ska vi gå igenom några uppgifter från ett par nyare tidigare tentor, och även tipsa om några saker som kan vara bra att tänka på inför tentamen.

Exempel 95. 2011-12-12: 2. Lös den partiella differentialekvationen $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - 2xy = 0$ i området $x > 0, y > 0$ genom variabelbytet $u = xy, v = x/y$.

Kedjeregeln ger nu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Insättning i PDE:n ger:

$$\begin{aligned}x \left(y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + y \left(x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) - 2xy &= 0 \\ \Rightarrow 2xy \frac{\partial f}{\partial u} - 2xy &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2xy \left(\frac{\partial f}{\partial u} - 1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 1 \\ \Rightarrow f(u, v) = u + g(v) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = xy + g\left(\frac{x}{y}\right),\end{aligned}$$

för någon godtycklig funktion g .

Öva även på andra ordningens kedjeregeln. Exempelvis gäller i detta fall

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) = x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{x}{y^3} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Exempel 96. 2012-08-21: 3. Låt $f(x, y) = x + y + 4$ vara definierad på ellipsen $3x^2 + y^2 - 3 = 0$. Antar $f(x, y)$ största och/eller minsta värde på ellipsen? Bestäm i så fall dessa värden.

Eftersom f är kontinuerlig och ellipsen är en kompakt mängd, så antar största och minsta värde. Antingen kan problemet lösas genom att ellipsen parametriseras $\vec{r}(\theta) = (\cos(\theta), \sqrt{3} \sin(\theta))$ eller genom att använda Lagrangemultiplikatorer. Enligt den sist-nämnda metoden gäller $\nabla f = \lambda \nabla g$, där $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 3$. Vi får:

$$\begin{cases} 1 = \lambda 6x \\ 1 = \lambda 2y \\ 3x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} = \frac{6\lambda x}{2\lambda y} \quad \Rightarrow \quad y = 3x$$

Insättning i bivillkoret $3x^2 + y^2 - 3 = 0$ ger sedan

$$3x^2 + (3x)^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

Extremvärdena antas i punkterna $\pm(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ och är $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 6$ (maximum) och $f(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) = 2$ (minimum).

Andra delar av första halvan av kursen som är viktiga att repetera:

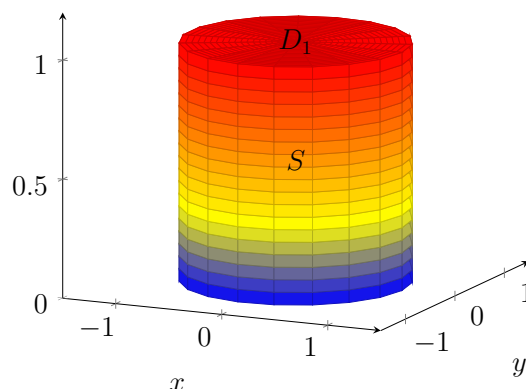
- Bestämning av kritiska punkter och karaktärisering av dessa (kvadratiska former).
- Bestämning av största och minsta värde för $f(x, y)$ på ett kompakt område i planet (kritiska punkter på det inre, parametrisering av randen, glöm inte hörnen på områden som har dessa).
- Bestämning av tangentplan till funktioner.
- Avgörande av om variabler kan lösas ut som en funktion av andra variabler med hjälp av implicita funktionssatsen.
- Gränsvärden (visa existens eller motbevisa existens genom att testa ett antal olika linjer).

Exempel 97. 2011-12-12: 7.

Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F} = (xz^2, 2xy, z^2 + 2)$ ut ur cylindern $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$.

Den cylindriska ytan kan parametriseras av $\vec{r}(s, t) = (\cos(s), \sin(s), t), 0 \leq s \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 1$ och flödet ges av

$$\pm \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds dt$$



Det är dock lättare att använda Gauss sats på $S \cup D_1 \cup D_2$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dV$$

På D_1 har vi $\hat{N} = (0, 0, 1)$, så $\vec{F} \cdot \hat{N} = z^2 + 2 = 3$ och

$$\iint_{D_1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = 3 \iint_{D_1} dS = 3\pi$$

På D_2 har vi $\hat{N} = (0, 0, -1)$, så $\vec{F} \cdot \hat{N} = -(z^2 + 2) = -2$ och

$$\iint_{D_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = -2 \iint_{D_2} dS = -2\pi.$$

Divergensen av vektorfältet är

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + 2) = z^2 + 2x + 2z$$

Av symmetriskäl så är volymintegralen av $2x$ över kroppen K noll, så det återstår:

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_{D_2} \left(\int_0^1 (z^2 + 2z) dz \right) dx dy = \pi \left[\frac{z^3}{3} + z^2 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

Vi får slutligen att flödet av vektorfältet \vec{F} genom cylindern S är:

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dV - \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \hat{N} dS - \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \frac{4\pi}{3} - 3\pi - (-2\pi) = \frac{\pi}{3}$$

Om integranden hade berott på x eller y hade vi behövt använda polära/cylindriska koordinater, och om kroppen hade radiell/sfärisk symmetri hade vi behövt använda sfäriska koordinater (öva på detta).

Exempel 98. 2013-01-14: 8. Låt γ vara skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ och xy -planet (moturs, dvs. positivt orienterad). Låt $\vec{F} = (y^2 \cos(xz), x^2 e^{yz}, -e^{xyz})$. Beräkna $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Skärningskurvan ges av ekvationerna $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$, $z = 0$, dvs. av cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ i xy -planet. Parametriseringen $\vec{r}(\theta) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ger $d\vec{r} = (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0)$ och, efter insättning i kurvintegralen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} ((2 \sin(\theta))^2, (2 \cos(\theta))^2, -1) \cdot (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-8 \underbrace{\sin^3(\theta)}_{\text{udda}} + 16 \cos^4(\theta)) d\theta = 16 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos(2\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \cos(2\theta) + \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= 4 \left[\frac{3\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 12\pi \end{aligned}$$

Andra delar av andra halvan av kursen som är viktiga att repetera:

- Dubbelintegraler, Variabelsubstitution (polära och andra, se inlämningsuppgifter), bestämning av integrationsgränser för exempelvis trianglar.
- Bestämning av volymer av kroppar med hjälp av trippelintegraler (visualisering av andragsadytor är viktigt för detta).
- Beräkning av kurvintegraler i planet med hjälp av Greens formel och på konservativa vektorfält med hjälp av potentialen.
- Användning av Stokes sats för att gå mellan kurvintegraler och flödesintegraler (definition av rotationen).